

# Logistic 系统跃迁率的时间延迟效应

杨林静<sup>†</sup>

(云南中医学院中药学院, 昆明 650500)

(2010年9月20日收到; 2010年10月13日收到修改稿)

本文研究了时间延迟对 Logistic 系统从亚稳态跃迁到稳定态的跃迁率的影响. 假设在细胞演化过程中细胞衰减存在时间延迟, 利用小延迟时间条件下一阶近似方法和最陡下降法导出了系统的跃迁率解析式. 数值计算结果表明, 内噪声, 外噪声和内外噪声之间的关联促使系统从亚稳态跃迁到稳定态, 而时间延迟阻碍了系统从亚稳态到稳定态的跃迁, 即时间延迟增强了系统亚稳态的稳定性.

**关键词:** Logistic 模型, 跃迁率, 时间延迟, 噪声

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

## 1. 引言

Logistic 模型是生态学中一个最简单的理想生物模型. 该模型原来是用来模拟一个封闭区域中昆虫的繁殖生长以及由于食物限制, 疾病和争斗而引起昆虫数目减少的这两个因素之间的竞争所导致的生态行为. 后来该模型被广泛运用于生态学、人口动力学、化学、和经济学等领域. 近几年来, 受噪声扰动的 Logistic 模型描述细胞演化的过程受到了广泛的关注<sup>[1-6]</sup>, 文献[1]将交叉白关联噪声引入了 Logistic 模型, 研究了下系统的稳态性质, 文献[2]研究了交叉色关联的情况下系统的稳态性质和稳态跃迁率, 文献[3,4], 分别研究了加性周期信号和乘性周期信号诱导该系统的随机共振现象, 文献[5]分析了该系统的瞬态性质的色噪声效应, 文献[6]计算了该系统的态关联函数和弛豫时间. 但以前这些工作都没有考虑系统中的时间延迟因素.

由于信息, 能量和物质的传输速度有限, 所以在理论模型中引入时间延迟才能真实的反映自然规律. 噪声和时间延迟实际上是随机系统的一个不可分割的整体. 近年来, 在生物系统中考虑噪声和时间延迟的共同作用的研究工作揭示了许多非常有趣的现象, 例如, 可以提高布朗马达的能量转换效率<sup>[7]</sup>, 会抑制互利共生生态系统中的种群数目的大爆炸<sup>[8]</sup>, 导致两物种竞争系统中两物种密度的

Hopf 分岔, 诱导物种密度的二维稳态概率分布从多稳态分布向单稳态分布的跃迁和相干共振现象<sup>[9]</sup>, 诱导临界现象<sup>[10]</sup>, 诱导 Logistic 系统定态概率分布多极值结构向单极值结构的转换<sup>[11]</sup> 以及时间延迟能增强双稳系统的共振抑制<sup>[12]</sup> 等.

本文将研究时间延迟对 Logistic 模型描述的细胞增长过程跃迁率的影响. 考虑受相互关联的内外噪声作用下的 Logistic 模型描述的细胞演化, 在该系统中引入时间延迟因素, 应用小时间延迟近似导出系统态跃迁率解析式, 进行数值并分析讨论时间延迟对细胞增长过程跃迁率的影响.

## 2. 时间延迟的 Logistic 系统的跃迁率

### 2.1. 时间延迟的 Logistic 模型和 Fokker-Planck 方程

Logistic 模型作为一个细胞增长的基本模型, 较普遍的是用来描述细胞的演化的过程. 该模型的微分方程为

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \quad (1)$$

其中  $x$  为细胞数量,  $a$  表示细胞增长率,  $b$  表示细胞衰减率, 若考虑环境涨落因素 (如温度、放射治疗、化疗、药物等) 的影响则其增长率  $a$  将不再是一个常数, 物理上, 简单的引入一个噪声项 (涨落)  $\xi(t)$  来描述这种影响是非常合理的, 于是增长率变为  $a$

<sup>†</sup> E-mail: kmljyang@126.com

+  $\xi(t)$ . 另一方面, 系统内部也存在一些影响细胞生长的因素(如细胞的迁移、遗传的不稳定性等)也呈现一定的随机性, 它将引起局部区域内细胞数量的涨落, 也可用一个噪声项  $\Gamma(t)$  来描述. 这样可以得到 Logistic 模型微分方程(1)引入内、外噪声后转化的朗之万方程<sup>[1,2]</sup>

