

基于分数阶滑模面控制的分数阶超混沌系统的投影同步*

孙 宁 张化光† 王智良

(东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110819)

(2010年4月29日收到; 2010年8月17日收到修改稿)

本文通过设计一个新型的含分数阶滑模面的滑模控制器, 应用主动控制原理和滑模控制原理, 实现了一个新分数阶超混沌系统和分数阶超混沌 Chen 系统的投影同步. 应用 Lyapunov 理论, 分数阶系统稳定理论和分数阶非线性系统性质定理对该控制器的存在性和稳定性分别进行了分析, 并得到了异结构分数阶超混沌系统达到投影同步的稳定性判据. 数值仿真采用分数阶超混沌 Chen 系统和一个新分数阶超混沌系统的投影同步, 仿真结果验证了方法的有效性.

关键词: 分数阶滑模面滑模控制器, 稳定性分析, 分数阶超混沌系统, 投影同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Gg

1. 引言

在流体、生物、经济等高维非线性系统中存在着大量的混沌、超混沌现象. 与普通混沌系统相比, 超混沌系统具有更为复杂的动力学行为, 其特点是至少在四维及更高维的非线性系统中具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数. 这意味着超混沌系统的相轨迹在更多方向上分离, 因而其混沌行为更为复杂^[1]. 1990 年, Pecora 和 Carroll 成功地实现了混沌系统的同步^[2]. 由于混沌同步在保密通信领域巨大的潜在应用前景, 使其得到了广泛的关注和研究. 包括完全同步、广义同步、相同步、广义相同步、滞后同步等多种同步现象不断被发现^[3-8]. 近来, 更有许多新的同步概念不断出现, 如反同步、预期同步、投影同步等^[9-12]. 其中投影同步是在 1999 年 Mainieri 等^[13]在研究部分线性混沌系统中观察到的, 即在一定条件下耦合的主从系统的输出状态不仅相位锁定, 而且振幅还按某一比例因子关系演化. 这种同步方式实现起来更为灵活.

近十几年来, 研究人员在黏滞系统、介质极化、

电极-电解液极化、(电缆的) 管道边界层效应、有色噪声和电磁波等研究中发现, 许多物理过程展现出分数阶动力学行为, 这使得具有 300 多年研究历史的分数阶微积分理论重新受到关注. 分数阶微积分扩展了整数阶微积分的描述能力, 是整数阶微积分理论的推广. 并且, 在由分数阶微分方程描述的非线性系统中重新发现了混沌现象. 大量的分数阶混沌系统, 如分数阶 Chua 电路, 分数阶 Chen 系统、分数阶 Lü 系统、分数阶 Rössler 系统、分数阶超混沌 Chen 系统等新的分数阶超混沌系统仍在不断发现中, 如文献[14], 系统

$$\begin{aligned} D^q x &= a(y - x), \\ D^q y &= dx - xz + cy - w, \\ D^q z &= xy - bz, \\ D^q w &= x + k. \end{aligned} \quad (1)$$

当参数取 $a = 36, b = 3, c = 28, d = -16, k = 0.5, 0.72 \leq q \leq 1$ 时, 分数阶系统(1)处于超混沌状态. 当 $q = 0.9$ 时分数阶系统的相图如图 1 所示. 这些分数阶系统更能反映真实系统呈现的物理现象^[15-18].

综上所述, 分数阶超混沌系统的同步研究具有

* 国家自然科学基金(批准号: 60804006 和 50977008), 长江学者和创新团队发展计划, 和国家重点基础研究发展计划(批准号: 2009CB320601)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: hgzhang@iee.org

重要的实际应用价值. 本文提出使用新的分数阶滑模面的主动控制滑模控制器法, 不仅扩展了同步控制器的实现范围, 还对其存在性和稳定性进行了严

格的证明. 通过实现了系统(1)和分数阶超混沌 Chen 系统的投影同步, 证明了这个方法在异结构分数阶超混沌系统投影同步中的可靠性.

