

一类参数未知混沌系统的追踪控制与参数辨识

李农^{1)†} 李建芬²⁾ 刘宇平¹⁾

1) (空军工程大学工程学院, 西安 710038)

2) (空军工程大学理学院, 西安 710051)

(2010年5月29日收到; 2010年8月22日收到修改稿)

针对一类参数未知的混沌系统, 提出一种追踪控制方法, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了追踪控制器和参数自适应控制律, 实现了混沌系统的追踪控制和未知参数的辨识. 以统一混沌系统为例进行了数值模拟, 结果表明了该方法的有效性.

关键词: 混沌系统, 追踪控制, 参数辨识

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Mt

1. 引言

混沌控制与同步是混沌研究的重要领域, 已取得了大量的研究成果^[1-12]. 在混沌控制研究中, 追踪控制能够使受控混沌系统的输出信号追踪任意给定的参考信号, 如果该参考信号来自其他混沌系统的输出信号, 即实现所谓的混沌异结构同步. 近年来, 相继报道了许多有关混沌系统追踪控制的研究成果^[13-16], 文献[13]通过设计合适的非线性反馈控制器, 使复杂 Dynamos 混沌系统的状态向量追踪给定的不同参考信号, 实现混沌系统的广义投影同步; 文献[14]利用单输入非线性控制器, 实现了 Chen 混沌系统的自适应追踪控制; 文献[15]基于分数阶系统的稳定性理论, 设计线性反馈控制器, 实现了分数阶超混沌 Lü 系统的全部状态向量与任意参考信号的追踪控制. 然而, 上述方法, 其控制器设计仅针对具体的混沌系统, 不具有普适性. 文献[16]仅适用一类参数确定的混沌系统.

本文针对一类参数未知的不确定混沌系统, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了自适应追踪控制器和未知参数的更新规则, 实现了参数未知混沌系统的追踪控制与未知参数的辨识, 并给出了理论证明. 以统一混沌系统为例, 数值模拟了该系统对给定参考信号的追踪控制和未知系统参数的辨识, 当参考信号为 Rössler 系统的混沌信号时, 实现了

Rössler 系统与参数未知的统一混沌系统之间的异结构混沌同步.

2. 追踪控制方案设计

考虑如下形式的混沌系统:

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \alpha_{ij}) = h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

其中 $i=1, 2, \dots, n$, α_{ij} 为系统未知的定常参数, m_i 为第 i 个方程中参数的个数, $h_i(\cdot)$ 和 $g_{ij}(\cdot)$ 是光滑函数.

假设函数 $f_i(\cdot)$ 满足 Lipchitz 条件, 即存在一个正数 L , 使

$$|f_i(x_1, \alpha_{ij}) - f_i(x_2, \alpha_{ij})| \leq L |x_1 - x_2|$$

成立. 在(1)式中加入控制器后得到受控系统

$$\dot{x}_i = h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}) + u_i(t), \quad (2)$$

本文的目的是当系统(2)的参数 α_{ij} 为未知时, 如何设计控制器 $\mathbf{u}(t) = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, 使系统(2)追踪任意给定的信号 $\mathbf{r}(t) = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T$, 即满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{r}\| = \mathbf{0}$.

定义受控系统(2)与任意给定参考信号 $\mathbf{r}(t)$ 的追踪同步误差为

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= [x_1 - r_1, x_2 - r_2, \dots, x_n - r_n]^T \\ &= [e_1(t), e_2(t), \dots, e_n(t)]^T, \end{aligned}$$

参数误差 $\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha'_{ij}$. 其中 α'_{ij} 为 α_{ij} 的估计值, 参

† E-mail: ln2807@163.com

考信号 $r_i(t)$ 连续可微. 本文设计的控制器为

$$u_i = -h_i(\mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}) + \dot{r}_i(t) - k(x_i - r_i) \\ = -f_i(\mathbf{r}, \alpha') + \dot{r}_i(t) - k(x_i - r_i), \quad (3)$$

$k > 0$ 为反馈系数. 由(2)式和(3)式, 可得误差系统如下:

$$\dot{e}_i = h_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{r}) \\ - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}) - k(x_i - r_i) \\ = h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{x}) \\ - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}) + \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}) \\ - \sum_{j=1}^{m_i} \alpha'_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}) - ke_i \\ = f_i(\mathbf{x}, \alpha_i) - f_i(\mathbf{r}, \alpha_i) - ke_i + \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i^2 + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij}^2 \right) \geq 0,$$

