

基于改进的主动控制法实现混沌系统广义投影同步*

李震波[†] 赵小山 王靖

(天津职业技术师范大学理学院, 天津 300222)

(2010年6月12日收到; 2010年7月23日收到修改稿)

通过引进特殊矩阵构造并基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出了一种改进的主动控制法来实现混沌系统的广义投影同步. 改进后的主动控制不依赖于罗斯-霍维兹判据, 与未改进的主动控制相比, 简化了相关运算步骤和复杂度. 通过对混沌能源系统和 Nuclear Spin Generator 系统的研究, 并与其他同步方法进行比较, 说明了该方法具有简单, 直观, 稳健, 高效等优点, 且对混沌系统的自结构和异结构广义投影同步均适用. 数值模拟的结果进一步表明了该方法的有效性和理论分析的正确性.

关键词: 改进的主动控制, 广义投影同步, 特殊矩阵构造

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq

1. 引言

自 1990 年 Pecora 和 Carroll 实现混沌同步以来^[1], 由于混沌同步在保密通讯、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景, 十几年来它一直是研究非线性科学的热点课题之一, 并且取得了大量的研究成果. 针对混沌系统的同步现象研究可以分为以下几个方面: 混沌系统完全同步、混沌系统相同步、混沌系统耦合同步、混沌系统滞后同步、混沌系统广义同步等^[2-16]. 1999 年, Mainieri 和 Rehacek 实现了一个三维混沌系统的投影同步^[17], 早期投影同步要求系统是部分线性的, 而且比例因子与初始条件有关, 以至于投影同步具有不可预测性. 之后, 文献^[18]用 Lyapunov 函数的方法预测了该比例因子, 但它们都要求同步的两个系统对某些变量具有线性, 并且驱动系统的结构要与响应系统的结构保持一致, 这无疑使得投影同步的发展受到了限制. 近年来, 出现了一种新的投影同步——广义投影同步, 该同步将投影同步与广义同步结合起来^[19], 不仅突破了系统必须部分线性的限制, 而且突破了驱动系统必须与响应系统保持结构一致的限制, 实现了非部分线性系统的广义投影同步以及

不同系统之间的异结构广义投影同步^[20,21]. 如果广义投影同步的比例因子 $\alpha > 0$ 时, 驱动系统与响应系统出现同相位的广义投影同步; 如果比例因子 $\alpha < 0$ 时, 驱动系统与响应系统出现反相位的广义投影同步. 当比例因子 $\alpha = 1$ 时, 两个混沌系统完全同步; 当比例因子 $\alpha = -1$ 时, 两个混沌系统关于原点成对称的反相位同步, 它们都是广义投影同步的特例. 通过改变广义投影同步的比例因子, 可以使驱动系统相图实现同相位或反相位的任意比例“压缩”和“拉伸”, 即可以获得任意比例于原始驱动系统的输出信号, 该性质在数字信号保密通信中具有很好的应用前景.

本文在已有研究成果的基础上, 通过引进特殊矩阵构造^[22]并基于 Lyapunov 稳定性理论, 提出了一种改进的主动控制法, 与未改进的主动控制相比^[23], 该方法不依赖于罗斯-霍维兹判据, 简化了相关运算步骤和复杂度. 并利用该方法实现了混沌能源系统^[24]的自结构广义投影同步以及该能源系统与 Nuclear Spin Generator (NSG) 系统^[25]之间的异结构广义投影同步. 通过与其他方法进行比较研究, 说明了该方法具有简单直观, 稳健高效等优点, 从而该方法有着较广的适用范围. 数值模拟的结果进一步表明了该同步控制器的有效性和理论分析的

* 国家自然科学基金(批准号:70871098, 10802061), 天津市自然科学基金(批准号:08JCYBJC12100), 天津市高校科技发展基金(批准号:20070403)资助的课题.

[†] E-mail: lizhenbo@sohu.com

正确性.

2. 广义投影同步与改进的主动控制

考虑由以下模型描述的混沌系统:

$$\dot{x}_m = Ax_m + Bf(x_m), \quad (1)$$

其中, 状态变量 $x_m = (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})$, 非线性函数 $f: R^n \rightarrow R^n$, A 和 B 为常数矩阵, 下标 m 表示将该系统视为驱动系统. 考虑由以下模型描述的响应系统:

$$\dot{x}_s = Cx_s + Dg(x_s) + U, \quad (2)$$

其中, 响应状态变量 $x_s = (x_{1s}, x_{2s}, \dots, x_{ns})$, 非线性函数 $g: R^n \rightarrow R^n$, C 和 D 为常数矩阵, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 为待定的广义投影同步控制器. 下标 s 表示将该系统视为响应系统. 很多知名的混沌系统都满足系统(1)和(2)的形式, 例如超混沌 Rössler 系统, 蔡氏混沌电路, 超混沌 Chen 系统, 广义 Lorenz 系统等等. 若 $A = C, B = D$ 以及 $f(x) = g(x)$, 则系统(1)和系统(2)之间的同步称为自结构的, 否则称为异结构的.