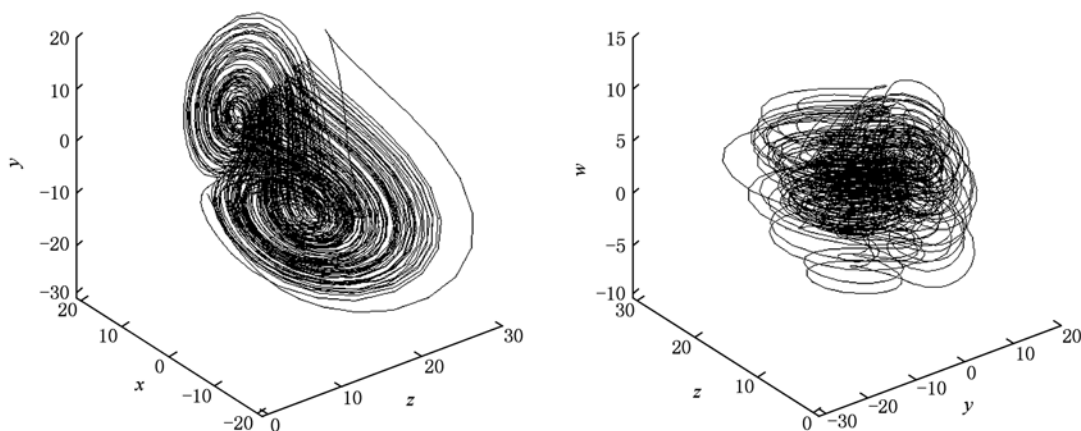


图1 $q = 0.9$ 时, 分数阶系统(1)的超混沌吸引子

2. 分数阶微分定义

不同领域的研究人员提出了多种分数阶微分的定义^[20], 其中应用较多的是 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶微分定义和 Caputo 分数阶微分定义. 在理论研究中应用较多的是 R-L 定义. 由于 Caputo 的分数阶微分定义更容易给出分数阶微分方程的初值条件, 因而在工程中应用较广. 本文采用 Caputo 定义.

定义 1^[20] Riemann-Liouville 分数阶积分算子 ${}_0I_t^q$,

$${}_0I_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-q}} d\tau, \quad (2)$$

这里 $q > 0, f: R \rightarrow R, \Gamma(\cdot)$ 为伽玛函数, 且 $\Gamma(q) = \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t} dt$. Caputo 分数阶微分定义可以用 Riemann-Liouville 分数阶积分算子 ${}_0I_t^q$ 来定义.

定义 2^[20] Caputo 分数阶微分定义为

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^q f(t) &= {}_0I_t^{n-q} D^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q+1-n}} d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $n-1 \leq q < n \in N, f(t)$ 为在 $t > 0$ 时在 $[0, t]$ 上有 $n+1$ 阶连续有界可导的函数.

为简便起见, 我们使用 D^q 来表示 Caputo 分数阶微分 ${}_0^C D_t^q$.

定义 3^[20] 2 个参数的 Mittag-Leffler 函数定

义为

$$E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}. \quad (4)$$

该函数在分数阶微分系统解的显式表达中起重要作用.

文献[21]研究了分数阶线性系统的稳定性问题并给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件.

引理 1^[21] 考虑自治系统

$$D^q x = Ax, x(0) = x_0, \quad (5)$$

其中 $0 < q < 1, x \in R^n, A \in R^{n \times n}, D^q x = (D^q x_1, \dots, D^q x_n)^T$.

如果有

1) 系统(5)是渐近稳定的, 当且仅当对矩阵 A 的任意特征值

$$|\arg(\text{eig}(A))| > q\pi/2 \quad (6)$$

都成立.

2) 系统(5)是稳定的, 当且仅当对矩阵 A 的任意特征值

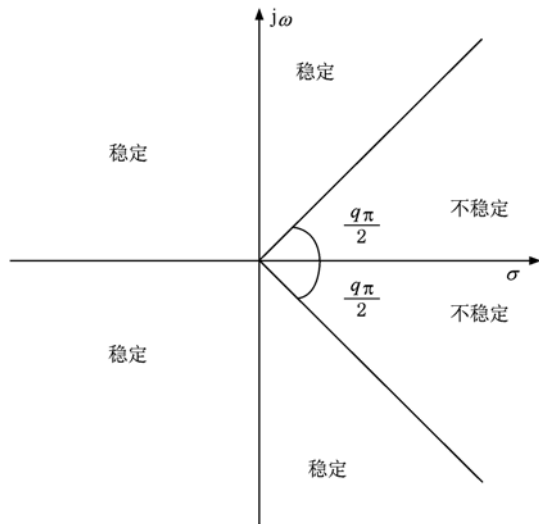
$$|\arg(\text{eig}(A))| \geq q\pi/2 \quad (7)$$

都成立.

q 阶线性系统的稳定区域如图 2 所示, 对于分数阶非线性系统如果其在平衡点处的 Jacobian 矩阵的所有特征值都在稳定区域内, 则该平衡点为稳定的平衡点.

