

# 参数不定的旋转圆盘在有界扰动下混沌振动的滑模变结构控制\*

陈帝伊<sup>1)2)</sup> 申滔<sup>1)</sup> 马孝义<sup>1)†</sup>

1)(西北农林科技大学,水利与建筑工程学院电气系,杨凌 712100)

2)(西北农林科技大学,机械与电子工程学院,杨凌 712100)

(2010年6月4日收到;2010年8月16日收到修改稿)

为了消除具有不确定参数的旋转圆盘横向混沌振动,克服其对整个系统及工作状况的不利影响,假设作用在旋转圆盘上的集中力不确定且有界,并鉴于干扰的普遍存在性,对有界扰动下的旋转圆盘横向振动的四维非线性方程进行了复杂动力学特征分析,包括相轨迹图、Lyapunov 指数和庞加莱映射图,这些特征加深了对它的认识,同时也证明该四维动力系统含有混沌吸引子. 为了保证系统控制的鲁棒性,利用滑模变结构法,将旋转圆盘从混沌轨道先后控制到任意固定点和周期轨道,并用 MATLAB 模拟验证其有效性. 结果证明,用滑模变结构法能够使系统严格地跟踪参考轨道,且具有过渡时间短、过渡平稳,对干扰不敏感等诸多优点,同时也为相关混沌系统的混沌态的有效控制提供了借鉴.

**关键词:** 旋转圆盘,混沌,滑模变结构控制,有界扰动

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

## 1. 引言

旋转圆盘应用于诸多领域,如光盘资源、硬盘驱动和圆锯片等. 在外力和内部谐振的作用下,旋转圆盘的混沌振动行为将影响系统的性能<sup>[1]</sup>. 采用被动式的控制方法,改变物理机械性能可消除其混沌振动,例如圆盘的厚度,因为它会影响到自然频率和旋转速度<sup>[2]</sup>. 但考虑到对整个系统性能及工作状况的不利影响,这种控制方式通常未被采用.

混沌控制,研究的是在系统参数客观不可改变,或大的参数改变须付出极大代价时,保留原有参数条件或仅对参数进行微调,将混沌系统控制到周期轨道或平衡点. 典型的控制方法有 OGY 法、线性反馈控制方法、自适应控制方法、模糊控制方法、非线性反控制方法等<sup>[3-10]</sup>.

上述控制方法大都是针对不受外界扰动影响或参数固定的系统. 然而,扰动和参数的不确定性在现实中是普遍存在的,许多学者对这类系统的控

制也做过深入的研究<sup>[11-13]</sup>,鉴于此,本文根据变结构控制理论,设计滑模控制器实现了对旋转圆盘混沌振动的控制.

在文献[14]中,旋转圆盘横向振动的混沌行为得以提出和分析,文献[2]中作者为研究系统的可控性,引入新的状态变量,将系统改写为一个四维动力方程. 本文依据此四维动力学方程,分析其复杂动力学特征,而后利用滑模变结构法,能够控制处于混沌状态的旋转圆盘到任意点或周期轨道,从而消除系统的混沌现象.

## 2. 旋转圆盘方程

### 2.1. 旋转圆盘横向振动的动力系统

在文献[14]中,集中力作用下的旋转圆盘横向振动的动力系统如下:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x + \gamma(x^2 + y^2)x &= F \cos(\Omega t), \\ \ddot{y} + \omega^2 y + \gamma(x^2 + y^2)y &= F \sin(\Omega t),\end{aligned}\quad (1)$$

\* 国家自然科学基金(批准号:50879072),西北农林科技大学人才专项基金(批准号:RCZX-2009-01)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: iee307@163.com

其中,  $x$  和  $y$  是极坐标下的振幅函数,  $\omega, \Omega, \gamma$  和  $F$  均为大于零的连续参数,  $\omega$  和  $\Omega$  分别表征无量纲的自然频率和自旋频率,  $F$  表征作用于圆盘的集中力.

在文献[2]中, 作者为研究系统的可控性, 经过多次变换, 将(1)式改写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(\omega^2 - \Omega^2)x_1 - \gamma x_1(x_1^2 + x_3^2) \\ &\quad - 2\Omega x_4 + F, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -(\omega^2 - \Omega^2)x_3 - \gamma x_3(x_1^2 + x_3^2) \\ &\quad + 2\Omega x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