令误差向量 $e = x_m - \alpha x_s$, 其中 α 为投影比例因子, 将系统(1)减去系统(2)得到误差系统为

$$\dot{e} = Ee + Kh(x_m, x_s, \alpha) - \alpha U, \quad (3)$$

其中 $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ 为误差向量, E 和 K 为常数矩阵, $h: R^n \rightarrow R^n$ 是系统(3)的非线性部分. 下面介绍广义投影同步的定义.

定义 1 如果存在一个控制器 U , 使得当时间 t 趋于无穷时, 从任意初值 $(x_m(0), x_s(0))$ 出发的轨道 $(x_m(t), x_s(t))$ 趋于流形 $M = \{x_m(t), x_s(t) : x_m(t) = \alpha x_s(t)\}$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m(t) - \alpha x_s(t)\| = 0$. 则称系统(1)和系统(2)关于投影矩阵 $\Lambda = \alpha I_{n \times n}$ (α 为非零常数, I 是单位矩阵) 全局广义投影同步^[26].

由定义 1 知, 要实现系统(1)和系统(2)的广义投影同步, 只需寻找合适的控制器 U 使得误差系统(3)在原点处渐进稳定即可. 控制器 U 的选取有多种方法, 本文提出的改进的主动控制则按下述方法设计同步控制器.

令系统(1)和(2)的广义投影同步控制器为

$$\begin{aligned} U &= U_a + U_b, \\ U_a &= \alpha^{-1} M e, \\ U_b &= \alpha^{-1} K h(x_m, x_s, \alpha), \end{aligned} \quad (4)$$

其中, α 为投影比例因子, M 为待定的常数矩阵.

将控制器(4)代入到系统(3), 得到新的误差系统

$$\dot{e} = (E - M)e. \quad (5)$$

为了使系统(5)在原点处渐进稳定, 我们先介绍如下两个引理.

引理 1 如果对于动力学方程 $\dot{x} = f(x)$ 存在一个 Lyapunov 函数 $V(x)$, 其全导数 $\dot{V}(x)$ 是负定的, 则方程的定点是渐进稳定的^[27].

引理 2 如果动力学系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 a_{11} & k_1 a_{12} & \cdots & k_1 a_{1n} \\ k_2 a_{21} & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ k_n a_{n1} & & & k_n a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (6)$$

满足以下条件:

- 1) $\forall a_{ij} \in R$,
- 2) $a_{ij} = -a_{ji} (i \neq j)$,
- 3) $a_{ii} \leq 0$ 且不全为零,
- 4) $\forall k_i > 0$,

则方程(6)的定点是渐进稳定的^[22].

证明 构造系统(6)的 Lyapunov 函数为

$$V = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \left(\frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \dots, \frac{x_n}{k_n} \right)^T, \quad (7)$$

对 V 关于时间 t 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \left(\frac{\dot{x}_1}{k_1}, \frac{\dot{x}_2}{k_2}, \dots, \frac{\dot{x}_n}{k_n} \right)^T \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_i \cdot x_j \right) = 2 \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} x_i^2 \leq 0. \end{aligned}$$

显然, 当且仅当 $x_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, 上式等号成立. 由引理 1 得, 方程(6)的定点是渐进稳定的.

定理 1 若存在常数矩阵 M , 使得矩阵 $E - M$ 满足引理 2 中所述条件, 则称系统(1)和系统(2)在控制器(4)下实现全局广义投影同步.

证明 若矩阵 $E - M$ 满足引理 2 中所述条件, 则方程(5)的定点是渐进稳定的, 又方程(5)为线性系统, 原点即为定点, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$. 且 $e = x_m - \alpha x_s$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m - \alpha x_s\| = 0.$$

根据定义 1, 系统(1)和(2)实现全局广义投影同步.

备注 1 由定理 1 知, 系统(1)和(2)的广义投影同步问题转化为如何确定矩阵 M 的问题. 引理 1 和引理 2 为矩阵 M 的确定提供了理论依据和实现

途径,根据引理 2,可以很直观的选取矩阵 M 使得矩阵 $E - M$ 满足上述定理. 因此该方法是可行的.