引理 2^[22] Gronwall - Bellman's 不等式

设 $\lambda: [a, b] \rightarrow R$ 连续非负, $u: [a, b] \rightarrow R$ 连续非负, 若连续函数 $y: [a, b] \rightarrow R$ 满足


 图2 q 阶线性系统的稳定性区域

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s) y(s) ds, \quad (8)$$

当 $a \leq t \leq b$, 则有

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s) \mu(s) \times \exp\left[\int_s^t \mu(\tau) d\tau\right] ds, \quad (9)$$

特别的, 如果有 λ 是常数, 即 $\lambda(t) = \lambda$, 则有

$$y(t) \leq \lambda \exp\left[\int_a^t \mu(\tau) d\tau\right]. \quad (10)$$

3. 主动滑模控制器实现投影同步

3.1. 主动滑模投影同步控制器设计

考虑如下 q 阶分数阶混沌系统作为驱动系统, 其中 $0 < q < 1$,

$$D^q x = A_1 x + f_1(x) + I_1, \quad (11)$$

式中 $x(t) \in R^n$ 为 n 维驱动系统的状态矢量, $A_1 \in R^{n \times n}$, $f_1: R^n \rightarrow R^n$ 分别表示驱动系统的线性部分和非线性部分, I_1 为常数矩阵.

令响应系统为

$$D^q y = A_2 y + f_2(y) + I_2 + u(t), \quad (12)$$

式中 $y(t) \in R^n$ 为 n 维响应系统的状态矢量; $A_2 \in R^{n \times n}$ 和 $f_2: R^n \rightarrow R^n$ 分别表示响应系统的线性部分和非线性部分, I_2 为常数矩阵. 控制器 $u(t) \in R^n$ 加到响应系统, 以实现驱动系统和响应系统的投影同步. 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x - \alpha y\| = 0, \quad (13)$$

这里 α 为投影同步尺度因子.

主动滑模控制器是主动控制和滑模控制的结合, 设计分为两个步骤, 如下描述.

3.1.1. 主动控制器设计

定义 $e = x - \alpha y$. 由 (11) 式, (12) 式, 动态系统误差可被描述成

$$D^q e = A_1 x + f_1(x) + I_1 - \alpha(A_2 y + f_2(y) + I_2 + u(t)), \quad (14)$$

令

$$F(x, y) = f_1(x) - \alpha f_2(y) + I_1 - \alpha I_2 + \alpha(A_1 - A_2)y. \quad (15)$$

按照主动控制设计思路, 使用控制输入 $u(t)$ 来抵消误差系统的非线性部分. 于是, 输入向量设计为

$$u(t) = \frac{1}{\alpha}(F(x, y) - H(t)). \quad (16)$$

把 (16) 式代入 (14) 式得到误差系统, 写为

$$D^q e = Ae + H(t), \quad (17)$$

这里和以后为了简化表示, 相应系统的线性部分简化表示为 A (i. e. $A = A_1$).

(17) 式为含有新控制输入变量 $H(t)$ 的误差系统. 在主动滑模控制里, 基于如下滑模控制律设计 $H(t)$:

$$H(t) = Kw(t), \quad (18)$$

这里 $K \in R$ 为常数增益向量, $w(t) \in R$ 为控制输入, 且满足

$$w(t) = \begin{cases} w^+(t), & (s(e) \geq 0), \\ w^-(t), & (s(e) < 0). \end{cases} \quad (19)$$

这里 $s = s(e)$ 描述了满足需要的动态的切换平面, 于是误差系统写为

$$D^q e = Ae + Kw(t). \quad (20)$$

3.1.2. 分数阶滑模面设计

当到达滑模面后, 滑模控制系统为线性时不变, 因此, 系统状态与参数和扰动无关. 在本文, 滑模面设计为

$$s(e) = C_0 I_t^{1-q}(e(t) - e(0)) = 0, \quad (21)$$

这里 $C \in R^n$ 是常数向量, ${}_0 I_t^{1-q}$ 为阶数为 $1 - q$ 阶的 Riemann-Liouville 分数阶积分算子 ${}_0 I_t^{1-q} e(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t \frac{e(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau$. 为了简化把 ${}_0 I_t^{1-q} e(t)$ 表示为 I^{1-q} .