其中 $\mu > 0$ 常数. 对上式求导, 可得

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n e_i \dot{e}_i + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) \\ = \sum_{i=1}^n [e_i [f_i(\mathbf{x}, \alpha_i) - f_i(\mathbf{r}, \alpha_i) - ke_i \\ + \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} g_{ij}(\mathbf{r})]] \\ + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) \right).$$

当满足

$$\sum_{i=1}^n \left(e_i \cdot \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij} g_{ij}(\mathbf{r}) \right) \\ + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m_i} (\varepsilon_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) \right) = 0, \quad (5)$$

有

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^n e_i [f_i(\mathbf{x}, \alpha_{ij}) - f_i(\mathbf{r}, \alpha_{ij}) - ke_i] \\ = \mathbf{e}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})] - \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e},$$

其中 $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$, \mathbf{I} 为单位矩阵. 根据范数不等式, 有

$$\sum_{i=1}^n e_i [f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{r})] = \mathbf{e}^T [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})]$$

$$\leq \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})\|.$$

则

$$\dot{V}(t) \leq \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})\| - \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e} \\ = \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})\| - k \mathbf{e}^T \mathbf{e} \\ = \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})\| - k \|\mathbf{e}\|^2 \\ = [\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{r})\| - k \|\mathbf{e}\|] \|\mathbf{e}\|.$$

函数 $\mathbf{f}(\cdot)$ 满足 Lipchitz 条件, 有

$$V(t) \leq (L - k) \|\mathbf{e}\|^2.$$

当 $\|\mathbf{e}\| = 0$, 有 $\dot{V}(t) = 0$; 若选择合适的 k , 使 $k > L$, 则有 $\dot{V}(t) < 0$, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统(4) 在 origin 渐近稳定, 即在满足条件(5) 的情况下, 系统可以追踪任意给定的参考信号.

由(5)式, 得

$$e_1 g_{1j}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mu} \dot{\varepsilon}_{1j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_1, \\ e_2 g_{2j}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mu} \dot{\varepsilon}_{2j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_2, \\ \dots \dots \\ e_n g_{nj}(\mathbf{r}) + \frac{1}{\mu} \dot{\varepsilon}_{nj} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_n.$$

由于 $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} - \dot{\alpha}'_{ij} = -\dot{\alpha}'_{ij}$, 可得系统未知参数的更新规则为

$$\dot{\alpha}_{ij} = \mu e_i g_{ij}(\mathbf{r}), \\ (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m_i). \quad (6)$$

下面讨论不确定参数的可辨识性, 即系统(2) 在追踪过程中, 应满足什么条件才能对不确定参数进行估计和辨识, 使其收敛到真实值.

由文献[17]可知, 假设系统(2) 中不确定参数的系数向量 $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \{g_{ij}(\mathbf{x})\}$, ($i = 1, 2, 3, \dots, n, j = 1, 2, 3, \dots, m$, m 是系统参数的个数) 若要保证系统的不确定参数收敛到真实值, 须满足的条件是: 对 $t > 0$, 若存在正常数 δ, β , 使下式成立:

$$\int_t^{t+\delta} \mathbf{G}^T(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) d\tau \geq \beta \mathbf{I}. \quad (7)$$

则系统的不确定参数可以被辨识出来, 这里 $\mathbf{G}^T(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) \in R^{m \times m}$. (7) 式的左式被称为 Gram 矩阵^[17]. 由于直接证明(7) 式比较困难, 实际应用时可通过计算 Gram 矩阵的秩间接判断, 若其满秩, 则可判定系统的不确定参数可以收敛到真实值.

3. 数值模拟

统一混沌系统^[18] 是 2002 年 Lü 等提出的一种

新的混沌系统,其数学表达式如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (25a + 10)(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= (28 - 35a)x_1 - x_1x_3 + (29a - 1)x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1x_2 - (8 + a)x_3/3, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $a \in [0, 1]$ 为系统参数,当 a 由零逐渐增加到 1 时,系统由广义的 Lorenz 系统逐渐过渡到广义的 Chen 系统.