假设系统处于有界扰动下, 则(2)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1, \\ \dot{x}_2 &= -(\omega^2 - \Omega^2)x_1 - \gamma x_1(x_1^2 + x_3^2) \\ &\quad - 2\Omega x_4 + F + d_2, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + d_3, \\ \dot{x}_4 &= -(\omega^2 - \Omega^2)x_3 - \gamma x_3(x_1^2 + x_3^2) \end{aligned}$$

$$+ 2\Omega x_2 + d_4, \quad (3)$$

式中,  $\omega, \Omega$  和  $\gamma$  为固定参数, 集中力  $F$  为不定参数, 假设  $F$  有界, 即  $0 \leq F \leq \delta_1 < 4$ ,  $\delta_1$  为常数.  $d_1$  至  $d_4$  为外界扰动, 它们都是有界的, 即  $|d_i| \leq \delta_2 < 1$ ,  $\delta_2$  为常数, 在界值范围内扰动的取值是随机的, 本文以系统(3)作为研究的对象.

选取参数  $\omega = 1, \Omega = 0.8, \gamma = 1$ . 为不失一般性, 在满足  $0 \leq F \leq \delta_1 < 4$  的条件下, 取  $F = 3.5 |\sin(t)|$ . 在满足  $|d_i| \leq \delta_2 < 1$  的条件下, 扰动取下述值为例(取其他值亦可, 只要满足前述的条件):  $d_1 = 0.8 \sin(t), d_2 = 0.3, d_3 = 0.5 \cos(t), d_4 = 0.4$ . 则系统(3)的相图如图1所示.

由于四维空间不便于直接观察, 因此做出三维及平面映射图以观察系统的运动轨迹, 从图1的拓扑结构可以初步判断系统(3)具有混沌的复杂动力学特征.