设计滑模控制律为

$$w(t) = w_{eq} + w_d, \quad (22)$$

这里等价控制 w_{eq} 是使得状态轨迹保持在切换面

上. w_d 为切换控制. 且当系统处于滑模态, 被控系统需要满足如下条件:

$$\dot{s}(e) = 0. \quad (23)$$

由(20), (21), (23)式, 得到

$$\begin{aligned} \dot{s}(e) &= C \frac{d}{dt} I^{1-q}(e(t) - e(0)) \\ &= C_0^C D_t^q e(t) \\ &= C[Ae + Kw(t)] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

因此等价控制

$$w_{eq}(t) = -(CK)^{-1}CAe(t) = -K_{eq}e(t), \quad (25)$$

其中 $(CK)^{-1}$ 的存在为必要条件. 等价控制 $w_{eq}(t)$ 是等式(24)的解.

3.1.3. 滑模控制器的设计

设计如下滑模控制器

$$\dot{s} = -p \operatorname{sgn}(s) - rs, \quad (26)$$

这里 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 表示符号函数. 满足

$$\operatorname{sgn}(s_i) = \begin{cases} 1, & s_i > 0, \\ 0, & s_i = 0, 1 \leq i \leq n \\ -1, & s_i < 0. \end{cases}$$

增益 $p > 0, r > 0$ 的选择满足滑模条件并且保证了滑模运动能够发生.

由(24)和(26)式, 求得控制输入为

$$\begin{aligned} w(t) &= -(CK)^{-1}CAe(t) \\ &\quad - (CK)^{-1}[p \operatorname{sgn}(s) + rs]. \end{aligned} \quad (27)$$

将(27)式写成

$$\begin{aligned} w(t) &= -K_{eq}e(t) \\ &\quad - (CK)^{-1}[p \operatorname{sgn}(s) + rs], \end{aligned} \quad (28)$$

这里 $K_{eq} = (CK)^{-1}CA$.

3.2. 主要结果

定理 1 从任意初始条件出发, 满足 $\dot{s} = -p \operatorname{sgn}(s) - rs$ 的误差系统(20)始终满足滑模到达条件, 能在有限时间内到达滑模面(21).

证明 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2}s^2. \quad (29)$$

从(26)式我们得到(29)式对时间求导为

$$\begin{aligned} \dot{V} = s\dot{s} &= s(-p \operatorname{sgn}(s) - rs) \\ &\leq -p_{\min} \|s\| - r_{\min} \|s\|^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

这里 $p_{\min} = \min\{p_i\}$, $r_{\min} = \min\{r_i\}$, $i = 1, \dots, n$. 因此, 保证了对所有 $p_{\min} > 0$ 和 $r_{\min} > 0$, 系统的(20)轨迹在控制律(27)的作用下达达到滑动模态. 证毕.

当误差动态系统到达滑模面时有

$$D^q e = (I - K(CK)^{-1}C)Ae. \quad (31)$$

定理 2 驱动系统(11)和响应系统(12)在误差系统到达滑模面后实现投影同步的充要条件是

(31)式满足 $|\arg[\operatorname{eig}(A_{eq})]| > \frac{q\pi}{2}$, 这里

$$A_{eq} = (I - K(CK)^{-1}C)A.$$

证明 由引理 1, 当误差系统达到滑模态, 即(31)式的状态, 只要满足 $|\arg[\operatorname{eig}((I - K(CK)^{-1}C)A)]|$

$> \frac{q\pi}{2}$, 则保证(31)式可达到渐进稳定, 也就是实现了此时系统(11)和系统(12)的投影同步.

当误差状态处于滑模面的边界层, 将(28)式代入(20)式可以得到闭环误差动态系统为

$$\begin{aligned} D^q e &= [I - K(CK)^{-1}C]Ae(t) \\ &\quad - K(CK)^{-1}p \operatorname{sgn}(s) - K(CK)^{-1}rs. \end{aligned} \quad (32)$$

简便起见写成

$$D^q e = A_{eq}e(t) + B_1 \operatorname{sgn}(s) + B_2 s, \quad (33)$$

这里 $B_1 = -K(CK)^{-1}p$, $B_2 = -K(CK)^{-1}r$.