系统(8)与受控系统(2)比较可得,系统的不确定参数 α_{ij} 为 $\alpha_{11} = 25a + 10$, $\alpha_{21} = 28 - 35a$, $\alpha_{22} = 29a - 1$, $\alpha_{31} = (8 + a)/3$; 参数个数为 4, 其系数向量是

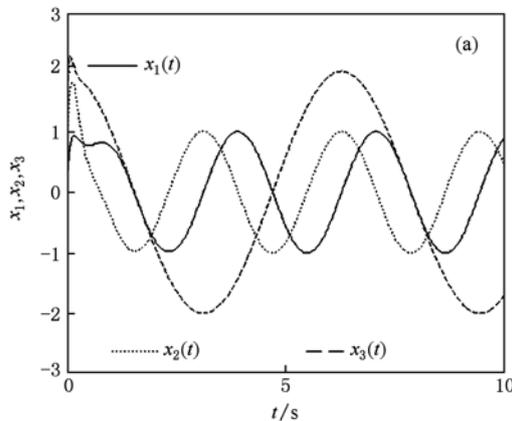
$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \{g_{ij}(\mathbf{x})\} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_3 \end{bmatrix},$$

Gram 矩阵为

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+\delta} \mathbf{G}^T(\mathbf{x}(t)) \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)) d\tau \\ &= \int_t^{t+\delta} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1^2 & x_2x_1 & 0 \\ 0 & x_2x_1 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{bmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

由上式可见,当 $x_1 \neq x_2$, x_1, x_2, x_3 均不为零,且 x_1/x_2 不恒为常数时, Gram 矩阵是满秩的. 比较(3)式,追踪控制器为

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha'_{11}(r_2 - r_1) + \dot{r}_1 - k(x_1 - r_1), \\ u_2 &= -(\alpha'_{21}r_1 - r_1r_3 + \alpha'_{22}r_2) + \dot{r}_2 - k(x_2 - r_2), \\ u_3 &= -(r_1r_2 - \alpha'_{31}r_3) + \dot{r}_3 - k(x_3 - r_3). \end{aligned} \quad (9)$$



参数更新规则为

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}'_{11} &= \mu e_1(r_2 - r_1), \\ \dot{\alpha}'_{21} &= \mu e_2 r_1, \alpha'_{22} = \mu e_2 r_2, \\ \dot{\alpha}'_{31} &= -\mu e_3 r_3. \end{aligned} \quad (10)$$

选取状态变量的初值为 $x_1(0) = 0.1$, $x_2(0) = -0.02$, $x_3(0) = 0.3$, 未知参数 $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{31}$ 的估计值的初值取为 $\alpha'_{11}(0) = 1, \alpha'_{21}(0) = 1, \alpha'_{22}(0) = 1, \alpha'_{31}(0) = 1$, 选取系统参数 $a = 0.5, k = 30, \mu = 100$.

3.1. 统一混沌系统追踪三维参考信号

设参考信号 $\mathbf{r} = (\sin 2t, \cos 2t, 2\cos t)$, 则控制器

$$\begin{aligned} u_1 &= -\alpha'_{11}(\cos 2t - \sin 2t) + 2\cos 2t \\ &\quad - k(x_1 - \sin 2t), \\ u_2 &= -(\alpha'_{21}\sin 2t - \sin 2t \cdot 2\cos t + \alpha'_{22}\cos 2t) \\ &\quad - 2\sin 2t - k(x_2 - \cos 2t), \\ u_3 &= -(\sin 2t \cdot \cos 2t - \alpha'_{31} \cdot 2\cos t) \\ &\quad - 2\sin t - k(x_3 - 2\cos t). \end{aligned}$$

参数更新规则为

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}'_{11} &= \mu e_1(\cos 2t - \sin 2t), \\ \dot{\alpha}'_{21} &= \mu e_2 \sin 2t, \alpha'_{22} = \mu e_2 \cos 2t, \\ \dot{\alpha}'_{31} &= -\mu e_3 \cdot 2\cos t. \end{aligned}$$

模拟结果如图 1 和图 2 所示.

