基于 Washout 滤波器的 Rössler 系统 Hopf 分岔控制*

吴志强* 孙立明

(天津大学机械工程学院力学系,天津 300072) (2010年7月25日收到;2010年8月18日收到修改稿)

针对 Rössler 系统平衡点的 Hopf 分岔,以 Washout 滤波器为控制器,详细讨论了控制器参数对 Hopf 分岔点位置、分岔类型以及周期解振幅的控制问题. 首先根据 Routh-Hurwitz 判据计算了受控系统的参数空间稳定域,找出了对应的 Hopf 分岔边界,并由此分析了滤波器时间常数、线性控制增益对分岔点位置的影响. 然后,引入 Normal Form 直接法方便地求出系统 Hopf 分岔 Normal Form 系数,由此确定出改变分岔类型和周期解振幅的控制器非线性增益选择原则. 最后用数值计算验证了本文的结论.

关键词: Rössler 系统, Washout 滤波器, Hopf 分岔, Normal Form **PACS**: 05.45.-a, 02.30.0z

1. 引 言

分岔是非线性系统所具有的独特现象之一. 分岔控制的目的是通过改变系统动力学特性来获得期望的系统行为^[1]. 到目前为止, 分岔控制的研究已经扩展到许多领域, 如化工、航天、机械电子^[2,3]、电力系统^[4,5]、经济及气象等.

Hopf 分岔作为最具有代表性的动态分岔,与许多工程系统的失稳现象密切相关,如机翼颤振,轴承油膜振荡,输电线舞动等,因此 Hopf 分岔控制的研究得到了广泛的重视. Hopf 分岔控制的主要任务是提前或延迟 Hopf 分岔的发生、改变 Hopf 分岔的类型及极限环幅值等,前者可由控制器的线性部分实现,后者则需进行非线性控制,Washout 滤波器作为一种工程上应用广泛的高通滤波器,具有不改变原系统平衡点位置的优点,已被用于许多的 Hopf 分岔控制中[6].

Rössler 系统^[7]是经典的混沌系统之一,它有两种典型混沌:旋转混沌(spiral chaos)、螺旋混沌(screw chaos),出现在生态系统、化学反应中等.目前,有关其混沌控制和同步的研究较多,如文献[8]研究了 Rössler 系统和 Chen 系统的混沌同步问题,

而关于 Rössler 系统分岔控制研究的工作并不多见. 文献[6]以 Rössler 系统为例说明非线性多项式反 馈可有效控制其平衡点的 Hopf 分岔,文献[1]借助 约束分岔理论确定了多维参数空间的稳定域,针对 Rössler 系统实现了多平衡点的同时镇定以及分岔 的控制. 但利用 Washout 滤波器控制 Rössler 系统 Hopf 分岔的研究还未见报道.

本文讨论了用 Washout 滤波器控制的 Rössler 系统 Hopf 分岔. 首先计算了受控系统的稳定域边界,并由此分析了控制器线性参数对 Hopf 分岔点的影响;为考虑对 Hopf 分岔类型和周期解振幅的控制,采用一种更为简便的计算 Normal Form 的直接方法^[9]计算 Hopf 分岔 Normal Form,最后通过数值计算验证理论结果的正确性.

2. 受控系统稳定性分析

Rössler 系统由三维非线性微分方程描述:

$$\dot{x} = -y - z,
\dot{y} = x + ay,
\dot{z} = b + z(x - d).$$
(1)

系统参数 a,b,d 通常取正值. 当 b=2,d=4 时, Rössler 系统具有两个平衡点 $E_e^{\dagger}(aZ_e^{\dagger},-Z_e^{\dagger})$,

^{*}国家自然科学基金(批准号:10872142),教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号:NCET-15-0247),天津市重点项目(批准号:09JCZDJ16800)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:2009003211005)资助的课题.