方程(32)的解可写为

$$\begin{aligned} e(t) &= E_{q,1}(A_{eq}t^q)e_0 \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q) B_1 \operatorname{sgn}(s) d\tau \\ &\quad + \int_0^t (t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q) \\ &\quad \times B_2 s(e) d\tau. \end{aligned} \quad (34)$$

我们引用如下稳定性的定义:

定义 4 对任意有界初值状态 e_0 , 当 $t \geq 0$ 时, 如果系统(32)的解 $e(t)$ 是有界的, 则称该系统是稳定的.

定理 3 假设存在一个有限参数 $\eta > 0$, 使得 $\|s(e)\| \leq \eta \|e(t)\|$, 如果选择矩阵 C 使得闭环状态矩阵 A_{eq} 满足引理 1, 则闭环系统(32)是稳定的, 即对任意有限初值状态 x_0 , 当 $t \geq 0$ 时, 有 $\|e(t)\| \leq \varepsilon$, 这里 ε 是一个正的常数.

证明 从(34)式有

$$\begin{aligned} \|e(t)\| &\leq \|E_{q,1}(A_{eq}t^q)\| \|e_0\| \\ &\quad + \int_0^t \|(t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)\| \\ &\quad \times \|B_1\| d\tau \\ &\quad + \eta \int_0^t \|(t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)\| \\ &\quad \times \|B_2\| \|e(s)\| d\tau, \end{aligned} \quad (35)$$

这里 $E_{q,1}(A_{eq}t^q)$ 和 $E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)$ 是 2 个参数的 Mittag-Leffler 函数, 所以由定义 3 得到

$$E_{q,1}(A_{eq}t^q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{eq}^k \frac{t^{kq}}{\Gamma(kq+1)}, \quad (36)$$

$$E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{eq}^k \frac{(t-\tau)^{kq}}{\Gamma(kq+q)}, \quad (37)$$

且有如下关系成立:

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q) B_2 d\tau \\ &= A_{eq}^{-1} (E_{q,1}(A_{eq}t^q) - I_n) B_2. \end{aligned} \quad (38)$$

如果 A_{eq} 特征值满足 (6) 式, 由 (36) 和 (37) 式, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{q,1}(A_{eq}t^q) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q) = 0^{[21]}$, 从而有

$$\|E_{q,1}(A_{eq}t^q)\| \|e_0\| \leq k_1,$$

$$\int_0^t \|(t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)\| d\tau \leq k_2, \quad (39)$$

这里 k_1, k_2 是正的常数,

$$\begin{aligned} & \|E_{q,1}(A_{eq}t^q)\| \|e_0\| \\ &+ \int_0^t \|(t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)\| \\ &\times \|B_1\| d\tau \end{aligned}$$

$$\leq k. \quad (40)$$

把 (39) 式代入 (35) 式得

$$\begin{aligned} & \|e(t)\| \\ & \leq k + \eta \int_0^t \|(t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)\| \\ & \times \|B_2\| \|e(s)\| d\tau. \end{aligned} \quad (41)$$

使用引理 2, (41) 式得到

$$\begin{aligned} & \|e(t)\| \\ & \leq k \exp \left\{ \eta \int_0^t \|(t-\tau)^{q-1} E_{q,q}(A_{eq}(t-\tau)^q)\| \right. \\ & \times \|B_2\| \|e(s)\| d\tau \left. \right\} \\ & \leq k \exp \{ \eta \cdot k_2 \cdot \|B_2\| \} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (42)$$

于是对 $t \geq 0$ 有 $\|e(t)\| \leq \varepsilon$, 问题得证.