备注 2 在一般主动控制法中,矩阵 M 的选取依赖于罗斯-霍维兹判据,即寻找合适的矩阵 M , 使得矩阵 $E - M$ 的所有特征值具有负实部,当系统维数较高时,其计算是相对复杂的. 通过引进引理 2 并基于 Lyapunov 稳定性理论,改进后的主动控制不依赖于罗斯-霍维兹判据,在保证方法稳健性的同时,简化了运算的复杂度,且具有简单直观,易于实现等优点. 因而该改进具有一定的参考价值.

以上引理、定理及相关证明,从理论上证明了该方法的可行性. 接下来通过对混沌能源系统和 NSG 系统的研究并借助数值模拟,来说明该方法的有效性.

3. 混沌能源系统的自结构广义投影同步

3.1. 问题描述

在文献[24]中,作者以江苏省能源需求与西部能源供给及江苏能源进口量之间相互支持、相互制约的复杂关系为背景,建立了一个能源需求-供给的非线性动力学模型(以下简称能源系统). 随后,关于该系统的混沌控制和完全同步研究相继出现^[28,29],然而该系统的广义投影同步研究却少有报道,本节将研究该系统的自结构广义投影同步,该系统可用如下方程描述并以该方程为驱动系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= a_1 x_m [1 - x_m/M] - a_2 (y_m + z_m), \\ \dot{y}_m &= -b_1 y_m - b_2 z_m + b_3 x_m [N - (x_m - z_m)], \\ \dot{z}_m &= c_1 z_m (c_2 x_m - c_3). \end{aligned} \quad (8)$$

当参数取 $a_1 = 0.09$, $a_2 = 0.15$, $b_1 = 0.06$, $b_2 = 0.082$, $b_3 = 0.07$, $c_1 = 0.2$, $c_2 = 0.5$, $c_3 = 0.4$, $M = 1.8$, $N = 1$, 初值条件为 $(0.82, 0.29, 0.48)$ 时,可得到图 1 所示的混沌吸引子. 各参数具体的实际解释详见文献[24].

考虑以下系统作为响应系统时的广义投影同步:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= a_1 x_s [1 - x_s/M] - a_2 (y_s + z_s) + u_1, \\ \dot{y}_s &= -b_1 y_s - b_2 z_s + b_3 x_s [N - (x_s - z_s)] + u_2, \\ \dot{z}_s &= c_1 z_s (c_2 x_s - c_3) + u_3, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 u_1, u_2, u_3 是待定的控制器. 令

$$e_1 = x_m - \alpha x_s,$$

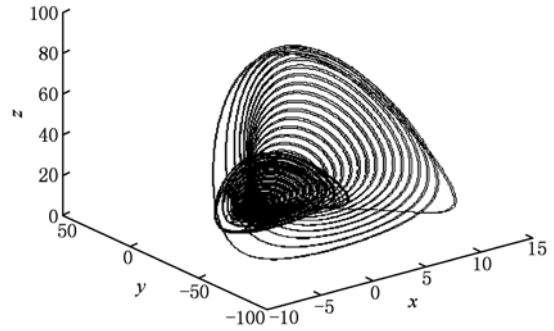


图 1 能源系统(8)的三维相图

$$e_2 = y_m - \alpha y_s,$$

$$e_3 = z_m - \alpha z_s$$

其中 α 是比例因子. 由系统(8)减去系统(9)即可得到同步误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_2 \\ b_3 N & -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & -c_1 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 x_m^2/M + a_1 \alpha x_s^2/M \\ -b_3 x_m^2 + b_3 \alpha x_s^2 + b_3 x_m z_m - b_3 \alpha x_s z_s \\ c_1 c_2 x_m z_m - c_1 c_2 \alpha x_s z_s \end{bmatrix} \\ &- \alpha U. \end{aligned} \quad (10)$$

要实现系统(8)和(9)的广义投影同步,只需找到相应的控制器 U , 使得系统(10)满足定理 1 即可.

