

# 基于滑模控制的分数阶混沌系统的自适应同步\*

曹鹤飞<sup>1)2)</sup> 张若洵<sup>1)3)†</sup>

1) (河北师范大学物理科学与信息工程学院, 石家庄 050016)

2) (石家庄学院物理系, 石家庄 050035)

3) (邢台学院初等教育学院, 邢台 054001)

(2010年7月5日收到; 2010年8月11日收到修改稿)

基于滑模控制理论和自适应控制理论,研究了分数阶混沌系统的同步问题. 设计了新的分数阶积分滑模面,并提出了用单一自适应控制器实现一类三维分数阶混沌系统同步的方法. 数值模拟证实了所提方法的有效性.

**关键词:** 滑模控制, 分数阶混沌系统, 单一控制器, 自适应同步

**PACS:** 05.45.Xt

## 1. 引言

分数阶微积分已有 300 多年的历史,其发展几乎与整数阶微积分同步,但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还是最近几十年兴起的. 其中,分数微分混沌系统引起了人们广泛的兴趣和深入的研究. Chua 电路<sup>[1]</sup>、Lorenz 系统<sup>[2]</sup>、Chen 系统<sup>[3-5]</sup>、Lü 系统<sup>[6]</sup>、Liu 系统<sup>[7-9]</sup>、Duffing 系统<sup>[10]</sup>、Sprott 系统<sup>[11,12]</sup>以及 Rossler 混沌和超混沌系统<sup>[13]</sup>、新超混沌系统<sup>[14]</sup>中,通过计算机数值仿真发现,当系统的阶数为分数的时候,系统仍呈现混沌状态,且更能反映系统所呈现的物理现象.

分数阶混沌系统的同步控制由于在保密通信<sup>[15]</sup>、信号处理和系统控制及其他领域比整数阶混沌系统拥有更突出、更诱人的应用前景和发展前途,已引起广泛关注. 人们提出了许多分数阶混沌系统的同步方法,如驱动-响应法<sup>[16]</sup>、滑模控制法<sup>[17]</sup>、Lyapunov 方程法<sup>[18]</sup>、自适应控制法<sup>[19,20]</sup>、主动控制法<sup>[21]</sup>、非线性反馈控制法<sup>[22]</sup>和广义同步法<sup>[23]</sup>等.

滑模控制具有快的响应性、良好的动态特性和对外界变化的不灵敏性等很多诱人的优点. 最近,文献<sup>[17]</sup>采用主动滑模控制实现了分数阶混沌系统的同步,但控制器比较复杂,消去了非线性项,控

制代价太大. 本文我们设计了含有分数阶积分的滑模面,并提出了单一自适应滑模控制器实现一类三维分数阶混沌系统的同步的方法. 数值模拟结果证实了所提方法的有效性.

## 2. 基于滑模控制的分数阶混沌系统的自适应同步理论

考虑三维分数阶混沌系统

$$D_t^q x = f(x), \quad 0 < q < 1, \quad (1)$$

这里,  $D_t^q = d^q/dt^q$  是 Caputo 微分算子,  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  是系统(1)的状态向量.

将系统(1)看作驱动系统,不加控制的响应系统为

$$D_t^q y = f(y), \quad (2)$$

令误差  $e = y - x = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)^T = (e_1, e_2, e_3)^T$ , 则由系统(2)和(1)可得误差系统为

$$D_t^q e = g(e). \quad (3)$$

上式改写为

$$D_t^q e_1 = g_1(e_1, e_2, e_3),$$

$$D_t^q e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(e_1, e_2, e_3). \quad (4)$$

为描述新的设计理论和方法,需要下面的假设.

**假设 1** 系统(4)中的第一、第三式在  $e_2 = 0$  的邻域内光滑连续,且子系统

\* 河北省自然科学基金(批准号: A2010000343)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xtzhx@126.com

$$D_t^q e_1 = g_1(e_1, 0, e_3),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(e_1, 0, e_3).$$

对所有的  $e_1, e_3$  关于  $e_1 = 0, e_3 = 0$  是一致指数稳定的.