[†] E-mail; zhiqwu@ tju. edu. cn

其中 $Z_e^{\pm} = \frac{1}{a} (2 \pm \sqrt{4 - 2a}), a \in (0,2)$. 由文献 [6] 可知, E_e^{-} 在 $a_0 \approx 0$. 125 时产生超临界 Hopf 分 岔. 以下讨论该平衡点处的 Hopf 分岔控制问题.

为与已有结果比较选定 b = 2, d = 4, 用 Washout 滤波器控制的受控 Rössler 系统如下:

$$\dot{x} = -y - z,
\dot{y} = x + ay + \omega,
\dot{z} = 2 + z(x - 4),
\dot{v} = y - cv.$$
(2)

状态变量 y 作为 Washout 滤波器的输入量, c 为滤波器时间常数, c>0 时为稳定的 Washout 滤波器, c<0 时为不稳定的 Washout 滤波器,这两种类型的滤波器在控制系统中都有应用. 现选取控制器

$$\omega = k_1(y - cv) + k_n(y - cv)^3,$$
(3)
 k_1, k_n 分别为线性和非线性控制增益.

由于 Washout 滤波器不改变原系统的平衡点,此时受控系统的平衡点为 $\left(aZ_{e}^{-},-Z_{e}^{-},Z_{e}^{-},-\frac{1}{c}Z_{e}^{-}\right)$. 为将受控系统的平衡点移到原点,作变换 $x=\bar{x}+aZ_{e}^{-},y=\bar{y}-Z_{e}^{-},z=\bar{z}+Z_{e}^{-},v=\bar{v}-\frac{1}{c}Z_{e}^{-}$,代人受控系统(2) 中整理可得(为简便仍用 x 代替变换后系统中的 \bar{x})

$$\dot{X} = AX + f(X) \,, \tag{4}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a + k_1 & 0 & -k_1 c \\ Z_e^- & 0 & a Z_e^- - 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c \end{bmatrix},$$

$$X = [x, y, z, v]^{\mathrm{T}},$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{n}(y - cv)^{3} \\ xz \\ 0 \end{bmatrix}.$$

设矩阵A的特征多项式为

 $P(\lambda) = p_0 \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4,$ (5) 则各项系数如下:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= -aZ_e^- + c - a - k_c + 4, \\ p_2 &= Z_e^- (a^2 - ac + ak_c + 1) \\ &+ 4(c - a - k_c) - ac + 1, \end{aligned}$$

$$p_{3} = Z_{e}^{-} (a^{2}c - 2a + c - k_{e})$$
$$- 4ac + c + 4,$$
$$p_{4} = 2c(2 - aZ_{e}^{-}).$$

由 Routh-Hurwitz 判据知,当

$$\Delta_{1} = p_{1} > 0,$$

$$\Delta_{2} = \begin{vmatrix} p_{1} & p_{0} \\ p_{3} & p_{2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_{3} = \begin{vmatrix} p_{1} & p_{0} & 0 \\ p_{3} & p_{2} & p_{1} \\ 0 & p_{4} & p_{3} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_{4} = p_{4}\Delta_{3} > 0 \tag{6}$$

中四个条件满足时,平衡点是稳定的.参数空间中所有满足稳定条件的点就构成了稳定域.当参数在稳定域中选取时,平衡点是稳定的.稳定域边界由两部分组成:

(I)
$$\Delta_4 = 0, \Delta_i > 0, i = 1, 2, 3$$
;
(II) $\Delta_3 = 0, \Delta_i > 0, i = 1, 2, 4$.

在边界(II)上特征方程有一对纯虚根,而其他特征根实部均小于 0,因此也可称为 Hopf 分岔边界 $^{[1]}$.

3. 线性控制部分对 Hopf 分岔的影响

本节通过对稳定域边界的计算,讨论控制器线性增益对 Hopf 分岔点的影响.