3.2. 确定自结构同步控制器

根据(4)式,设控制器为

$$U = U_a + U_b,$$

$$U_a = \alpha^{-1} Q e,$$

$$U_b = \alpha^{-1} K h(x_m, x_s, \alpha), \quad (11)$$

其中, Q 为待定的常数矩阵,

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h(x_m, x_s, \alpha) = \begin{bmatrix} -a_1 x_m^2/M + a_1 \alpha x_s^2/M \\ -b_3 x_m^2 + b_3 \alpha x_s^2 + b_3 x_m z_m - b_3 \alpha x_s z_s \\ c_1 c_2 x_m z_m - c_1 c_2 \alpha x_s z_s \end{bmatrix}.$$

令

$$E = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_2 \\ b_3 N & -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 & -c_1 c_2 \end{bmatrix},$$

将该控制器代入系统(10),得

$$\dot{e} = (E - Q)e. \quad (12)$$

根据引理 2,可取

$$Q = \begin{bmatrix} k_1 \frac{a_1 + 1}{k_1} & k_1 \left(\frac{-a_1}{k_1} + \frac{b_3 N}{k_2} \right) & k_1 \frac{-a_2}{k_1} \\ 0 & k_2 \left(\frac{-b_1 + 1}{k_2} \right) & k_2 \frac{-b_2}{k_2} \\ 0 & 0 & k_3 \frac{-c_1 c_3 + 1}{k_3} \end{bmatrix},$$

将 Q 代入系统(12),得新误差系统

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} k_1 \frac{-1}{k_1} & k_1 \frac{-b_3 N}{k_2} & 0 \\ k_2 \frac{b_3 N}{k_2} & k_2 \frac{-1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \frac{-1}{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

取 $k_1 = 1, k_2 = 5, k_3 = 10$, 则系统(13)满足定理 1, 因此系统(8)和(9)在控制器(11)下实现了自结构广义投影同步.

3.3. 数值模拟

取系统(8)和(9)的参数为 $a_1 = 0.09, a_2 = 0.15, b_1 = 0.06, b_2 = 0.082, b_3 = 0.07, c_1 = 0.2, c_2 = 0.5, c_3 = 0.4, M = 1.8, N = 1$, 驱动系统初值条件为 $(0.82, 0.29, 0.48)$, 响应系统初值条件为 $(-0.22, -2.11, 4.23)$. 当投影比例因子分别为 $\alpha = -2$ 和 $\alpha = 3$ 时,图 2(a)和图 3(a)为同步误差的变化曲线,由图可见误差变量最终都趋于零,系统(8)和(9)在相应比例因子下实现自结构广义投影同步,图 2(b)和图 3(b)描述了两系统同步后三维相图成比例的情况.

观察图 2 和图 3 可知,当 α 取负值时,系统呈反相位同步,当 α 取正值时,系统呈现同相位同步. 本节中 $|\alpha|$ 均大于 1, 因此响应系统的相图为驱动系统在相空间的同相位或异相位压缩,当 $|\alpha|$ 取值小于 1 时,可以实现对驱动系统的拉伸,这一特性将在 4.3 节呈现.

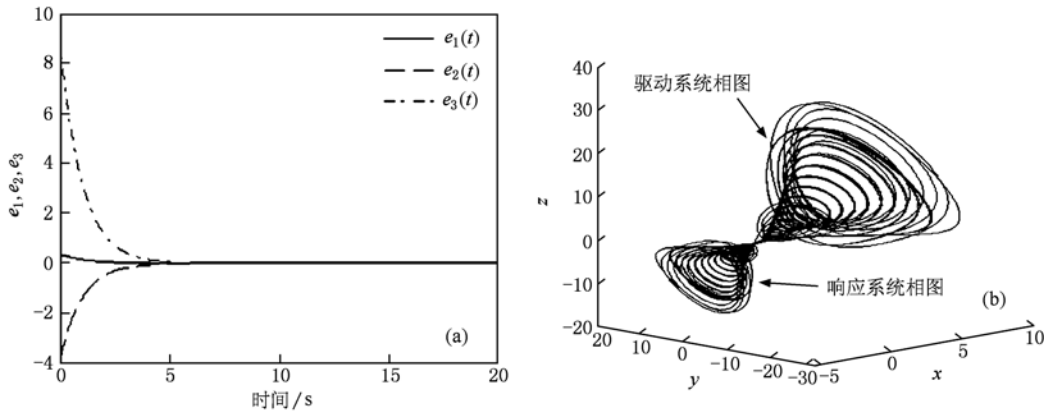


图 2 (a) 比例因子 $\alpha = -2$ 时的同步误差曲线; (b) 比例因子 $\alpha = -2$ 时驱动系统与响应系统的三维广义投影同步相图