### 2.2. 系统 Poincaré 映射图和 Lyapunov 指数图

Poincaré 映射是一种经典的分析动力系统的技

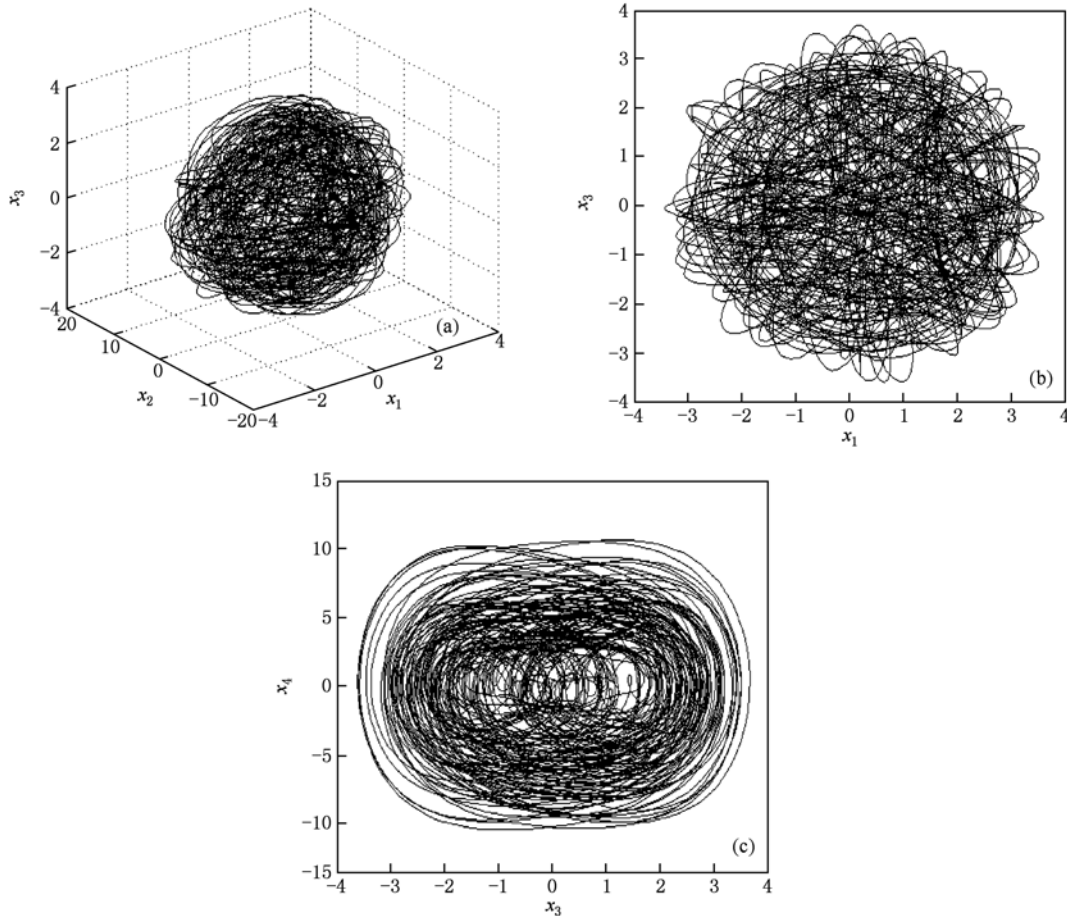


图1 系统的混沌吸引子相图 (a)  $x_1-x_2-x_3$ ; (b)  $x_1-x_3$ ; (c)  $x_3-x_4$

术,可以通过观察 Poincaré 截面上截点的情况判断是否发生混沌:当 Poincaré 截面上是一些成片的具有分形结构的密集点时,运动是混沌的,Poincaré 映射图有利于观察系统的动力学行为,通过观察 Poincaré 截面上点的情况,可以判断系统的运动情况.在平面  $x_3 = 0$  中,取 Poincaré 截面,得到系统的 Poincaré 映射图如图 2 所示.

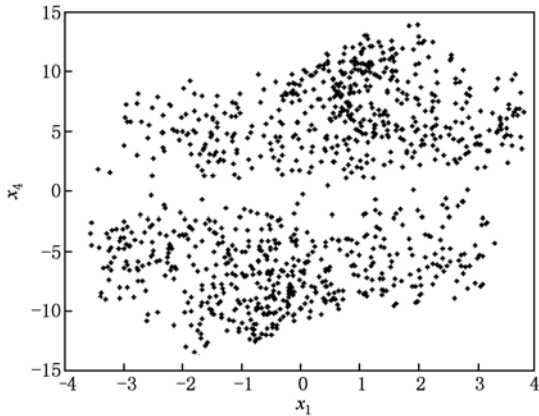


图 2 Poincaré 映射图

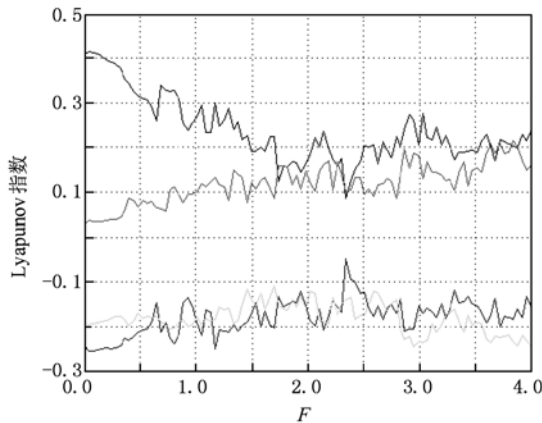


图 3 Lyapunov 指数谱

为了更直观的表现系统混沌运动状态,做出了随参数  $F$  变化的 Lyapunov 指数谱,如图 3 所示,系统的最大 Lyapunov 指数大于 0,即出现混沌运动状态.

### 3. 滑模变结构控制

#### 3.1. 控制器的设计

变结构控制理论的基本思想是:首先设计出一

个性质良好的滑模平面,使系统限制在滑模平面上时,具有所期望的性质;然后施加控制,使系统到达滑模面上,并保持在其上滑动.

因此,系统(3)的受控形式如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + d_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -(\omega^2 - \Omega^2)x_1 - \gamma x_1(x_1^2 + x_3^2) \\ &\quad - 2\Omega x_4 + F + d_2 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + d_3 + u_3, \\ \dot{x}_4 &= -(\omega^2 - \Omega^2)x_3 - \gamma x_3(x_1^2 + x_3^2) \\ &\quad + 2\Omega x_2 + d_4 + u_4, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $u_1, u_2, u_3$  和  $u_4$  为控制输入,加入合理的控制器可将圆盘横向振动的振幅及振幅变化的速率控制在所需的范围或固定值,以保证圆盘的正常运行况.定义矩阵

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega^2 - \Omega^2) & 0 & 0 & -2\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\Omega & -(\omega^2 - \Omega^2) & 0 \end{bmatrix}; \\ d &= \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ g &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma x_1(x_1^2 + x_3^2) \\ 0 \\ -\gamma x_3(x_1^2 + x_3^2) \end{bmatrix}; \\ \Delta f &= \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

其中,  $A$  为系统线性矩阵,  $d$  为有界扰动矩阵,  $B$  为控制矩阵,  $g$  为系统的非线性矩阵,  $\Delta f$  是不确定的参数矩阵.控制的目标是使系统状态  $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$  跟踪一个时变状态  $x_d = [x_{d1}, x_{d2}, x_{d3}, x_{d4}]^T$ . 为此,定义跟踪误差

$$e = x - x_d. \quad (5)$$

误差动力系统可写为

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_d = Ax + Bg + Bu + d + \Delta f - \dot{x}_d. \quad (6)$$