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 + x\xi(t) - \Gamma(t), \quad (2)$$

其中,  $\xi(t)$  和  $\Gamma(t)$  分别为乘性和加性高斯白噪声, 具有下列统计性质:

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad (4)$$

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\alpha\delta(t-t'), \quad (5)$$

$$\langle \xi(t)\Gamma(t') \rangle = \langle \Gamma(t)\xi(t') \rangle = 2\lambda \sqrt{D\alpha}\delta(t-t'), \quad (6)$$

其中,  $D$  和  $\alpha$  分别表示乘性(外)高斯白噪声和加性(内)高斯白噪声的强度.  $\lambda$  是加性噪声和乘性噪声之间的关联强度, 其取值范围是  $0 < \lambda < 1$  方程(2)表示一随机动力学过程, 其关于态变量  $x$  的确定论势函数为

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3, \quad (7)$$

它有一个稳态  $x_s = \frac{a}{b}$  和一个亚稳态  $x_u = 0$  当  $a \rightarrow 0$  时, 态  $x_s \rightarrow x_u$ . 假设, 在细胞演化过程中衰减因素对细胞的影响存在时间延迟, 即环境因素的变化对细胞作用不是瞬时发生的, 有一滞后效应, 则方程(2)将改写为

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx_\tau) + x\xi(t) - \Gamma(t), \quad (8)$$

这里的  $x_\tau = x(t - \tau)$ ,  $\tau$  是延迟时间. 在小延迟时间条件下利用一阶近似方法<sup>[13]</sup> 可得对应朗之万方程(8)的福克-普朗克方程

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}A(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)P(x,t), \quad (9)$$

其中

$$A(x) = x(a - bx)(1 + a\tau) + (Dx - \lambda \sqrt{D\alpha})(1 + a\tau), \quad (10)$$

$$B(x) = (Dx^2 + 2\lambda \sqrt{D\alpha} + \alpha)(1 + a\tau)^2. \quad (11)$$

## 2.2. 时间延迟 Logistic 系统的跃迁率

由稳态条件  $\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = 0$ , 和方程(9)可得系统

稳态概率分布函数

$$P_{st}(x) = \frac{N}{B(x)} \exp \int^x \frac{A(x')}{B(x')} dx' = NB(x)^{c-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{U(x)}{D}\right), \quad (13)$$

其中  $N$  为归一化常数,

$$C = \frac{1}{2D} \left[ a - 2\lambda b \frac{\alpha}{D} - b\tau \left( 2a\lambda \sqrt{D\alpha} + b\alpha - 4b\lambda^2 \frac{\alpha}{D} \right) \right],$$

$U(x)$  为系统的广义势

$$U(x) = bx + b\tau \left[ (a + 2\lambda b \sqrt{\frac{\alpha}{D}})x - \frac{bx^2}{2} \right] - (E - b\tau F) \arctan \frac{Dx - \lambda \sqrt{D\alpha}}{\sqrt{D\alpha}(1 - \lambda^2)}. \quad (14)$$

其中

$$E = \frac{b\alpha + (aD - 2b\lambda \sqrt{D\alpha})\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sqrt{D\alpha}(1 - \lambda^2)},$$

$$F = \frac{\lambda \sqrt{D\alpha}(2a\lambda \sqrt{D\alpha} + 3b\alpha - \frac{4b\alpha\lambda^2}{D}) - aD\alpha}{\sqrt{D\alpha}(1 - \lambda^2)}. \quad (15)$$

考察时间延迟对系统中细胞增长过程的影响, 为了计算系统从细胞数为  $x_u = 0$  的态跃迁到细胞数  $x_s = \frac{a}{b}$  的态的跃迁概率. 首先计算系统从细胞数  $x_u = 0$  的状态跃迁到细胞数  $x_s = \frac{a}{b}$  状态的平均第一通过时间(MFPT)<sup>[14]</sup>

$$T(x_u \rightarrow x_s) = \int_{x_u}^{x_s} \frac{dx}{B(x)P_{st}(x)} \int_{x_u}^x P_{st}(y) dy. \quad (18)$$