3.2. 统一混沌系统与 Rössler 系统的异结构追踪控制

Rössler 系统状态方程描述如下:

$$\dot{z}_1 = -(z_2 + z_3),$$

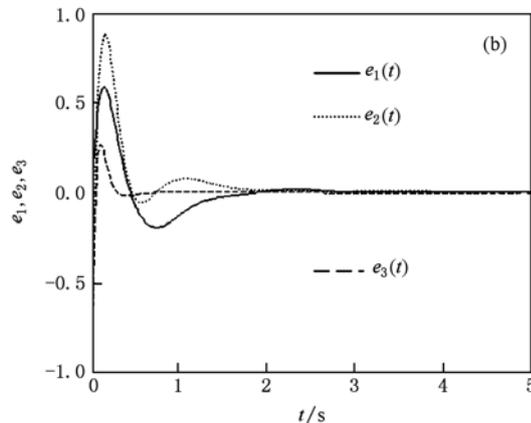


图 1 系统(8)追踪三维正弦信号的时域波形 (a) $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ 的时域波形; (b) 状态变量与参考信号之间的误差波形

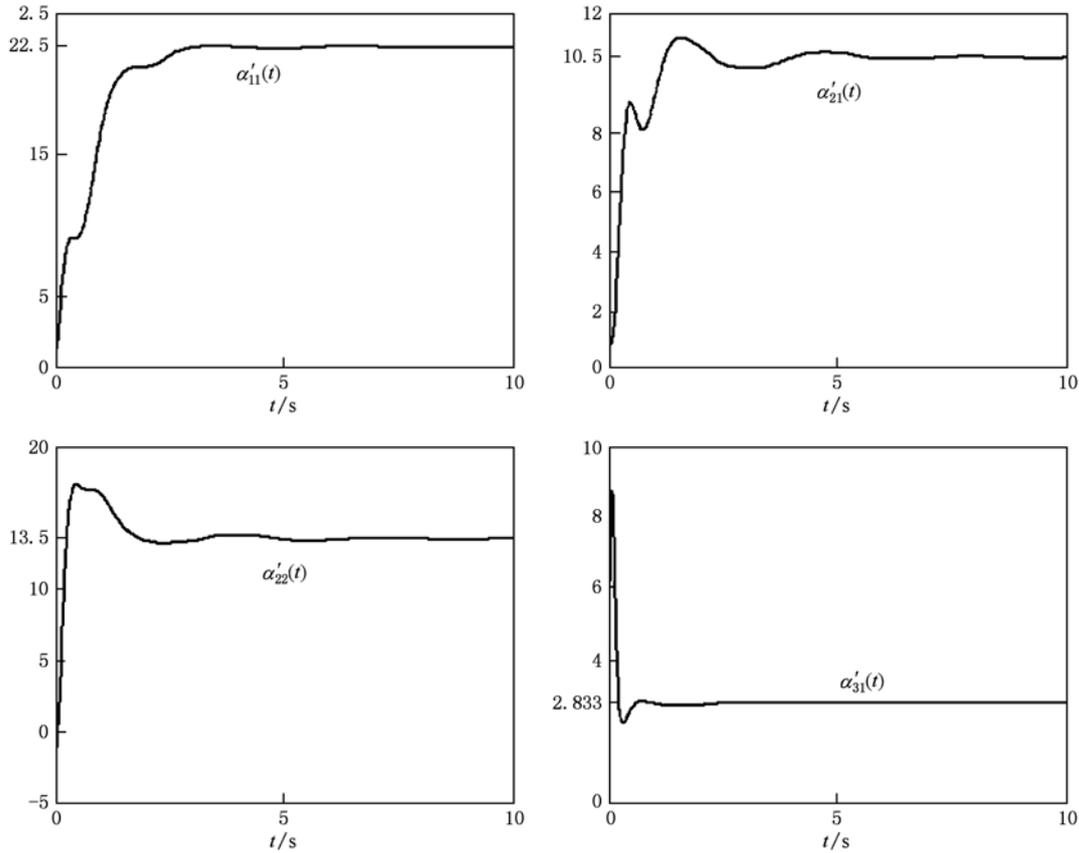


图2 系统(8)追踪三维正弦信号时,未知参数 α'_{11} , α'_{21} , α'_{22} 和 α'_{31} 的辨识过程

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= z_1 + az_2, \\ \dot{z}_3 &= b + z_3(z_1 - c), \end{aligned}$$

式中, a, b, c 为系统参数. 当 $a = 0.34, b = 0.34, c = 4.5$ 时, 系统处于混沌态. 取参考信号 $[r_1, r_2, r_3] = [z_1, z_2, z_3]$, 初始值分别选取为: $\mathbf{x}(0) = [0.1 \ -0.02 \ 0.3]$, $\mathbf{z}(0) = [0 \ 0.1 \ 0]$, 选取初始参数 $[\alpha'_{11}(0), \alpha'_{21}(0), \alpha'_{22}(0), \alpha'_{31}(0)] = [15 \ 1 \ 1 \ 1]$, 模拟结果如图3和图4所示.