3.3. 仿真

将设计的滑模控制器用于分数阶超混沌 Chen 系统和分数阶超混沌系统的投影同步. 选取分数阶超混沌 Chen 系统为驱动系统, 系统 (1) 为响应

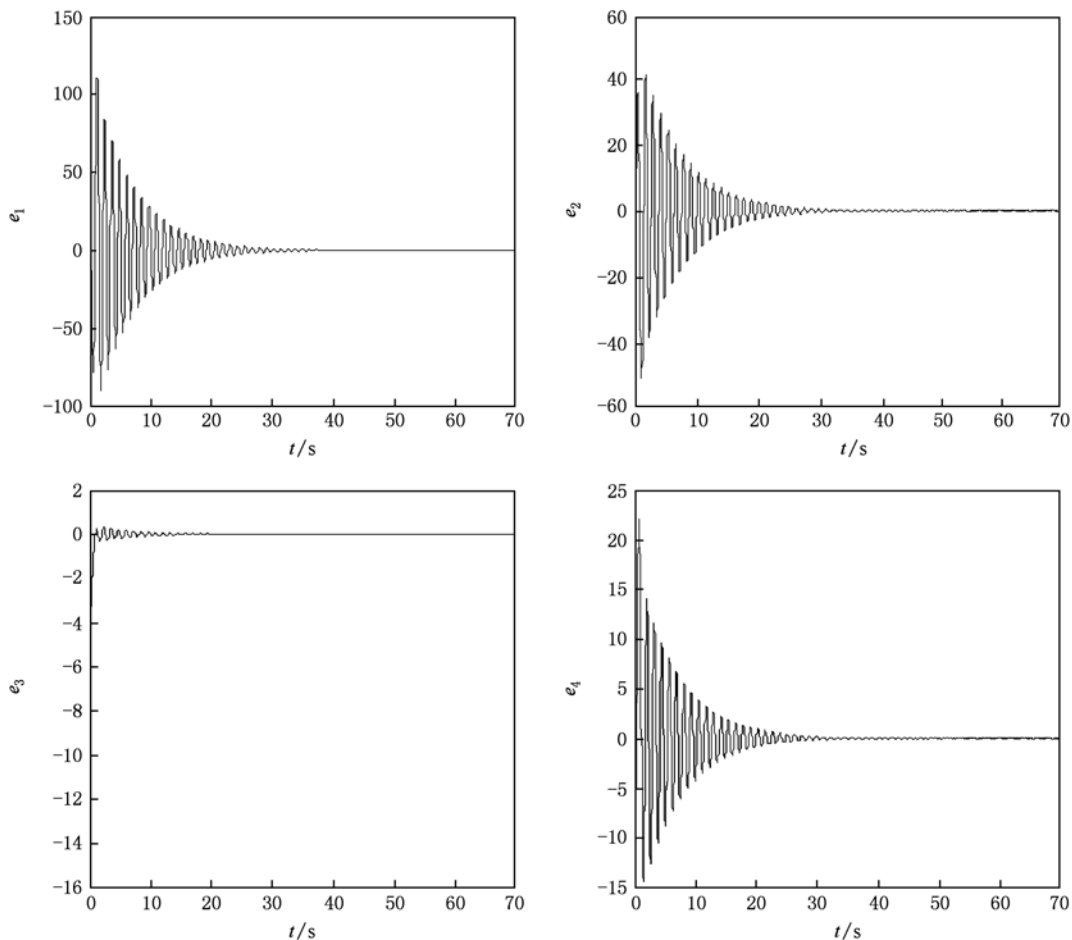


图3 当 $\alpha = 3$ 时, 误差系统的状态曲线图

系统.

分数阶超混沌 Chen 系统表示为

$$\begin{aligned} D^q x_1 &= \theta(y_1 - x_1) + w_1, \\ D^q y_1 &= \beta x_1 - x_1 z_1 + \gamma y_1, \\ D^q z_1 &= x_1 y_1 - \delta z_1, \\ D^q w_1 &= y_1 z_1 + \lambda w_1, \end{aligned} \quad (43)$$

参数取 $q = 0.9$, $\theta = 35$, $\beta = 7$, $\gamma = 12$, $\delta = 3$ 和 $\lambda = 0.5$.

系统(1)表示为

$$\begin{aligned} D^q x_2 &= a(y_2 - x_2) + u_1, \\ D^q y_2 &= dx_2 - x_2 z_2 + cy_2 - w_2 + u_2, \\ D^q z_2 &= x_2 y_2 - bz_2 + u_3, \\ D^q w_2 &= x_2 + k + u_4, \end{aligned} \quad (44)$$

参数取 $q = 0.9$, $a = 36$, $b = 3$, $c = 28$, $d = -16$ 和 $k = 0.5$.

