

## 颗粒孔洞流的最大休止倾角和流量公式\*

彭政<sup>†</sup> 蒋亦民

(中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

(2010年11月8日收到; 2010年11月23日收到修改稿)

实验测量了重力驱动下的玻璃珠颗粒样品通过不同倾角和孔径的圆形孔洞的卸载流量. 发现无论孔径大小, 流量均与倾角的余弦呈良好的线性关系; 线性外推得到的零流量角, 即流量休止临界角随颗粒粒径与孔洞直径之比的减小而线性增加; 在无穷大孔径极限下, 此临界角在 Bagnold 角的误差范围内与样品的安息角一致. 这些结果表明流量随倾角余弦线性变化的经验公式能揭示临界角的行为和特性, 这是参数随倾角变化的 Beverloo 公式所不能描述的.

**关键词:** 颗粒物质, 倾斜孔洞流, Beverloo 公式

**PACS:** 45.70.-n, 47.57.Gc

## 1. 引言

当颗粒物质从其装载料仓底部的一圆形孔洞流出时, 流量只与孔洞直径  $D$  有关, 几乎不受颗粒填充高度  $h$ , 密度  $\rho$ , 和料仓直径  $\phi$  的影响. 人们早在远古就知道这个现象, 并用来制作计时沙漏<sup>[1,2]</sup>. 颗粒孔洞流 (granular orifice flow, GOF) 一般是指图 1(a) 所示意的, 料仓固定且孔洞面为水平的情况, 这在生活和工业中经常遇见, 如粮仓和矿料卸载等, 我们称之为水平孔洞流. 当前广泛认为水平孔洞流的流量  $Q_0$  在很好的精度下满足 Beverloo 等提出的经验公式<sup>[3]</sup>

$$Q_0 = C_0 \rho g^{1/2} (D - k_0 d)^{5/2}, \quad (1)$$

其中  $g$  是重力加速度,  $d$  是颗粒的平均粒径,  $C_0$  和  $k_0$  是常数. 尽管对这个相当稳定的流量以及 Beverloo 公式有一些基于自由下落拱 (free fall Arch, FFA) 假设下的模型理论<sup>[1]</sup>, GOF 行为性质的物理解释和孔洞附近的质量与流场分布目前仍不清楚. 近年来, 颗粒物理领域开展了一些与水平情形不同的实验研究, 如允许侧壁圆筒上下滑动的悬浮壁 GOF<sup>[4]</sup>, 或孔洞面非水平的倾斜 GOF<sup>[5]</sup>, 分别如图 1(b), (c) 所示. 另外, 如果让颗粒依次流经两个孔

洞, 其间的流动还可出现稀疏流和密集流两种流动状态<sup>[6,7]</sup>, 当孔径足够小时, 流动会被阻塞停止<sup>[8]</sup>. 由于 GOF 的这些现象与公路上的车流现象有些相似, 它还常被用来模拟和研究交通问题<sup>[9-11]</sup>.

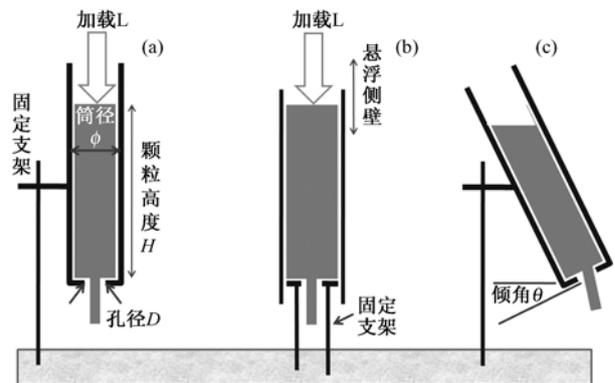


图 1 (a) 水平孔洞流; (b) 允许侧壁圆筒上下滑动的悬浮壁孔洞流; (c) 倾斜孔洞流

通常, 流体材料流量的大小都会在一定程度上与孔洞附近的压力有关. 为何 GOF 能屏蔽所有环境和力学因素的影响, 表现出只与孔径有关的稳定流量, 仍是一个带有一些神秘色彩的古老问题. 我们相信颗粒材料的这个独特性质与其强耗散行为有关<sup>[4]</sup>. 倾斜 GOF 的流量随孔洞面倾斜角  $\theta$  的增加而减小, 最终通过一个复杂的间歇流动区域过渡到流

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10904175), 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB731504), 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室开放研究基金 (批准号: sklhse-2008-C-01) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: pz177@yahoo.com.cn

量为零的休止状态<sup>[5]</sup>. 由于间歇流的干扰, 如何定义倾斜 GOF 的临界休止角  $\theta_c$ , 以及它与工程中自由颗粒斜面的安息角 (repose angle)  $\theta_r$  和最大稳定角 (angle of maximum stability)  $\theta_m$  的关系, 尚有待进一步研究澄清. 对较大的孔洞, 文献[5]的作者发现流量与  $\cos\theta$  呈线性关系,