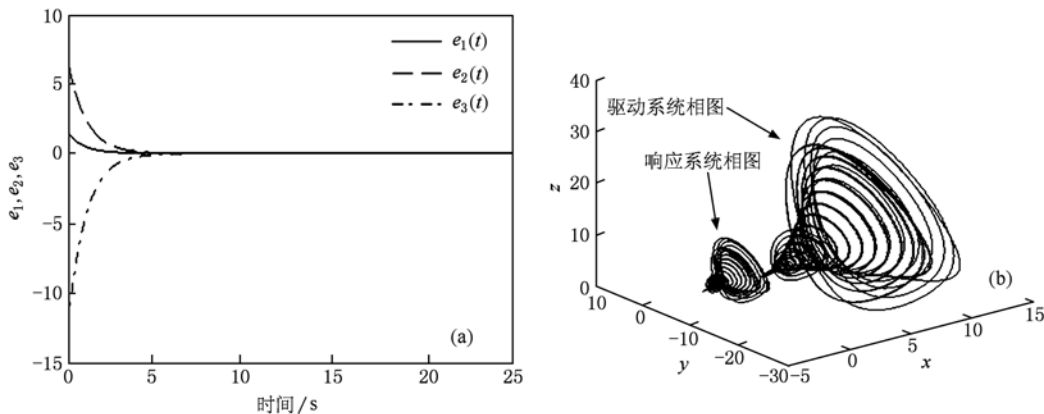


图 3 (a) 比例因子 $\alpha = 3$ 时的同步误差曲线; (b) 比例因子 $\alpha = 3$ 时驱动系统与响应系统的三维广义投影同步相图

4. 混沌能源系统与 NSG 系统的异结构广义投影同步

4.1. 问题描述

本节将研究系统(8)与 NSG 系统之间的异结构广义投影同步. 仍然以系统(8)为驱动系统, 以 NSG 系统作为响应系统并用以下方程描述^[25]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= -a_3x_s + y_s + u_1, \\ \dot{y}_s &= -x_s - a_3y_s(1 - b_4z_s) + u_2, \\ \dot{z}_s &= c_4a_3(1 - z_s) - a_3b_4y_s^2 + u_3, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 u_1, u_2, u_3 是待定的控制器. 令

$$\begin{aligned} e_1 &= x_m - \alpha x_s, \\ e_2 &= y_m - \alpha y_s, \\ e_3 &= z_m - \alpha z_s \end{aligned}$$

其中 α 是比例因子. 由系统(8)减去系统(14)即可得到同步误差系统

$$\begin{aligned} e &= \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} (a_1 + a_3)\alpha x_s - (a_2 + 1)y_m - a_1x_m^2/M - a_2z_m \\ (a_3 - b_1)y_m + (b_3N + 1)x_m - b_2z_m - b_3x_m^2 + b_3x_mz_m - a_3b_4\alpha y_s z_s \\ (c_4a_3 - c_1c_3)z_m + c_1c_2x_mz_m - c_4a_3\alpha + a_3b_4\alpha y_s^2 \end{bmatrix} - \alpha U. \end{aligned} \quad (15)$$

找到相应的控制器 U , 使得系统(15)满足定理 1, 即可实现系统(8)和(14)的广义投影同步.

4.2. 确定异结构同步控制器

根据(4)式, 设控制器为

$$\begin{aligned} U &= U_a + U_b, \\ U_a &= \alpha^{-1}Re, \\ U_b &= \alpha^{-1}Kh(x_m, x_s, \alpha), \end{aligned} \quad (16)$$

其中, R 为待定的常数矩阵,

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ h(x_m, x_s, \alpha) &= \begin{bmatrix} (a_1 + a_3)\alpha x_s - (a_2 + 1)y_m - a_1x_m^2/M - a_2z_m \\ (a_3 - b_1)y_m + (b_3N + 1)x_m - b_2z_m - b_3x_m^2 + b_3x_mz_m - a_3b_4\alpha y_s z_s \\ (c_4a_3 - c_1c_3)z_m + c_1c_2x_mz_m - c_4a_3\alpha + a_3b_4\alpha y_s^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

令

$$E = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ -1 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4a_3 \end{bmatrix},$$

将该控制器代入系统(15), 得

$$\dot{e} = (E - R)e. \quad (17)$$

根据引理 2, 可取 R 为

$$R = \begin{bmatrix} k_1(\frac{a_1 + 1}{k_1}) & k_1(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}) & 0 \\ 0 & k_2(\frac{-a_3 + 1}{k_2}) & 0 \\ 0 & 0 & k_3(\frac{-c_4a_3 + 1}{k_3}) \end{bmatrix},$$

将 R 代入系统(17)得新误差系统为

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} k_1 \frac{-1}{k_1} & k_1 \frac{1}{k_2} & 0 \\ k_2 \frac{-1}{k_2} & k_2 \frac{-1}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \frac{-1}{k_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

取 $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 5$, 则系统(18)满足定理 1, 因此系统(8)和(14)在控制器(16)下实现了异结构广义投影同步.