取投影同步尺度因子 $\alpha = 3$, 所以这里

$$A = A_1 = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 & 1 \\ 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 3x_2 - 3y_2 + 3w_2 \\ -x_1 z_1 + 3x_2 z_2 + 69x_2 - 48y_2 + 3w_2 \\ x_1 y_1 - 3x_2 y_2 \\ y_1 z_1 - 3/2 - x_2 + 3/2 w_2 \end{bmatrix}.$$

系统(43)和系统(44)的初值分别选为

$$(x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}) = [7, -4, 4, 4],$$

$$(x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}) = [3, -4, 6, 4].$$

选择控制器参数为

$$K = [-64.2469, 1.4492, -0.0287, 1],$$

$$C = [1, 4, 6, 4], r = 25, p = 0.2.$$

用 MATLAB 仿真得出仿真结果,图3为投影同步误差系统响应图.由图中可以看出,误差变量 e 按照比例因子实现了投影同步.

4. 结 论

本文针对一个新的分数阶超混沌系统的投影同步问题,通过选择合适的分数阶滑模面,采用的基于主动滑模控制方法可实现两个分数阶超混沌异结构系统的投影同步,同时对该方法的稳定性进行了分析.最后,仿真的结果验证了所提方法的有效性.

- [1] Zhang H G, Zhao Y, Yu W, Yang D S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4056
- [2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3742
- [4] Mohammad S T, Mohammad H 2008 *Physica A* **387** 57
- [5] Yang D S, Zhang H G, Li A P, Meng Z Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3121 (in Chinese) [杨东升、张化光、李爱平、孟子怡 2007 物理学报 **56** 3121]
- [6] Zhang H G, Ma T D, Fu J, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3751
- [7] Meng J, Wang X Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [孟娟、王兴元 2007 物理学报 **56** 5142]
- [8] Zhang H G, Liu D R, Wang Z L 2009 *Controlling Chaos: Suppression, Synchronization and Chaotification* (New York: Springer Verlag) p184
- [9] Ma T D, Zhang H G, Wang Z L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3796 (in Chinese) [马铁东、张化光、王智良 2007 物理学报 **56** 3796]
- [10] Wang X Y, Wu X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1988 (in Chinese) [王兴元、武相军 2007 物理学报 **56** 1988]

- [11] Wang X Y, He Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1485 (in Chinese) [王兴元、贺毅杰 2008 物理学报 **57** 1485]
- [12] Liu D, Yan X M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3747 (in Chinese) [刘丁、闫晓妹 2009 物理学报 **58** 3747]
- [13] Mainieri R, Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3042
- [14] Wu X J, Lu H T, Shen S L 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2329
- [15] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
- [16] Yu Y G, Li H X 2008 *Physica A* **387** 1393
- [17] Liu J, Li X J IEEE, 2008 *7th World Congress on Intelligent Control and Automation* Chongqing, People R China) 2008 p4653
- [18] Si-Ammour A, Djenoune S, Bettayeb M 2009 *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* **14** 2310
- [19] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [20] Podlubny I 1999 *Fractional differential equations* (San Diego: Academic Press) p18
- [21] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE-SMC Proceeding* Lille, France, p963
- [22] Khalil H K 1996 *Nonlinear systems* (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall) p63

Fractional sliding mode surface controller for projective synchronization of fractional hyperchaotic systems *

Sun Ning Zhang Hua-Guang[†] Wang Zhi-Liang

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

(Received 29 April 2010; revised manuscript received 17 August 2010)

Abstract

In this paper, a sliding mode controller with fractional sliding surface is designed for projective synchronization (PS) of fractional hyperchaotic systems via active control theory and sliding mode theory. The existence and the stability of PS between two fractional hyperchaotic systems are studied based on Lyapunov theory, fractional stability theory and the theory of fractional calculus. The criterions for the practical stability of the PS error system are presented also. Numerical simulation of PS between fractional Chen system and a new hyperchaotic system shows the effectiveness of the proposed controller law.

Keywords: sliding mode controller with fractional sliding surface, stability analysis, fractional hyperchaotic system, projective synchronization

PACS: 05.45. Xt, 05.45. Gg

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60804006 and 50977008), the Program for Cheung Kong Scholars, National Basic Research Program of China (Grant No. 2009CB320601).

[†] Corresponding author. E-mail: hg Zhang@iee. org