由图1—图4可见: 随着 t 的增加, 系统(8)所有状态变量都能够迅速地追踪到给定的状态, 其误差曲线很快趋近于零, 同时, 在追踪过程中, 由自适应律(10)式确定的参数更新规则使控制器(9)中的未知参数估计值 $\alpha'_{11}, \alpha'_{21}, \alpha'_{22}$ 和 α'_{31} 逐渐趋于参数真实值. 可见, 利用(9)和(10)式能够实现混沌系统的追踪控制并同时辨识出系统的未知参数.

4. 讨论

由 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ 描述的混沌系统, 许多都具有多项式的函数形式, 一般均可通过单向耦合实现混沌自

同步, 而本文提出的追逐控制方法是基于单向耦合的同步原理, 因此这一类系统均可应用该方法追踪任意给定的连续有界的信号. 对于系统函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 为非多项式的混沌系统, 由于函数本身自变量定义域的限制, 使其追踪的参考信号的幅值只能在系统变量的定义域内. 如 QCNN 混沌系统^[19], 其状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -2w_{01} \sqrt{1 - y_1^2} \sin y_2, \\ \dot{y}_2 &= -w_{03}(y_1 - y_3) + 2w_{01} \frac{y_1}{\sqrt{1 - y_1^2}} \cos y_2, \\ \dot{y}_3 &= -2w_{02} \sqrt{1 - y_3^2} \sin y_4, \\ \dot{y}_4 &= -w_{04}(y_3 - y_1) + 2w_{02} \frac{y_3}{\sqrt{1 - y_3^2}} \cos y_4, \end{aligned}$$

其中 $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为系统的状态变量, $w_{01} - w_{04}$ 是系统参数. 当 $w_{01} = 19.4, w_{02} = 13.1, w_{03} = 9.529, w_{04} = 7.94$ 时, 系统的混沌相图如图5所示.

显然, 系统变量的定义域为 $y_1, y_3 \in (-1, 1)$, 由(2)式和(3)式可知, 相应的要求参考信号 $\mathbf{r}(t)$ 的变化范围为 $r_1, r_3 \in (-1, 1)$.