图 1 给出了 c 分别取 0.5,1,1.5 时参数平面 (a,k_1) 内稳定域的计算结果. 图中符号" +(-)" 表示 $\Delta_i > (<)0, i = 1,2,3$,例" + + +"分别代表 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$ 和 $\Delta_3 > 0$;而曲线 $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$ 分别用点线、虚线、实线表示. 因 c > 0 时,恒有 $\Delta_4 > 0$,所以图 1 中标记为" + + +"的区域即为稳定域. 在本文讨论的参数范围内,图中最下方曲线为稳定域. 在本文讨论的参数范围内,图中最下方曲线为稳定域边界,属于 Hopf 分岔边界. 比较可见,随着时间常数 c 值的增大稳定域在逐渐减小. 与原系统分岔点 a_0 相比,线性控制增益 $k_1 > 0$ 时,可使 Hopf 分岔点提前,而 $k_1 < 0$ 时,则可使 Hopf 分岔点延后,当 k_1 足够小时可使 E_e 在 $a \in [0,2]$ 区间内始终保持稳定,不发生分岔.

在实际的控制器设计中,适当选取 k_1 , c 值即可得到期望的分岔点值 a_H . 如选定参数 c=0.5, $k_1=-0.5$, 则由图 1(a) 中曲线 $\Delta_3=0$ 和直线 $k_1=-0.5$ 的交点得到分岔点值为 $a_H\approx0.56020>a_0$,

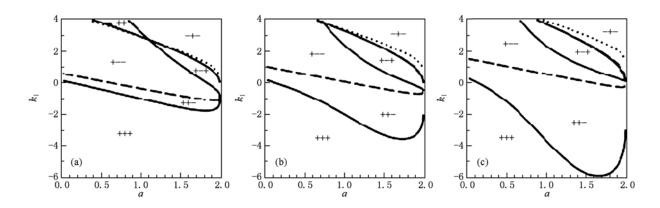


图 1 不同 c 时参数平面(a,k_1)内的稳定域 (a) c=0.5; (b) c=1; (c) c=1.5

即控制器使系统分岔点延后.

4. 非线性控制部分对 Hopf 分岔影响

本节讨论利用控制器非线性部分对 Hopf 分岔的类型及周期解幅值的影响. 当取 $c=0.5,k_1=-0.5$ 时,方程(4)中的线性、非线性部分分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0.06020 & 0 & 0.25 \\ 0.54099 & 0 & -3.69694 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{n}(y - 0.5v)^{3} \\ xz \\ 0 \end{bmatrix}.$$
 (7)

矩阵 A 有一对纯虚根 $\lambda_{1,2}=\pm 0.90650\mathrm{i}$,相应的特征向量为 $\varphi, \bar{\varphi}$,其中 $\varphi=\begin{bmatrix} -0.54811+0.82323\mathrm{i}\\ 0.79406+0.36468\mathrm{i}\\ -0.04780+0.13219\mathrm{i}\\ 0.67890-0.50149\mathrm{i} \end{bmatrix}$,

其他特征根均具有负实部.

为简化计算过程,引入文献[9]中提出的计算 Normal Form 的直接方法.该方法在仅需知道系统零 实部特征值及对应特征向量的情况下,引入特殊形 式的非线性变换,不需中心流形计算,即可求得系 统 Normal Form. 根据文献[9]给出的方法,引入 变换

$$X = \varphi u + \overline{\varphi u} + \sum_{j+k \ge 2} H_{jk} u^j \overline{u}^k, \qquad (8)$$

即可求出方程(4)的 Hopf 分岔 Normal Form

$$\dot{u} = 0.90650iu + Cu^2u^{-1}$$
 (9)

非线性项系数 C 表达式为

$$C = \langle \psi, F_{21} \rangle, \tag{10}$$

其中 ψ 满足 $(A^{T} - \lambda_{1}I)\psi = 0$ 及 $\langle \psi, \varphi \rangle = 1$,则得

$$\psi = \begin{bmatrix} -0.23001 - 0.58611i \\ 0.47972 - 0.28163i \\ 0.09536 + 0.13516i \\ -0.00360 - 0.13429i \end{bmatrix}$$

将非线性降维变换代入非线性项中整理成关于u,u的多项式形式如下:

$$f(X) = \sum_{j+k \ge 2} F_{jk} u^j \bar{u}^k$$
 (11)