4.3. 数值模拟

取系统(8)和(14)的参数为 $a_1 = 0.09, a_2 =$

$0.15, a_3 = 0.75, b_1 = 0.06, b_2 = 0.082, b_3 = 0.07, b_4 = 10.5, c_1 = 0.2, c_2 = 0.5, c_3 = 0.4, c_4 = 0.15, M = 1.8, N = 1$, 驱动系统初值条件为 $(0.82, 0.29, 0.48)$, 响应系统初值条件为 $(0.5, 0.5, -0.5)$, 当投影比例因子分别为 $\alpha = -0.5$ 和 $\alpha = 0.4$ 时, 图 4(a) 和图 5(a) 为同步误差的变化曲线, 由图可见误差变量最终都趋于零, 系统(8)和(14)在相应比例因子下实现异结构广义投影同步, 图 4(b) 和图 5(b) 描述了两系统同步后三维相图成比例的情况.

观察图 4 和图 5 可知, 当比例因子 $-1 < \alpha < 0$ 时, 响应系统相图为驱动系统相图的反相位拉伸;

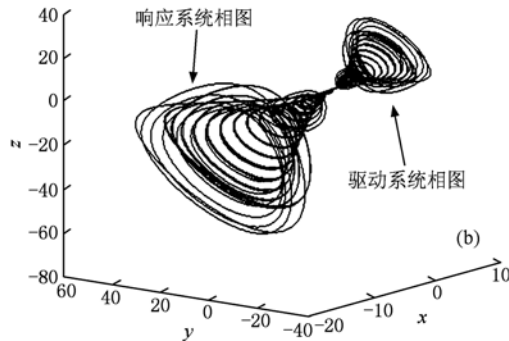
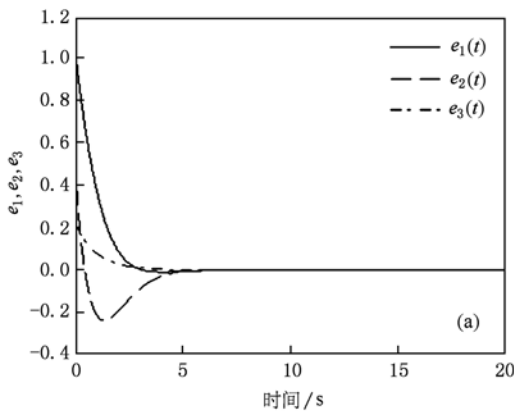


图 4 (a) 比例因子 $\alpha = -0.5$ 时的同步误差曲线; (b) 比例因子 $\alpha = -0.5$ 时驱动系统与响应系统的三维广义投影同步相图

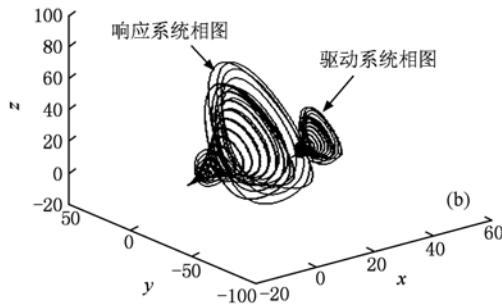
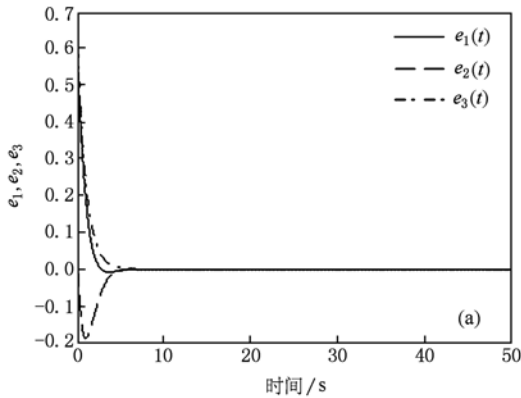


图 5 (a) 比例因子 $\alpha = 0.4$ 时的同步误差曲线; (b) 比例因子 $\alpha = 0.4$ 时驱动系统与响应系统的三维广义投影同步相图

当比例因子 $0 < \alpha < 1$ 时, 响应系统相图为驱动系统相图的同相位拉伸; 当 $\alpha = \pm 1$ 时, 则为通常意义下的完全同步和反相位同步. 可见, 广义投影同步涵盖面较广, 研究混沌系统的广义投影同步尤其是不同系统间的异结构广义投影同步是十分有意义的.