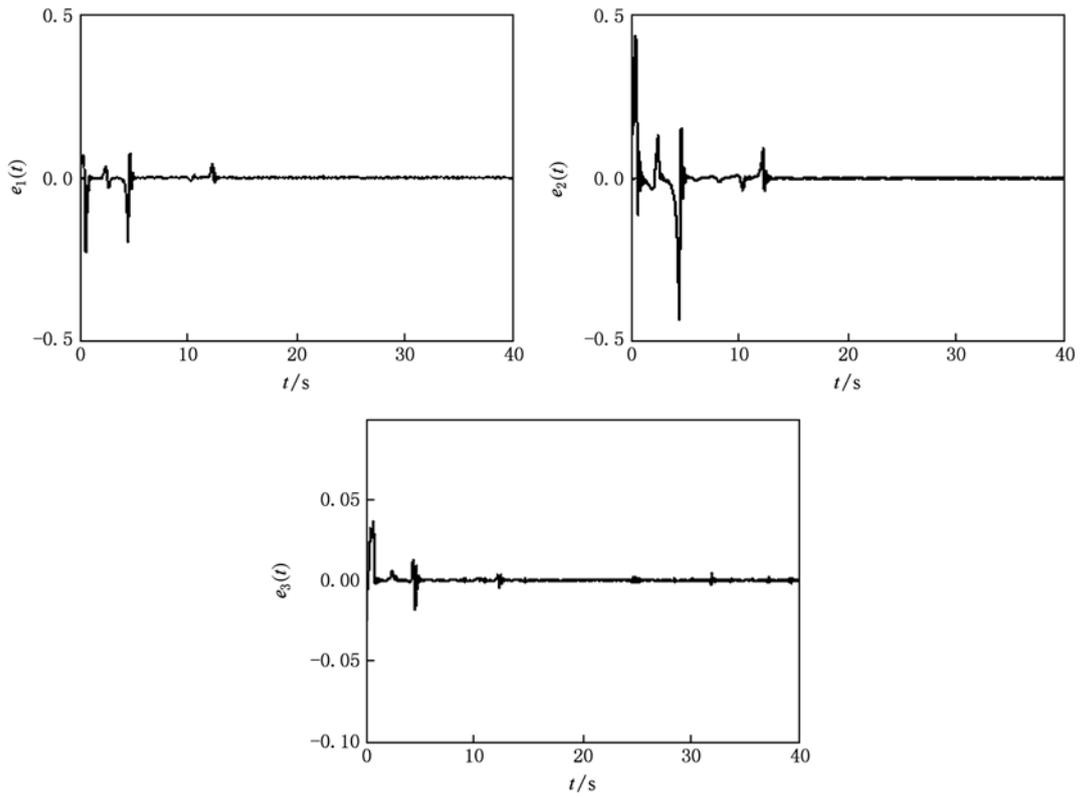


图3 系统(8)追踪 Rössler 系统的误差波形

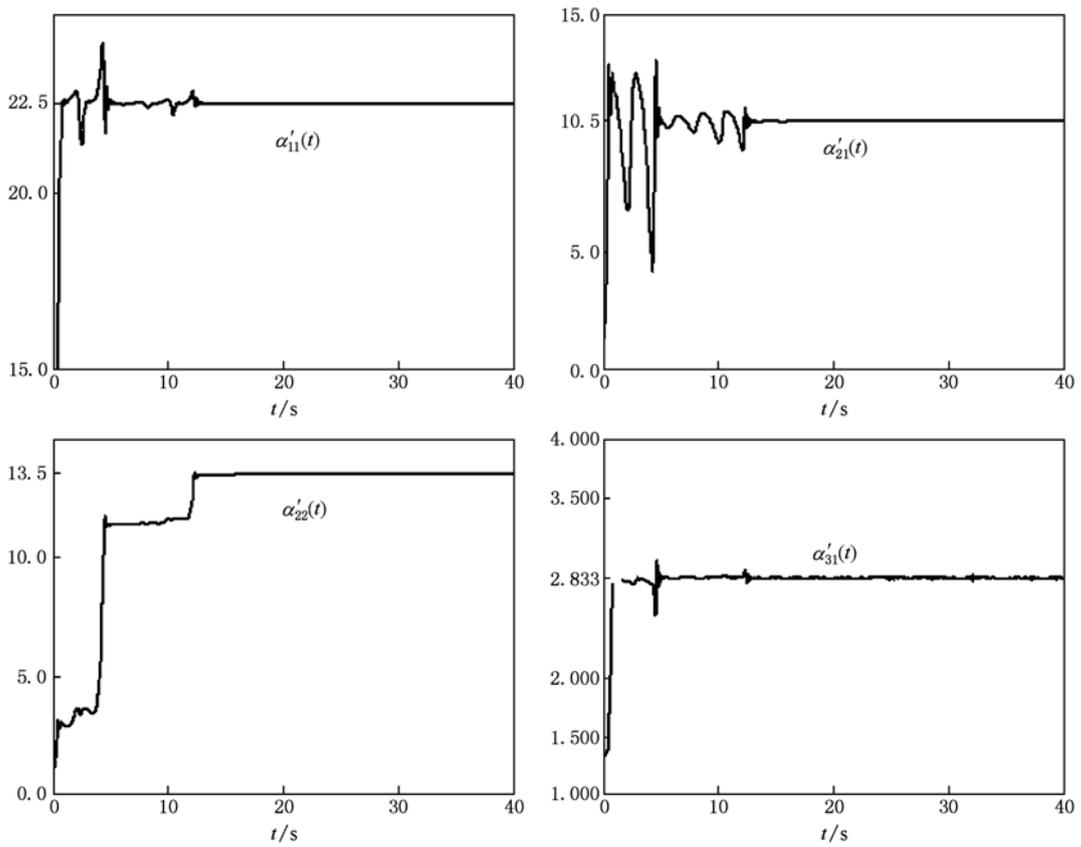


图4 系统(8)未知参数 α'_{11} , α'_{21} , α'_{22} 和 α'_{31} 的辨识过程

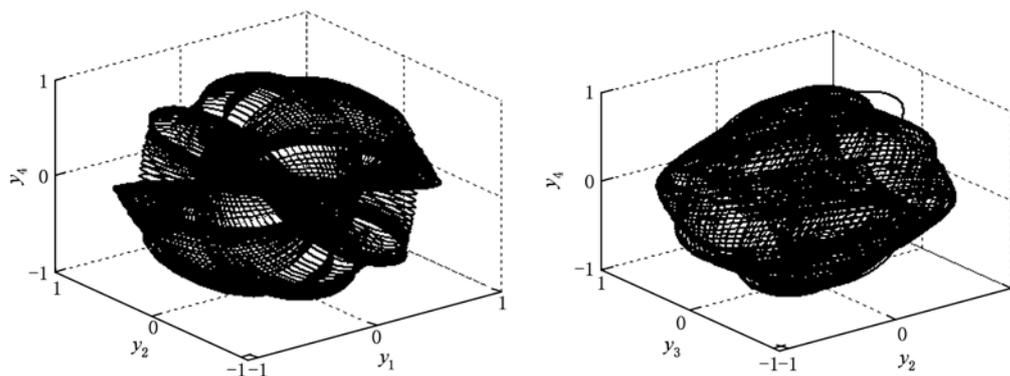


图5 QCNN 系统的混沌吸引子相图

在追踪控制过程中,是否可辨识出混沌系统不确定参数的真实值,还需通过不确定参数的 Gram 矩阵是否满秩来间接地进行判别。

5. 结 论

通过设计合适的追踪控制器和未知参数的自

适应更新规则,实现了一类参数未知混沌系统的自适应追踪控制和参数辨识,由于控制器设计具有普适性,本方法通用性强,适用范围宽。实例的数值仿真,验证了自适应追踪控制器和参数更新规则的有效性。

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Chen H. K 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 1245
- [3] Chen M, Han Z 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **17** 709
- [4] Elabbasy E M, Agiza H N, Dessoky M M, 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 657
- [5] Han X, Lu J A, Wu X 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 221
- [6] Li J F, Lin H, Li N 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3992 (in Chinese) [李建芬、林辉、李农 2006 物理学报 **55** 3992]
- [7] Feng J W, Xu C, Tang J L 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 1413
- [8] Li N, Li J F, Liu Y P, Ma J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1404 (in Chinese) [李农、李建芬、刘宇平、马健 2008 物理学报 **57** 1404]
- [9] Li N, Li J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6093 (in Chinese) [李农、李建芬 2008 物理学报 **57** 6093]
- [10] Ma J, Wang Q Y, Jin W Y, Xia Y F 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 3582
- [11] Ghosh D 2009 *Chaos* **19** 013102
- [12] Li J F, Li N, Liu Y P, Gan Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 779 (in Chinese) [李建芬、李农、刘宇平、甘轶 2009 物理学报 **58** 779]
- [13] Min F H, Wang Z Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 31 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2008 物理学报 **57** 31]