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\cos\theta - 1}{\cos\theta_c - 1}, \quad (2)$$

其中的零流量角, 即临界休止角  $\theta_c = 141^\circ$  约比  $\theta_r$  小  $15^\circ$ . 可能是对较小孔洞测量的线性关系不是很好, 或  $\theta_c$  与  $\theta_r$  差别大的缘故, 他们没有对这个线性拟合作进一步的深入考察, 而是建议用下面的,  $C$  和  $k$  随倾角变化的 Beverloo 公式,

$$\begin{aligned} Q &= C\rho g^{1/2}(D - kd)^{5/2}, \\ C &= a_1 - a_2\cos\theta, \\ k &= (a_3 + a_4\cos\theta)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

拟合所有不同孔径的实验数据, 其中  $a_{1-4}$  是拟合常数. 由于 Beverloo 公式的零流量倾角  $\arccos(a_1/a_2)$  是与孔径无关的常数, 显然与临界流量休止角  $\theta_c$  的行为不符. 本文对不同孔径和倾角的 GOF 流量作了仔细测量, 发现线性(2)式对小孔径仍然有效, 并且发现用(2)式拟合得到的  $\theta_c$  与粒径-孔径比  $d/D$  呈很好的线性关系, 在大孔径极限下的线性外推值  $\theta_0 = \theta_c(d/D \rightarrow 0)$  与  $\theta_r$  或  $\theta_m$  非常接近. 这个结果表明(2)式中的  $\theta_c$  可以很好地理解为临界流量休止角. 注意线性拟合(2)和 Beverloo 拟合(3)并不完全相同, 但有趣的是, 在本文的实验精度下, 这两个经验公式都能很好地符合所有测量数据. Beverloo 公式的最大特色是强调流量  $Q$  与孔径  $D - kd$  的  $5/2$  幂律关系, 但不能揭示临界休止角这个重要的概念, 因此我们倾向于认为线性(2)式更具合理性. 倾斜 GOF 的这些特性对建立和检验颗粒物质动力学理论模型具有重要意义和挑战性, 因此值得今后在努力保证材料性质稳定的前提下(如温湿度和表面性质稳定), 开展进一步的精密测量, 澄清(2), (3)式之间的分歧等细节问题.

## 2. 实验装置和测量结果

实验采用横截面为  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$  的空心铝合金方柱作为料仓, 柱高  $722\text{ mm}$ , 壁厚  $3\text{ mm}$ , 颗粒样品采用直径  $d = 0.9 \pm 0.1\text{ mm}$  的球形玻璃珠. 实验过程中空气的相对湿度在  $60\% - 70\%$  之间. 料仓

顶部开放, 底部用  $100\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 4\text{ mm}$  的硬铝板封住, 铝板中心钻有尺寸为  $D$  的圆孔, 如图 2 中的插图所示. 测量对  $D = 4, 6, 8, 10, 14, 18, 20\text{ mm}$  等 7 块不同孔径的铝板分别进行. 料仓通过螺杆悬挂在牢固的角钢支架上, 并可绕螺杆旋转倾斜. 倾角  $\theta$  定义为圆孔所在的平面与外水平面的夹角, 如图 2 插图(a)和(b)所示, 倾角大小由一精度为  $0.1^\circ$  的倾角仪 (bevel box) 测出. 对于底部开孔的图 2 插图(a)装置, 当  $\theta$  大于  $45^\circ$  时, 受几何维度的限制, 颗粒流的时间较短, 不利于精确测量流量, 因此只用于测量了  $\theta \in [0^\circ, 45^\circ]$  范围内的颗粒流量, 而对于  $\theta > 45^\circ$  的情形, 采用图 2 插图(b)的装置, 即在料仓的侧壁, 距离底部约  $100\text{ mm}$  的高度开一个  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$  的方孔, 用以嵌入圆孔  $D$  所在的硬铝板. 注意这种侧开口实验装置可以测量倾角大于  $90^\circ$  的情况. 为尽量减小板厚度的影响, 孔洞外侧加工成了如图 2 插图(c)所示的楔形. 颗粒流量用精度为  $0.1\text{ g}$ , 采样频率  $15\text{ Hz}$  的电子秤动态采集. 为避免环境振动的干扰, 整个装置都固定在稳定的光学平台上. 实验开始前先将孔  $D$  塞住, 在料仓中倒入颗粒, 直至接近仓顶, 然后开放孔  $D$ , 同时通过电子秤采集流出质量随时间的变化  $M(t)$ . 每次测量均忽略采集初期的不稳定流流动, 依赖于料仓容量及流量的大小, 用于计算流量的采集时间为  $10 - 100\text{ s}$ , 典型的  $M(t)$  数据如图 3 所示, 实验得到的  $M(t)$  为很好的直线关系, 直线的斜率就是 GOF 的流量  $Q$ . 对于每一给定的  $D$  和  $\theta$  重复三次实验, 三次实验值的平均记为对应的流量  $Q(D, \theta)$ , 实验结果见图 2. 由于 GOF 流量很稳定, 实验重复性好, 三次测量的偏差均小于数据点图标的大小, 因此图 2 的实验数据点中没有标出误差棒.