**假设 2** 由于(4)是两个混沌系统的误差系统,故存在足够大的正数  $M$ ,满足

$$g_2(e_1, e_2, e_3) \leq \lambda_1 |e_1| + \lambda_2 |e_2| + \lambda_3 |e_3| \leq M(|e_1| + |e_2| + |e_3|).$$

为了使系统(4)稳定在平衡点  $e = 0$ , 即系统(2)与(1)同步,我们采用下面控制方法:

$$D_t^q e_1 = g_1(e_1, e_2, e_3),$$

$$D_t^q e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3)$$

$$-k(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)\text{sign}(s),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(e_1, e_2, e_3), \quad (5)$$

其中  $s = D_t^{q-1} e_2 + \int_0^t c e_2(\tau) d\tau$  为滑模面,  $c > 0$ .  $k$  的自适应率为

$$\dot{k} = \theta(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1) |s|, \quad (\theta \text{ 为大于零的常数}). \quad (6)$$

**定理 1** 从任意初值出发的受控误差系统(5), 当  $t \rightarrow \infty$ , 其轨线收敛于零, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

即在自适应控制器作用下分数阶系统(2)和(1)渐进同步.

**证明** 所设计的滑模面为  $s = D_t^{q-1} e_2 + \int_0^t c e_2(\tau) d\tau$ . 当系统发生滑模运动时,需满足如下条件:

$$s = D_t^{q-1} e_2 + \int_0^t c e_2(\tau) d\tau = 0, \quad \dot{s} = D_t^q e_2 + c e_2 = 0. \quad (7)$$

由(7)的第二个方程得

$$D_t^q e_2 = -c e_2. \quad (8)$$

显然选取  $c > 0$ , (8)式渐近稳定, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0$ . 由假设 1, 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1 = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} e_3 = 0$ . 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9)$$

下面证明从任意初始条件出发的误差系统(5)满足滑模条件  $s = 0$ .

选取 Lyapunov 函数为

$$V(t) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} (k - k^*)^2, \text{ 其中 } k^* > M.$$

$V(t)$  对时间的导数为

$$\dot{V}(t) = s\dot{s} + (k - k^*)\dot{k}$$

$$\begin{aligned} &= s(D_t^q e_2 + c e_2) + (k - k^*)\dot{k} \\ &= s(g_2(e_1, e_2, e_3) - k(|e_2| + 1)\text{sign}(s) + c e_2) \\ &\quad + (k - k^*)(|e_2| + 1) |s| \\ &\leq M(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1) |s| \\ &\quad - k(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1) |s| \\ &\quad + (k - k^*)(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1) |s| \\ &= -(k^* - M)(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1) |s| \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

这表明,从任意初始条件出发的误差系统(5)满足滑模到达条件,在滑模面上又有(9)式成立,从而最终实现了误差系统(5)稳定在平衡点. 亦即驱动系统与受控响应系统的同步.

**注 1** 若系统(4)中的第二、第三式在  $e_1 = 0$  的邻域内光滑连续,且子系统

$$D_t^q e_2 = g_2(0, e_2, e_3),$$

$$D_t^q e_3 = g_3(0, e_2, e_3).$$

对所有的  $e_2, e_3$  关于  $e_2 = 0, e_3 = 0$  是一致指数稳定的. 则滑模面选为  $s = D_t^{q-1} e_1 + \int_0^t c e_1(\tau) d\tau$ , 控制器加在响应系统(误差系统)的第一个方程上, 分数阶系统(2)和(1)渐进同步.

### 3. 仿真示例

为了验证所提理论的正确性和有效性,我们首先选取分数阶统一混沌系统进行数值模拟. 分数阶统一混沌系统<sup>[24]</sup>为

$$D_t^q x_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1),$$

$$D_t^q x_2 = (28 - 35\alpha)x_1 + (29\alpha - 1)x_2 - x_1 x_3,$$

$$D_t^q x_3 = x_1 x_2 - (\alpha + 8)x_3/3, \quad (10)$$

其中,  $\alpha \in [0, 1], 0 < q < 1$ . 以系统(10)为驱动系统, 响应系统为

$$D_t^q y_1 = (25\alpha + 10)(y_2 - y_1),$$

$$D_t^q y_2 = (28 - 35\alpha)y_1 + (29\alpha - 1)y_2 - y_1 y_3,$$

$$D_t^q y_3 = y_1 y_2 - (\alpha + 8)y_3/3, \quad (11)$$

则误差系统( $e = y - x$ )为

$$D_t^q e_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1),$$

$$D_t^q e_2 = (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 - x_1 e_3 - y_3 e_1,$$