在小噪声情况下, 即满足条件  $D, \alpha \ll |U(x_s) - U(x_u)|$  时, 可应用最陡下降法得 MFPT 表达式<sup>[15]</sup>

$$T(x_u \rightarrow x_s) = \frac{2\pi}{|V''(a/b)V''(0)|^{1/2}} \times \exp\left\{\frac{U(a/b) - U(0)}{D}\right\} = \frac{2\pi}{a} \exp\left\{-\frac{a}{D} \left[ \frac{a\tau}{2} - \left(a + 2b\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{D}}\right)\tau - 1 \right]\right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{E - bF\tau}{D} \left( \arctan \frac{\frac{b}{a} - \lambda \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{D}(1 - \lambda^2)}} \right. \\
 & \left. + \arctan \frac{\lambda \sqrt{\frac{\alpha}{D}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{D}(1 - \lambda^2)}} \right) \Bigg\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

由(19)式很容易得到系统从亚稳态  $x_u$  态跃迁到稳态  $x_s$  态的跃迁概率<sup>[16]</sup>

$$\kappa = \frac{1}{T(x_u \rightarrow x_s)}. \quad (20)$$

根据(20)式,可分析延迟时间  $\tau$  对系统跃迁概率  $\kappa$  的影响.  $\tau$  为参数,跃迁率  $\kappa$  作为噪声强度  $D$ ,  $\alpha$  和  $\lambda$  的函数的数值计算结果分别表示在图1—图3中.

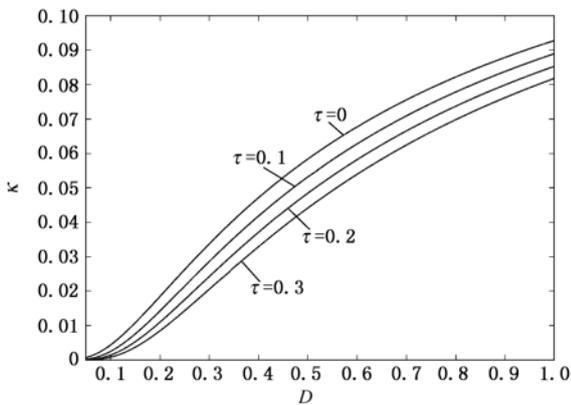


图1  $\kappa$  作为  $D$  的函数曲线,参数取值为  $a = 1, b = 0.1, \lambda = 0.2, \alpha = 0.5, \tau$  分别取值  $0, 0.1, 0.2$  和  $0.3$

图1显示跃迁率  $\kappa$  随外噪声强度  $D$  增大而增加,但随延迟时间  $\tau$  的增大而减小,表明外噪声诱导了系统从亚稳态跃迁到稳定态,而时间延迟阻碍了系统的这种行为.

图2中可看出跃迁率  $\kappa$  也是随内噪声强度  $\alpha$  增大而增加,但随延迟时间  $\tau$  的增大而减小,同样说明内噪声促使系统从亚稳态跃迁到稳定态,而时间延迟阻碍了  $\alpha$  诱导的系统从亚稳态到稳定态的跃迁.

图3同样清楚给出跃迁率  $\kappa$  随内外噪声之间关联强度  $\lambda$  增大而增加,而随延迟时间  $\tau$  的增大而减

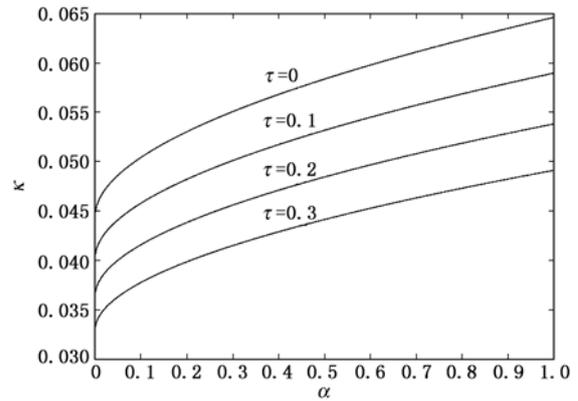


图2  $\kappa$  作为  $\alpha$  的函数曲线,参数取值为  $a = 1, b = 0.1, \lambda = 0.2, D = 0.5, \tau$  分别取值  $0, 0.1, 0.2$  和  $0.3$