5. 与 tracking control 的比较

本节将应用 tracking control 来实现第四节讨论的混沌能源系统与 NSG 系统的异结构广义投影同步. 分别以系统(8)和(14)为驱动系统和响应系统,

定义广义投影同步误差为

$$\begin{aligned} e_1 &= x_m - \alpha x_s, \\ e_2 &= y_m - \alpha y_s, \\ e_3 &= z_m - \alpha z_s. \end{aligned}$$

系统(8)减去系统(14)即得同步误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a_1 e_1 + e_2 + (a_1 + a_3) \alpha x_s \\ &\quad - (a_2 + 1) y_m - a_1 x_m^2 / M - a_2 z_m - \alpha u_1, \\ \dot{e}_2 &= -e_1 - a_3 e_2 + (a_3 - b_1) y_m \\ &\quad + (b_3 N + 1) x_m - b_2 z_m - b_3 x_m^2 \\ &\quad + b_3 x_m z_m - a_3 b_4 \alpha y_s z_s - \alpha u_2, \\ \dot{e}_3 &= -c_4 a_3 e_3 + (c_4 a_3 - c_1 c_3) z_m \\ &\quad + c_1 c_2 x_m z_m - c_4 a_3 \alpha \\ &\quad + a_3 b_4 \alpha y_s^2 - \alpha u_3. \end{aligned} \quad (19)$$

设计控制器为

$$\begin{aligned} u_1 &= (2a_1 e_1 + e_2 + (a_1 + a_3) \alpha x_s \\ &\quad - (a_2 + 1) y_m - a_1 x_m^2 / M - a_2 z_m) / \alpha, \\ u_2 &= (-e_1 - 2a_3 e_2 + (a_3 - b_1) y_m \\ &\quad + (b_3 N + 1) x_m - b_2 z_m - b_3 x_m^2 \\ &\quad + b_3 x_m z_m - a_3 b_4 \alpha y_s z_s) / \alpha, \\ u_3 &= ((c_4 a_3 - c_1 c_3) z_m + c_1 c_2 x_m z_m \\ &\quad - c_4 a_3 \alpha + a_3 b_4 \alpha y_s^2) / \alpha. \end{aligned} \quad (20)$$

定理 2 若选择控制器为方程(20),则系统(8)与(14)实现广义投影同步.

证明 选择误差系统(19)的 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2).$$

对 V 关于时间 t 求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 \\ &= -a_1 e_1^2 - a_3 e_2^2 - c_4 a_3 e_3^2. \end{aligned}$$

由于系统参数 a_1, a_3, c_4 均大于零,上式显然是负定的,由引理 1 得,误差系统(19)是渐进稳定的.因而系统(8)与(14)实现广义投影同步.

与第 4.3 节类似,取系统(8)和(14)的参数为 $a_1 = 0.09, a_2 = 0.15, a_3 = 0.75, b_1 = 0.06, b_2 = 0.082, b_3 = 0.07, b_4 = 10.5, c_1 = 0.2, c_2 = 0.5, c_3 = 0.4, c_4 = 0.15, M = 1.8, N = 1$, 驱动系统初值条件为 $(0.82, 0.29, 0.48)$, 响应系统初值条件为 $(0.5, 0.5, -0.5)$, 当投影比例因子为 $\alpha = -0.5$ 时,图 6 描述了同步误差的变化曲线.如图所示,误差最终都趋于零,说明系统(8)和系统(14)实现广

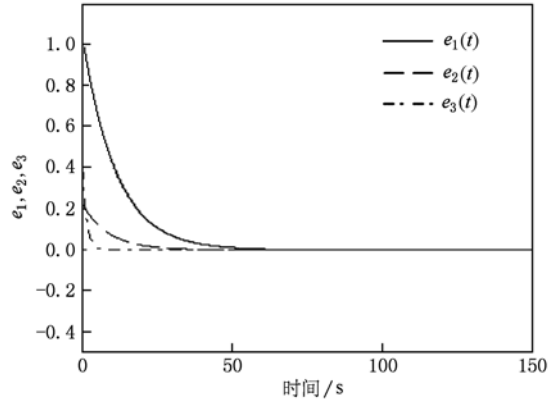


图 6 tracking control 方法下的同步误差变化曲线

义投影同步.与图 4(a)相比,不难看出,改进的主动控制法具有较高的同步效率.

同时,不难看出,与未改进的主动控制和反馈控制等依赖于罗斯-霍维兹判据的方法相比,该方法不仅保留了稳健、高效等优点,而且简化了运算步骤和计算复杂度,具有简单直观,易于实现等优点.无论是解决低维系统还是高维系统的相关问题,该方法均具有一定优势.