$$D_t^q e_3 = x_1 e_2 + y_2 e_1 - (\alpha + 8)e_3/3. \quad (12)$$

显然,若  $e_2 = 0$ , 系统(12)的二维子系统

$$D_t^q e_1 = -(25\alpha + 10)e_1,$$

$$D_t^q e_3 = y_2 e_1 - (\alpha + 8)e_3/3. \quad (13)$$

对所有的  $e_1, e_3$  关于  $e_1 = 0, e_3 = 0$  是一致指数稳定的(因为系统(13)系数矩阵的特征值均为负). 故系统(12)满足假设 1, 受控的误差系统(12)为

$$\begin{aligned} D_t^q e_1 &= (25\alpha + 10)(e_2 - e_1), \\ D_t^q e_2 &= (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 \\ &\quad - x_1 e_3 - y_3 e_1 - k(|e_1| + |e_2| \\ &\quad + |e_3| + 1)\text{sign}(s), \\ D_t^q e_3 &= x_1 e_2 + y_2 e_1 - (\alpha + 8)e_3/3. \end{aligned} \quad (14)$$

即受控的响应系统为

$$\begin{aligned} D_t^q y_1 &= (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) \\ D_t^q y_2 &= (28 - 35\alpha)y_1 + (29\alpha - 1)y_2 \\ &\quad - y_1 y_3 - k(|e_1| + |e_2| \\ &\quad + |e_3| + 1)\text{sign}(s), \\ D_t^q y_3 &= y_1 y_2 - (\alpha + 8)y_3/3, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $s = D_t^{q-1} e_2 + \int_0^t c e_2(\tau) d\tau$  为滑模面,  $c > 0$ .  $k$  的

自适应率为

$$\dot{k} = \theta(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)|s|, \quad (\theta \text{ 为大于零的常数}).$$

根据定理 1, 误差系统(12)在控制器  $u = (0, -k(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)\text{sign}(s), 0)^T$  稳定, 即响应系统(15)与驱动系统(10)在单一控制器  $u = -k(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)\text{sign}(s)$  作用下同步.

结合分数阶频域近似法<sup>[25]</sup>、分数阶混沌的动态仿真法<sup>[26]</sup>和 MATLAB 中的 s-function 进行数值模拟, 选取  $q = 0.95, c = 3$ , 驱动系统(10)的初值  $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1, x_3(0) = 10$ ; 受控的响应系统(15)的初值  $y_1(0) = -1, y_2(0) = -2, y_3(0) = -10$ . 图 1 和图 2 分别是  $\alpha = 1$ (分数阶 Chen 系统)和  $\alpha = 0.8$ (分数阶 Lü 系统)的同步误差演化图. 从图中可以看到, 随着时间的演化,  $e_1, e_2, e_3$  迅速趋近于零, 实现了响应系统(15)与驱动系统(10)的同步.

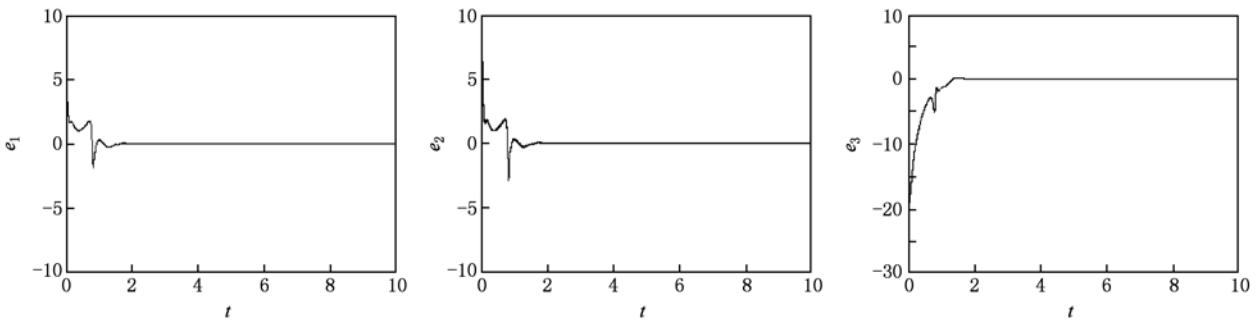


图 1 分数阶统一混沌系统同步误差演化图 ( $\alpha = 1, q = 0.95$ )