- [14] Chen L, Wang D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5662 (in Chinese) [谌龙、王德石 2007 物理学报 **56** 5662]
- [15] Min F H, Yu Y, Ge C J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1456 (in Chinese) [闵富红、余杨、葛曹君 2009 物理学报 **58** 1456]
- [16] Luo X H, Li H Q, Chen Q H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7532 (in Chinese) [罗小华、李华青、陈秋华 2009 物理学报 **58** 7532]
- [17] Sun F, Peng H P, Luo Q, Li L X, Yang Y X 2009 *Chaos* **19** 023109
- [18] Lü J H, Chen G R, Zhang S C 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 1001
- [19] Yang X K, Cai L, Zhao X H, Feng C W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3740 (in Chinese) [杨晓阔、蔡理、赵晓辉、冯朝文 2010 物理学报 **59** 3740]

Tracking control and parameters identification of a class of chaotic systems with unknown parameters

Li Nong^{1)†} Li Jian-Fen²⁾ Liu Yu Ping¹⁾

1) (*The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*)

2) (*The Science Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

(Received 29 May 2010; revised manuscript received 22 August 2010)

Abstract

A tracking control method is proposed for a class of chaotic systems with unknown parameters. The controller and recognizing rules of unknown parameters are designed based on Lyapunov stability theory. The method is illustrated by applications to unified chaotic systems and the simulation results showed the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: chaotic system, tracking control, parameters identification

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Mt

† E-mail: ln2807@163.com