定义时变的比例积分滑模面  $S = S(e, t)$  为

$$S = Ke - \int_0^t K(A - BL)e(\tau) d\tau. \quad (7)$$

式中,附加矩阵  $K \in R^{4 \times 4}$  且满足  $\det(KB) \neq 0$ , 便于

计算取  $K = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ . 附加矩阵  $L \in R^{4 \times 4}$  且满足  $A - BL$  为负定矩阵. 在滑动模式下必须满足  $S = \dot{S} = 0$ .

$$\dot{S} = KBg + KBL e + KBu + Kd + K\Delta f + KAx_d - K\dot{x}_d. \quad (8)$$

为满足滑动条件, 设计控制策略如下:

$$u = +Le - (KB)^{-1} [KAx_d - K\dot{x}_d] - (KB)^{-1} [\varepsilon + \|KBg\|] \text{sign}(S), \quad (9)$$

式中  $\text{sign}(S)$  为符号函数, 即  $S > 0$  时  $\text{sign}(S) = 1$ ,  $S = 0$  时  $\text{sign}(S) = 0$ ,  $S < 0$  时  $\text{sign}(S) = -1$ .

**命题** 若  $\varepsilon$  为常数, 且满足  $\varepsilon > \delta_1 + \delta_2 + 1$ , 则控制器(9)可使系统(4)在有限时间内达到滑动模式  $S = 0$ , 状态变量与选取的参考状态  $x_d$  轨迹一致.

**证明** 构造 Lyapunov 函数  $V = S^T S = \sum_{i=1}^4 S_i^2$ ,

依据(7), (8)和(9)式, 可得

$$\begin{aligned} S^T \dot{S} &= S^T (KBg + KBL e + Kd + K\Delta f + KBu + KAx_d - K\dot{x}_d) \\ &= S^T [Kd + K\Delta f - (\varepsilon + \|KBg\| \text{sign}(S))] \\ &\leq S^T [d + \Delta f - \varepsilon \text{sign}(S)] \\ &\leq \sum_{i=1}^4 |S_i| \delta_1 + \sum_{i=1}^4 |S_i| \delta_2 - \sum_{i=1}^4 |S_i| \varepsilon \\ &= |\delta_1 + \delta_2 - \varepsilon| \sum_{i=1}^4 |S_i| < - \sum_{i=1}^4 |S_i|. \end{aligned}$$

同理可证:  $\dot{S}^T S < - \sum_{i=1}^4 |S_i|$ ,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{S}^T S + S^T \dot{S} \\ &< -2 \sum_{i=1}^4 |S_i|. \end{aligned}$$

命题得证.