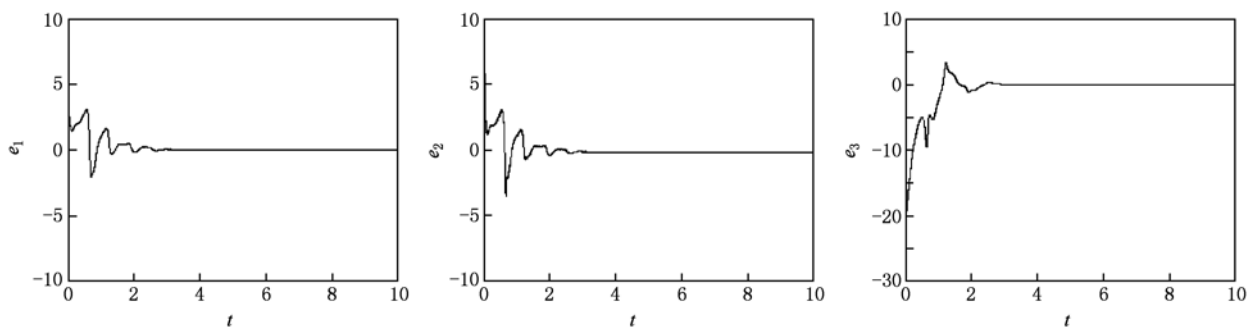


图 2 分数阶统一混沌系统同步误差演化图 ( $\alpha = 0.8, q = 0.95$ )

下面, 取分数阶 Arneodo 混沌系统<sup>[27]</sup>进行数值模拟. 系统方程为

$$\begin{aligned} D_t^q x_1 &= x_2, \\ D_t^q x_2 &= x_3, \end{aligned}$$

$$D_t^q x_2 = ax_1 - bx_2 - rx_3 - x_1^3. \quad (16)$$

当  $a = 5.5, b = 3.5, r = 0.4, q = 0.9$  时, 系统(16)是混沌的. 以系统(16)为驱动系统, 响应系统为

$$D_t^q y_1 = y_2,$$

$$D_t^q y_2 = y_3, \quad D_t^q y_2 = ay_1 - by_2 - ry_3 - y_1^3. \quad (17)$$

则误差系统为( $e = y - x$ )

$$D_t^q e_1 = e_2, \quad D_t^q e_2 = e_3, \quad D_t^q y_2 = ae_1 - be_2 - re_3 - (x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2)e_1. \quad (18)$$

显然,若  $e_1 = 0$ , 系统(18)的二维子系统

$$D_t^q e_2 = e_3, \quad D_t^q e_3 = -be_2 - re_3. \quad (19)$$

对所有的  $e_2, e_3$  关于  $e_2 = 0, e_3 = 0$  是一致指数稳定的(因为系统(14)系数矩阵的特征值实部均为负). 故受控的误差系统(18)为

$$D_t^q e_1 = e_2 - k(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)\text{sign}(s), \quad D_t^q e_2 = e_3, \quad D_t^q y_2 = ae_1 - be_2 - re_3 - (x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2)e_1, \quad (20)$$

即受控的响应系统为

$$D_t^q y_1 = y_2 - k(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)\text{sign}(s), \quad D_t^q y_2 = y_3, \quad D_t^q y_2 = ay_1 - by_2 - ry_3 - y_1^3, \quad (21)$$

其中  $s = D_t^{q-1} e_1 + \int_0^t c e_1(\tau) d\tau$  为滑模面,  $c > 0$ .  $k$  的自适应率为

$$\dot{k} = \theta(|e_1| + |e_2| + |e_3| + 1)|s|, \quad (\theta \text{ 为大于零的常数}).$$

类似于定理 1 的证明, 可得受控的响应系统(21)与驱动系统(16)同步.

数值模拟时, 选取  $a = 5.5, b = 3.5, r = 0.4, q = 0.9, c = 3$ , 图 3 是受控的响应系统(21)与驱动系统(16)的同步误差演化图. 从图中可以看到, 随着时间的演化,  $e_1, e_2, e_3$  迅速趋近于零, 实现了响应系统(21)与驱动系统(16)的同步.