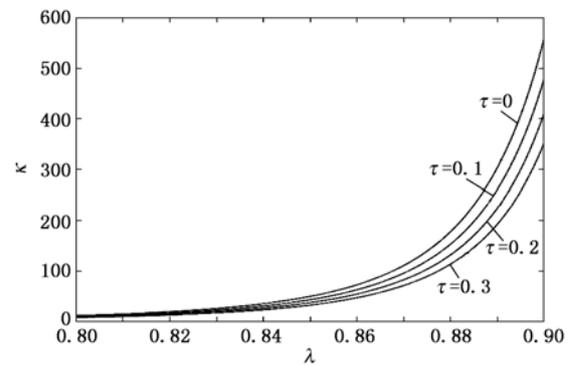


图3  $\kappa$  作为  $\lambda$  的函数曲线,参数取值为  $a = 1, b = 0.1, \alpha = 0.5, D = 0.5, \tau$  分别取值  $0, 0.1, 0.2$  和  $0.3$

小,从中可知内外噪声的关联促使系统从亚稳态跃迁到稳定态,但时间延迟同样是阻碍了  $\lambda$  诱导的系统从亚稳态到稳定态的跃迁.

### 3. 结 论

归纳以上分析讨论,可以得到以下结论:时间延迟的 Logistic 系统从亚稳态跃迁到稳定态的跃迁率受到内外噪声,内外噪声之间的关联和时间延迟的影响,内外噪声和内外噪声的关联促使系统从亚稳态跃迁到稳定态,而时间延迟阻碍了系统从亚稳态到稳定态的跃迁,即时间延迟增强了系统亚稳态的稳定性.

- [1] Ai B Q, Wang X J, Liu G T, Liu L G 2003 *Phys. Rev. E* **67** 022903
- [2] Mei D C, Xie C W, Zhang L 2004 *Eur. Phys. J. B* **41** 107
- [3] Cai J C, Wang C J, Mei D C 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 1162
- [4] Bai C Y, Du L C, Mei D C 2009 *Cent. Eur. J. Phys.* **7** 601
- [5] Wang C J, Wei Q, Zheng B B, Mei D C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1375 (in Chinese) [王参军、魏群、郑宝兵、梅冬成 2008 物理学报 **57** 1375]
- [6] Wang C J, Wei Q, Mei D C 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2176
- [7] Wu D, Zhu S Q 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051107
- [8] Nie L R, Mei D C 2007 *Europhysics Letters* **79** 20005
- [9] Nie L R, Mei D C 2008 *Phys. Rev. E* **77** 031107
- [10] Du L C, Mei D C 2010 *Phys. Lett. A* **374** 3275
- [11] Han L B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2699 (in Chinese) [韩立波 2008 物理学报 **57** 2699]
- [12] Li L, Yan Y, Mei D C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2240 (in Chinese) [林灵、闫勇、梅冬成 2010 物理学报 **59** 2240]
- [13] Frank T D 2005 *Phys. Rev. E* **71** 031106
- [14] Hänggi P, Talkner P 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 2242
- [15] Guardia E, Miguel M S 1985 *Phys. Lett. A* **109** 9
- [16] Madureira A J R, Hänggi P, Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **217** 248

## Effects of time delay on transition rate of state in an increasing process of Logistic system

Yang Lin-Jing<sup>†</sup>

(College of Chinese Medicine, Yunnan University of Traditional Chinese Medicine, Kunming 650500, China)

(Received 20 September 2010; revised manuscript received 13 October 2010)

### Abstract

The effects of time delay on transition rate from metastable state to stable state in a Logistic system are investigated. On the assumption that there is a delay time in the decay process of cell evolution, the expression of the transition rate is derived in the first order approximation under the condition of the small delay time and the steepest-descent approximation. The numerically calculated results indicate that the additive noise, the multiplicative noise and the correlations between additive and multiplicative noises enhance the system transition from metastable state to stable state. However, such a transition is restrained by the time delay, i. e., the time delay enhances the stability of the system.

**Keywords:** Logistic model, transition rate, time delay, noise

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

<sup>†</sup> E-mail: kmljyang@126.com