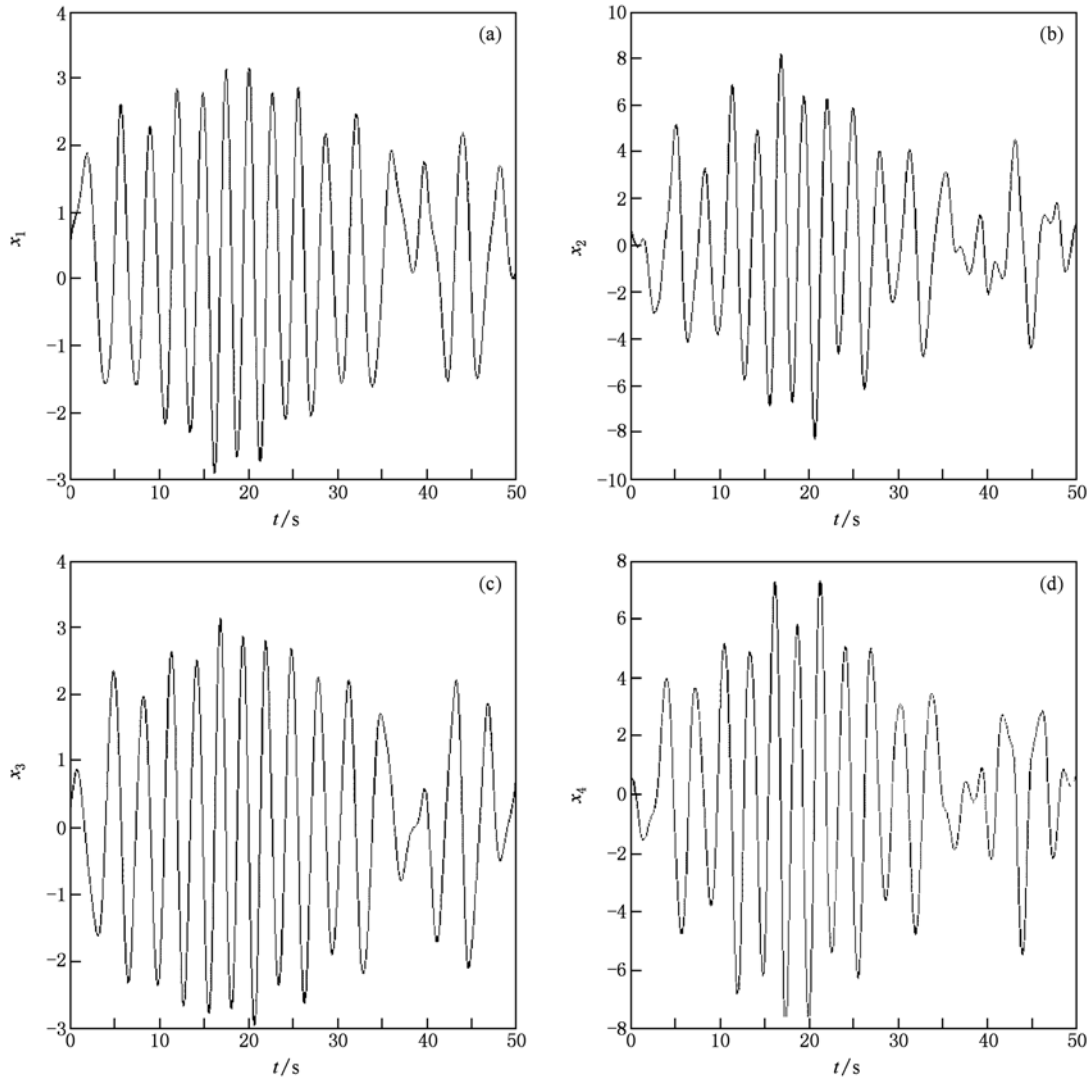


图4 受控前状态变量的时域图 (a)  $x_1$ ; (b)  $x_2$ ; (c)  $x_3$ ; (d)  $x_4$

由上述的证明过程可知,只要不确定参数以及扰动的界值确定,不论其具体取值如何,控制器(9)均能实现控制目标.

### 3.2. 数值模拟

受控前,即  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$  时,系统(4)状态变量的时域图如图4(a),(b),(c),(d)所示.

由图4可知,系统的运动状态具有非周期性.

为将系统(4)控制到目标态,选取  $A - BL$  的特征根为  $P = [-5, -5, -5, -5]$ ,采用极点配置法确定矩阵

$$L = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ -(\omega^2 - \Omega^2) & 5 & 0 & -2\Omega \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2\Omega & -(\omega^2 - \Omega^2) & 5 \end{bmatrix}.$$

选取比例积分滑模面如下:

$$S_1 = e_1 + \int_0^t 5e_1(\tau) d\tau,$$

$$S_2 = e_2 + \int_0^t 5e_2(\tau) d\tau,$$

$$S_3 = e_3 + \int_0^t 5e_3(\tau) d\tau,$$

$$S_4 = e_4 + \int_0^t 5e_4(\tau) d\tau. \quad (10)$$

设置系统初始值  $[x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)] = [0.5, 0.8, 0.2, 0.4]$ ,参照状态  $x_{d1} = x_{d2} = x_{d3} = x_{d4} = x_d$ . 则控制信号如下:

$$u_1 = -(5e_1 + e_2) - (x_d - \dot{x}_d) - \varepsilon \text{sign}(S_1),$$

$$u_2 = -[-\gamma x_1(x_1^2 + x_3^2) - (\omega^2 - \Omega^2)e_1 + 5e_2 - 2\Omega e_4] - [- (\omega^2 - \Omega^2 + 2\Omega)x_d - \dot{x}_d] - [\varepsilon + |-\gamma x_1(x_1^2 + x_3^2)|] \text{sign}(S_2),$$

$$u_3 = -(5e_3 + e_4) - (x_d - \dot{x}_d) - \varepsilon \text{sign}(S_3),$$

$$u_4 = -[2\Omega e_2 - (\omega^2 - \Omega^2)e_3 + 5e_4 - \gamma x_3(x_1^2 + x_3^2)] - [(2\Omega - \omega^2 + \Omega^2)x_d - \dot{x}_d] - [\varepsilon + |-\gamma x_3(x_1^2 + x_3^2)|] \text{sign}(S_4).$$