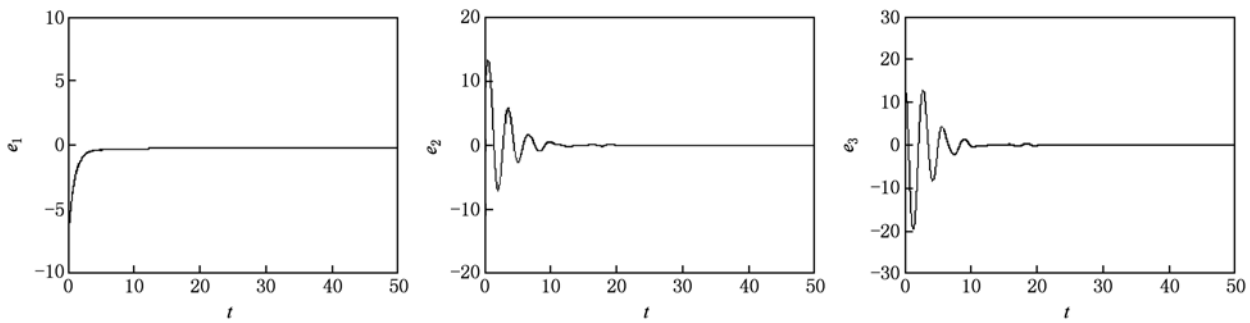


图 3 分数阶 Arneodo 系统同步误差演化图( $q = 0.9$ )

#### 4. 结 论

基于滑模控制理论和自适应控制理论, 设计了

新的分数阶积分滑模面, 提出了一类三维分数阶混沌的同步方法. 所设计的控制器为单一控制器, 控制效果好, 且工程上易于实现. 数值模拟证实了所提方法的有效性.

[1] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans CAI* **42** 485.  
 [2] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101  
 [3] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 443  
 [4] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549  
 [5] Lu J G, Chen G R 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 685  
 [6] Deng W H, Li C P 2005 *Physica A* **353** 61  
 [7] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]  
 [8] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣, 刘崇新, 刘发强, 李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]

[9] Liu C X, Liu T, Liu L and Liu K 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 1031  
 [10] Gao X, Yu J B 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **24** 1097  
 [11] Ahamd W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 339  
 [12] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908  
 [13] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55  
 [14] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]  
 [15] Arman Kiani-B, Kia Fallahi, Naser Pariz, Henry Leung 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **14** 863  
 [16] Li C P, Deng W H 2006 *Int. J. Modern Phys. B* **20** 791

- [17] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri 2008 *Physica A* **387** 57
- [18] Hu J B, H Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese) [胡建兵、韩焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]
- [19] Zhang R X, Yang Y, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6309 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2009 物理学报 **58** 6309]
- [20] Zhang R X, Yang S P 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020510
- [21] Wang X Y, Song J M 2009 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* doi: 10.1016/j.cnsns.2009.01.010
- [22] Zhang R X, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6837 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2008 物理学报 **57** 6837]
- [23] Deng W H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056201
- [24] Wang X J, Li J, Chen G R 2008 *J. of the Franklin Institute* **345** 392
- [25] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 339
- [26] Sun K H, Re J, Shang F 2008 *Computer Simulation* **25** 312
- [27] Lu J G 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **26** 1125

## Adaptive synchronization of fractional-order chaotic system via sliding mode control \*

Cao He-Fei<sup>1)2)</sup> Zhang Ruo-Xun<sup>1)3)†</sup>

1) (College of Physics, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016, China)

2) (Department of Physics, Shijiazhuang College, Shijiazhuang 050035, China)

3) (College of Elementary Education, Xingtai University, Xingtai 054001, China)

(Received 5 July 2010; revised manuscript received 11 August 2010)

### Abstract

Based on sliding mode control theory and adaptive control theory, this paper investigates the synchronization of three-dimensional chaotic systems, designs a fractional order proportional integral switching surface, and proposes a single adaptive-feedback controller for fractional-order chaos synchronization. Simulation results for fractional-order unified chaotic system and Arneodo chaotic systems are provided to illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords:** sliding mode control, fractional-order chaotic system, single controller, adaptive synchronization

**PACS:** 05.45.Xt

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province (Grant No. A2010000343).

† Corresponding author. E-mail: xtzhxr@126.com