显然 F_{21} 为 u^2u 对应的系数向量

$$F_{21} = \begin{bmatrix} 0 & F_{21,2} & F_{21,3} & 0 \end{bmatrix}^{T},$$

$$F_{21.2} = 0.79840k_n + 1.08084i \cdot k_n$$

 $F_{21,3} = \varphi_{,1}H_{11,3} + \varphi_{,1}H_{20,3} + \varphi_{,3}H_{11,1} + \varphi_{,3}H_{20,1}$. 上式中 $H_{jk,m}$ 表示向量 H_{jk} 中的第 m 个元素. 由于受控系统中含有二次项, F_{21} 与非线性变换中二次项的系数向量 H_{11} , H_{20} 有关. 二者分别有下式求得:

$$H_{11} = -A^{-1}F_{11} = [0.04457 - 0.07957 0.07957 - 0.15913]^{\mathrm{T}},$$
 (12)

$$H_{20} = [2 \times 0.90650iI - A]^{-1}F_{20}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.01425 - 0.02308i \\ -0.01222 - 0.00674i \\ -0.02963 - 0.01909i \\ -0.00518 + 0.00531i \end{bmatrix}.$$
(13)

综合以上各式求得

$$C = -0.01892 + 0.68741k_n + (0.00344 + 0.29365k_n)i,$$
 (14)

所以受控系统的 Normal Form 为

$$\dot{u} = 0.90650iu + [-0.01892 + 0.68741k_n + (0.00344 + 0.29365k_n)i]u^2\bar{u}.$$
 (15)

由 Hopf 分岔理论可知

- (I)实部 Re(C) < 0 时, Hopf 分岔的类型为超临界分岔. 当分岔参数 $a < a_H$ 时, 系统具有渐近稳定的平衡点, 当 $a > a_H$ 时, 系统平衡点不稳定且在其附近存在稳定的极限环;
- (II)当 Re(C) > 0 时, Hopf 分岔的类型为亚临界分岔. 当分岔参数 $a < a_H$ 时系统平衡点稳定且其附近存在不稳定的极限环, 当 $a > a_H$ 时, 平衡点发散, 为不稳定平衡点;
- (\mathbb{II}) Re(C) = 0 时, Hopf 分岔是退化的,需要计算 Normal Form 高阶非线性项系数才能确定 Hopf 分岔的类型和分岔产生极限环的稳定性. 因此 k_n 的

选择应与其临界值 $k_{nc} = 0.0275$ 有一定的偏离.

另外,当 $|a-a_{\rm H}|$ 取定值时, $|{\rm Re}(C)|$ 越大, 即 $|k_{\rm n}-k_{\rm nc}|$ 越大, Hopf 分岔产生的周期解振幅越小. 因此,适当选择 $k_{\rm n}$ 既可改变 Hopf 分岔的类型,还可改变 Hopf 分岔产生的周期解的振幅的大小.

图 2 给出了超临界 $k_n < k_{nc}$ 情况下 k_n 取不同值时受控系统的响应及相图. 可以发现分岔点前 $a < a_H$ (图 2(a)),平衡点稳定;分岔点后 $a > a_H$ (图 2(b)),有稳定极限环产生,且 k_n 取不同值极限环幅值也不相同,即利用控制器非线性项可控制分岔产生的周期解振幅的大小.