6. 结 论

本文基于 Lyapunov 稳定性理论,通过引进特殊矩阵构造,提出了一种改进的主动控制法.该方法具有简单,直观和易于实现等优点,且不依赖于罗斯-霍维兹判据,在保证了对稳健性和高效性的同时,简化了相关运算步骤和复杂度,无论是解决低维系统还是高维系统的相关问题,该方法均具有一定优势,从而使该方法有着较广的适用范围.第二章结合相关引理、定理介绍了改进的主动控制法的具体步骤以及理论基础;第三章和第四章通过对混沌能源系统和 NSG 系统的研究,验证了该方法不仅适用于混沌系统的自结构广义投影同步,也适用于异结构广义投影同步.第五章通过将该方法与其他方法进行比较,说明了该方法的优点.数值模拟的结果表明,通过改变广义投影同步比例因子,可以使驱动系统相图实现同相位或反相位的任意比例“压缩”和“拉伸”,同时该方法的有效性和理论分析的正确性也得到了进一步验证.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Zheng Z G, Hu G, Zhou C S, Hu B B 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2320 (in Chinese) [郑志刚、胡 岗、周昌松、胡斑斑 2000 物理学报 **49** 2320]
- [3] Hu J, Zhang Q J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 503
- [4] Feng Y L, Shen K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 550
- [5] Suwat K 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2837
- [6] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘 杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [7] Yang W, Sun J T 2010 *Phys. Lett. A* **374** 557
- [8] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 0707 (in Chinese) [刘扬正、姜长圣、林长圣 2007 物理学报 **56** 0707]
- [9] Cai N, Jing Y W, Zhang S Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 802 (in Chinese) [蔡 娜、井元伟、张嗣瀛 2009 物理学报 **58** 802]
- [10] Li X C, Xu W, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4721 (in Chinese) [李秀春、徐 伟、肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4721]
- [11] Zhao Y, Zhang H G, Zheng C D 2008 *Chin. Phys. B* **17** 529
- [12] Ma T D, Zhang H G, Fu J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4407
- [13] Li J F, Liu Y P, Gan Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 779 (in Chinese) [李建芬、李 农、刘宇平、甘 轶 2009 物理学报 **58** 779]
- [14] Lou X Y, Cui B T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 520
- [15] Qin J, Yu H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6828 (in Chinese) [秦 洁、于洪洁 2007 物理学报 **56** 6828]
- [16] Li C B, Wang D C 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 764 (in Chinese) [李春彪、王德纯 2009 物理学报 **58** 764]
- [17] Mainieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [18] Xu D, Chee C Y 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046218
- [19] Yan J, Li C 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **26** 1119
- [20] Yau H T 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2380
- [21] Li G H 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 1454
- [22] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2010 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* **15** 115
- [23] Bai E W, Karl E L 1997 *Chaos, Solitons and Fractals* **8** 51
- [24] Sun M, Tian L X, Fu Y 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 168
- [25] Ayman A S 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **42** 1926
- [26] Li R H, Xu W, Li S 2007 *Phys. Lett. A* **367** 199
- [27] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p26 (in Chinese) [刘秉正、彭建华 2004 非线性动力学(北京:高等教育出版社) 第26页]
- [28] Sun M, Tian L X, Fu Y 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **31** 879
- [29] Sun M, Tian L X, Xu J 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 1725

Generalized projective synchronization of chaotic systems via modified active control*

Li Zhen-Bo[†] Zhao Xiao-Shan Wang Jing

(School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin 300222, China)

(Received 12 June 2010; revised manuscript received 23 July 2010)

Abstract

Based on Lyapunov stability theory, by introducing a special matrix structure, a modified active control is proposed for the generalized projective synchronization of chaotic system. Compared with the traditional active control, the modified active control is independent of the Routh-Hurwitz criterion, which means the complexity of active control is simplified. The method is successfully applied to the energy resource system and nuclear spin generator system. Compared with other method, the proposed method, which could realize the generalized projective synchronization between both identical systems and different systems, is shown to be simple, direct, stable and efficient. Numerical simulation is provided to show the validity of the theoretical analysis and the effectiveness of the method.

Keywords: modified active control, generalized projective synchronization, special matrix structure

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 70871098, 10802061), the Natural Science Foundation of Tianjin (Grant No. 08JCYBJC12100) and the Science and Technology Development Fund of Higher Education of Tianjin (Grant No. 20070403).

[†] E-mail: lizhenbo@sohu.com