### 3.3. 控制到固定点

此控制方法能够控制系统(4)稳定到任意一点,为了不失一般性,本文取固定点  $[0.5, 0.5, 0.5,$

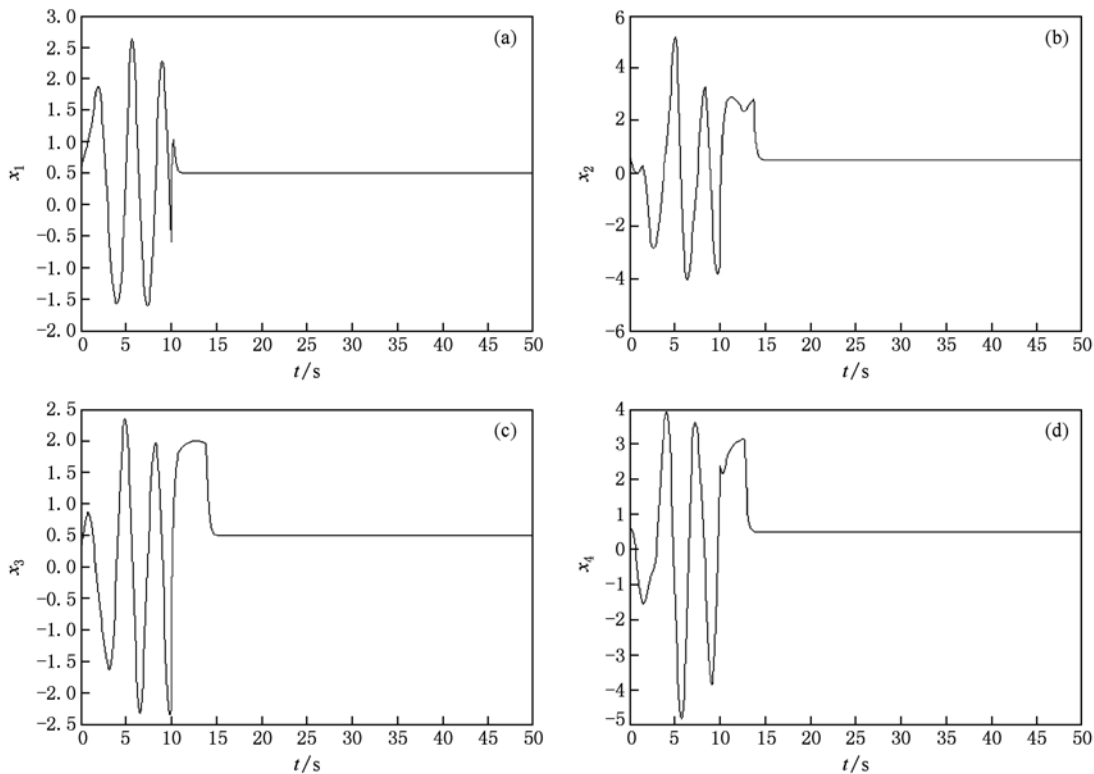


图5 受控后状态变量的时域图 (a)  $x_1$ ; (b)  $x_2$ ; (c)  $x_3$ ; (d)  $x_4$

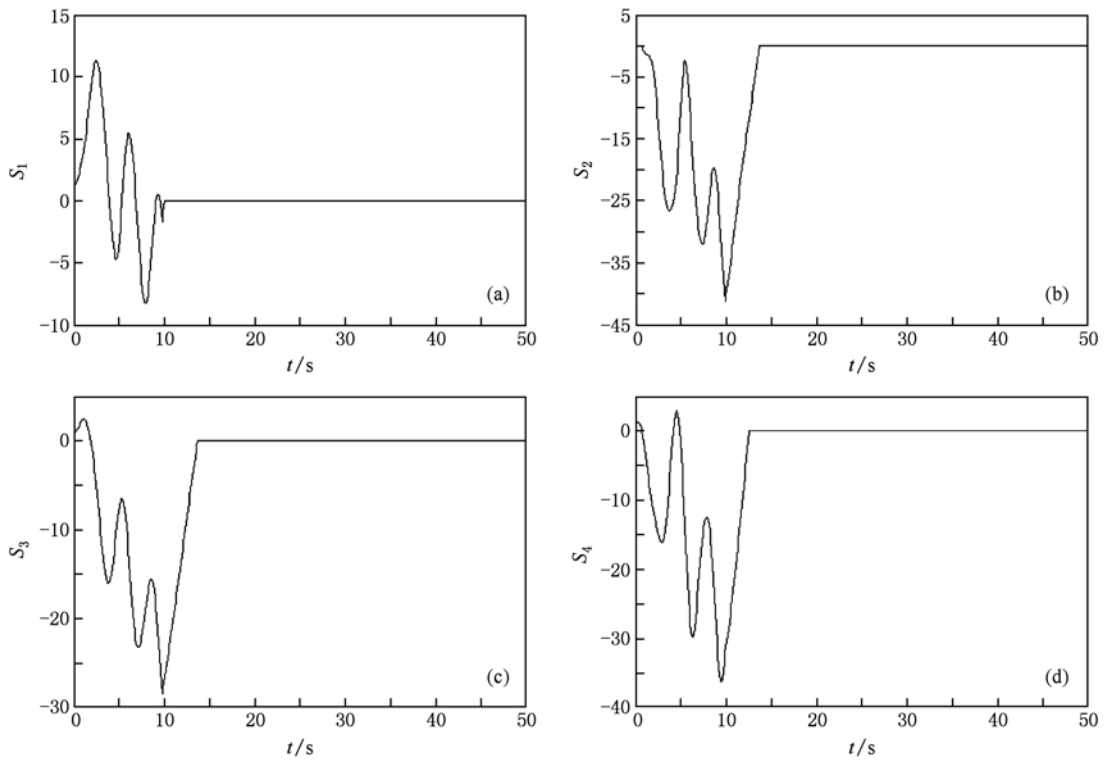


图6 受控后滑模面的时域图 (a)  $S_1$ ; (b)  $S_2$ ; (c)  $S_3$ ; (d)  $S_4$

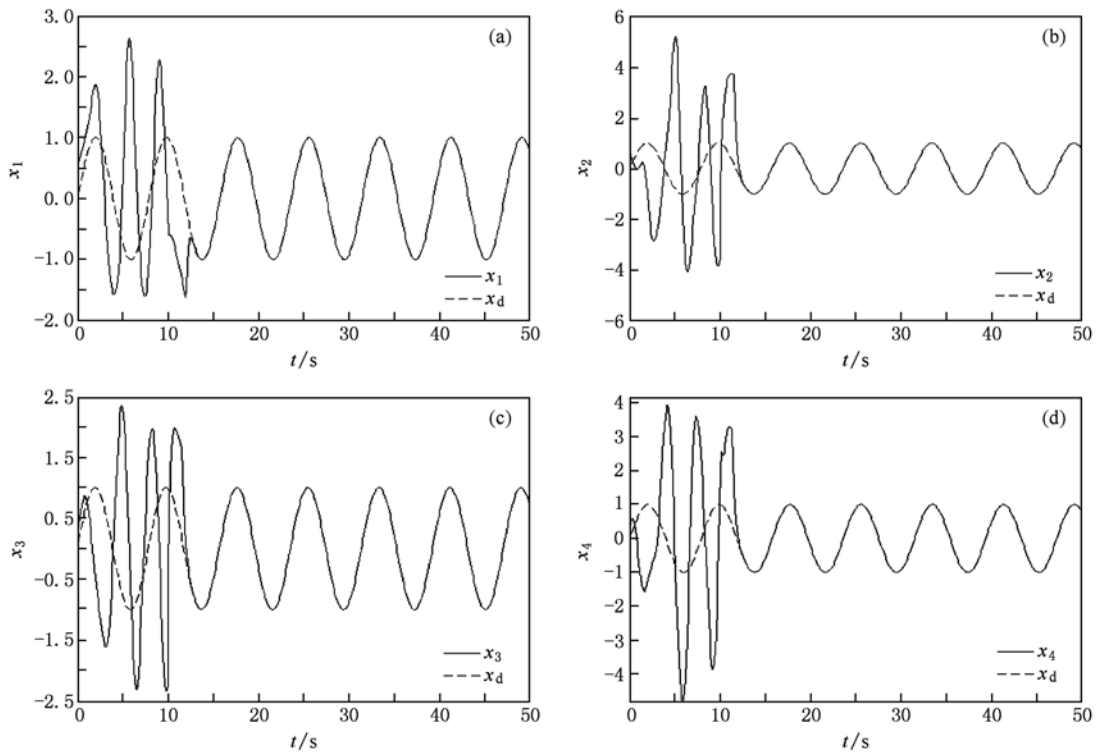


图7 受控后状态变量的时域图 (a)  $x_1$ ; (b)  $x_2$ ; (c)  $x_3$ ; (d)  $x_4$

0.5], 此时, 选取  $x_d = 0.5$ , 在 10 s 时加入控制器, 得系统状态变量、滑模面及控制器的时域图分别如图 5 和图 6 所示, 此时参数值依次为  $\omega = 1, \Omega = 0.8, \gamma = 1, F = 3.5 |\sin(t)|, \varepsilon = 7$ .

由图 5 和图 6 可知, 加入控制器后, 系统 (4) 最终跟踪至参照状态  $[0.5, 0.5, 0.5, 0.5]$ , 滑模面  $S$  变为 0, 证明系统达到滑动模态.