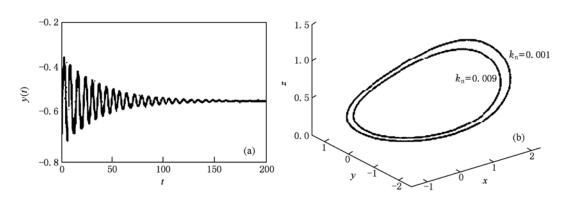


图 2 超临界分岔下受控系统响应及相图 (a) a = 0.5; (b) a = 0.6

图 3 给出了亚临界 $k_n > k_{nc}$ 情况下受控系统响应图. 图 3(a) 给出了分岔点前初值分别为 $(x_0, y_0,$

 z_0, v_0) = (0.1, -0.2,0.05, -0.03), (0.1, -2, 0.5, -0.3) 两种情况下的响应,分别收敛到平衡点

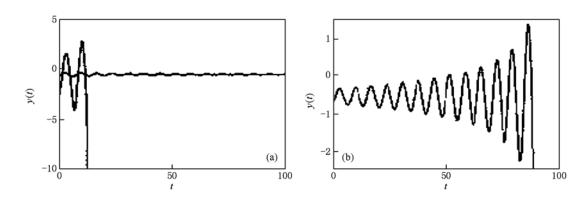


图 3 亚临界分岔下受控系统响应 (a) a = 0.5; (b) a = 0.6

和发散,表明不稳定极限环存在.图 3(b)给出分岔 点后系统响应,显然是发散的,即平衡点不稳定.

图 2 和图 3 给出的数值计算结果验证了本文所得结论的正确性.

5. 结 论

对施加 Washout 滤波器控制的 Rössler 系统进

行 Hopf 分岔分析,通过稳定性分析得到了受控系统 参数空间稳定域,并得出 Hopf 分岔边界,进而分析 得到了滤波器时间常数 c 与线性控制增益 k_1 对分岔点位置的影响,通过选取不同的 k_1 ,c 值可以使分岔点提前或者迟滞分岔的产生,甚至完全消除 Hopf 分

盆. 而非线性控制增益 k_n ,对 Hopf 分岔类型以及分 岔所产生周期解振幅的影响,可通过计算受控系统 Hopf 分岔的 Normal Form 系数加以解决. 本文所用 方法可用于一般的系统 Hopf 分岔控制研究.

- [1] Wu Z, Yu P 2006 IEEE Trans on Automatic Control 51 1019
- [2] Wang Y, Murray R M 2002 Automatica 38 611
- [3] Goman M G, Khramtsovsky A V 1998 Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 356 2277
- [4] Wang Q H, Zhou S X 2003 Proceeding of the CSEE **23** 18 (in Chinese) [王庆红、周双喜 2003 中国电机工程学报 **23** 18]
- [5] Venkatasubramanian V, Sebattler H, Zaborszky J 1995 IEEE

- Trans on Automatic Control 40 1992
- [6] Yu P, Chen G R 2004 International Journal of Bifurcation and Chaos 14 1683
- [7] Rössler O E 1976 Phys. Lett. A 35397
- [8] Chen L, Wang D S 2007 Acta Phys. Sin. **56** 5661 (in Chinese) [谌 龙、王德石 2007 物理学报 **56** 5661]
- [9] Wu Z Q 1996 *Ph. D. Thesis* (Tianjin University) (in Chinese) [吴志强 1996 博士学位论文(天津大学)]

Hopf bifurcation control of the Rössler system based on Washout filter controller

Wu Zhi-Qiang[†] Sun Li-Ming

(Department of Mechanics, School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China) (Received 25 July 2010; revised manuscript received 18 August 2010)

Abstract

The Washout filter is adopted to control Hopf bifurcation in Rössler system. The effect of its parameters on the position of bifurcation point, the bifurcation type, and the amplitude of periodic solution is discussed in detail. Based on Routh criterion, the stability region in parameter space is found out firstly. Then the influence of the filter's time constant and the linear gain on the location of bifurcation point is analyzed. By using the Direct Normal Form method, the normal form of the controlled Rössler system is deduced and the coefficient of resonant term is expressed as a function of the nonlinear gain. It is revealed that, by changing the sign and the absolute value of the real part of the coefficient, the nonlinear gain can modify the periodic solution's amplitude and Hopf bifurcation type. All the results obtained are verified by numerical simulation.

Keywords: Rössler system, Washout filter, Hopf bifurcation, Normal Form **PACS:** 05.45.-a, 02.30. Oz

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872142), the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-15-0247), the Key Project of Tianjin (Grant No. 09JCZDJ16800) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 2009003211005).

[†] E-mail: zhiqwu@ tju. edu. cn