### 3.4. 控制到周期轨道

此控制方法能够控制系统 (4) 稳定到任意周期轨道, 为了不失一般性, 此处取  $\sin(\Omega t)$  为例, 则令  $x_d = \sin(\Omega t)$ , 在 10s 时加入控制器, 得系统状态变量图形如图 7, 其中参数  $\omega, \Omega, \gamma, F$  和  $\varepsilon$  的取值不变.

由图 7 可知, 加入控制器后, 系统 (4) 最终跟踪参照状态  $x_d$  至周期轨道.

## 4. 结 论

混沌态对于大多数系统是有利的, 选取合适的参数并设计合理的控制器, 消除不希望出现的混沌态, 使系统稳定运行. 鉴于外界扰动及参数的不确定性是普遍存在的, 为保证系统控制的鲁棒性, 本文基于所选取的比例积分滑模平面, 推导出相应的控制策略使旋转圆盘的横向振动系统到达滑动模态, 实现控制目标, 控制过程具有以下优点:

1. 控制的过渡时间较短.
2. 控制过渡过程较为平稳. 控制增益的合理选取使本文实例中没有明显过冲和振荡出现.
3. 在有限时间内严格到达目标轨道.
4. 对外界干扰不敏感, 且能适用于含有不确定参数的系统.

- 
- [1] Raman A, Mote Jr C D 2002 *International Journal of Nonlinear Mechanics* **37** 35
- [2] Hassan Salarieh, Hoda Sadeghian, Kaveh Merat 2009 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **10** 2864
- [3] Aline Souza de Paula, Marcelo Amorim Savi 2009 *Chaos, Solitons & Fractals* **40** 1376
- [4] Wang X F, Xue H J, Si S K, Yao Y T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3729 (in Chinese) [王校锋、薛红军、司守奎、姚跃亭 2009 物理学报 **58** 3729]
- [5] Wei D Q, Zhang B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1399
- [6] Lin, Li J F, Liu Y P, Ma J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1404 (in Chinese) [李 农、李建芬、刘宇平、马 健 2008 物理学报 **57** 1404]
- [7] Li W L, Song Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 51 (in Chinese) [李文林、宋运忠 2008 物理学报 **57** 51]
- [8] Günyaz Ablay 2009 *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems* **3** 531
- [9] Zhang X H, Li D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1774
- [10] Wang C C, Pai N S, Yau H T 2010 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **15** 741
- [11] Lu J, Lü J, XIE J, Chen G 2003 *Computers & Mathematics with Applications* **46** 1427
- [12] Zhou J, Chen Z 2008 *Phys. Lett. A* **372** 5394
- [13] Cheng C K, Kuo H H, Hou Y Y, Hwang C C, Liao T L 2008 *Physica A* **387** 3093
- [14] Jalali M A, Angoshtari A 2006 *International Journal of Nonlinear Mechanics* **41** 726

# Sliding mode control of chaotic vibrations of spinning disks with uncertain parameter under bounded disturbance<sup>\*</sup>

Chen Di-Yi<sup>1)2)</sup> Shen Tao<sup>1)</sup> Ma Xiao-Yi<sup>1)†</sup>

1) (*Electric Department of College of Water Resources and Architectural Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, China*)

2) (*College of Mechanical and Electric Engineering, Northwest A&F University, Yangling 712100, China*)

(Received 4 June 2010; revised manuscript received 16 August 2010)

## Abstract

In order to eliminate lateral oscillation of spinning disk with uncertain parameter and dispel their adverse effect on the system performance or the working conditions of the system, supposing that the point force acting on the spinning disk is uncertain and bounded, the chaotic complex dynamic characteristics of the four-dimensional nonlinear equations in lateral oscillations of spinning disk under bounded disturbance were analyzed in view of the ubiquity of disturbance, including the space trajectory, the Lyapunov exponent and the Poincaré map. These characteristics enable us to know them deeply, and indicate that the four-dimensional dynamical system contains chaotic attractor. To ensure the robustness of the system control, the author stabilized the chaotic orbits to arbitrary chosen fixed points and periodic orbits by means of sliding mode method, and MATLAB simulations were presented to confirm the validity of the controller. The results show that using sliding mode method can make the system track target orbit strictly and smoothly with short transition time, and its insensitivity to noise disturbance is shown. It provides reference for relevant chaos control in mechanical system.

**Keywords:** disk, chaos, sliding mode control, bounded disturbance

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Cg, 05.45.Pq

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50879072), the Talent Special Fund of Northwest A&F University (Grant No. RCZX-2009-01).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: ieee307@163.com