实验发现对于不同孔径  $D$ , 流量  $Q$  均随着角度  $\theta$  的增大而逐渐减小, 并最终经过一段间隙流后停止. 与文献[5]一致, 我们测量的  $Q$  也与  $\cos\theta$  呈良好的线性关系. 注意对图 2 给出的 7 种不同孔径情况, 测量时倾角的下限都是零度, 对应于流量最大的水平孔洞流量  $Q_0$ , 而倾角的上限随  $D$  的减小而减小. 对于较小的  $D$  (如  $4\text{ mm}$  情况), GOF 在倾角较小时流量就停止了, 故测量时  $\cos\theta$  的取值范围也较小.

## 3. 流量公式和休止倾角

对于图 2 的实验结果, 如果以  $\theta = 0^\circ$  的水平

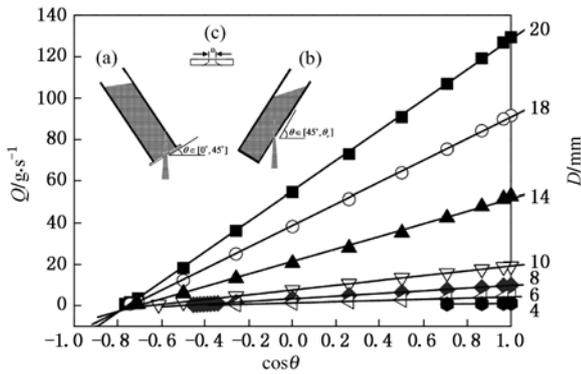


图2 不同孔洞尺寸  $D$  下流量  $Q$  随倾角余弦  $\cos\theta$  的变化关系, 实线为直线拟合. 插图: (a) 倾角小于  $45^\circ$  时采用的实验装置; (b) 倾角大于  $45^\circ$  时采用的实验装置; (c) 楔形孔洞示意图

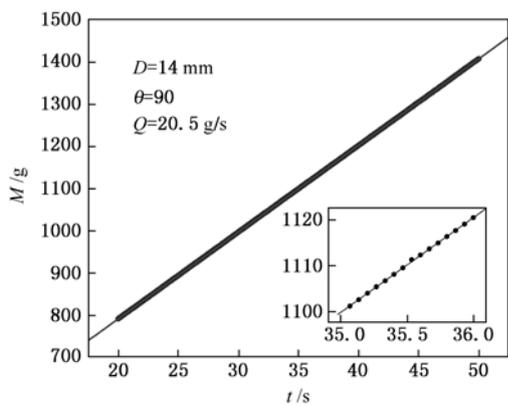


图3  $D=14\text{ mm}$ ,  $\theta=90^\circ$  时典型的  $M(t)$  数据 (已舍去初始不稳定流动); 插图为从主图中摘出的  $1\text{ s}$  (35—36 s) 内的  $M(t)$  数据, 同样呈良好的线性关系, 斜率与主图相同. 图中实线均为直线拟合

GOF 流量  $Q_0$  为单位, 并且要求流量  $Q$  关于  $\cos\theta$  线性以及  $\theta = \theta_c$  时流量等于零, 即得描述倾斜 GOF 流量的(2)式. 图 4(a) 是用(2)式对图 2 中不同孔径数据的拟合结果, 得到的  $\theta_c$  就是引言中讨论的流量休止倾角. 注意  $\theta_c$  一般不等于  $90^\circ$ , 即(2)式并不是孔洞面积在水平方向的投影效应 ( $90^\circ$  时投影面积为零, 但 GOF 流量并不为零). 另外与文献 [5] 不同, 我们在所有孔径下的流量测量值都与(2)式很好地符合, 并且拟合得到的  $\theta_c$  随粒径-孔径比  $d/D$  线性变化, 即

$$\theta_c = \theta_0 \left( 1 - k'_0 \frac{d}{D} \right), \quad (4)$$

其中常数  $\theta_0 = 153^\circ (\pm 3^\circ)$  是无限大孔径时的休止倾角,  $k'_0 = 1.7 (\pm 0.2)$ , 见图 4(b). 值得指出的是, 在 Bagnold 角误差范围内, 我们得到的  $\theta_0$  与静态颗粒堆的最大底角  $\theta_m$ , 或安息角  $\theta_r$  一致. (注意  $\theta_m$  和

$\theta_r$  是两个略微不同的角度, 一般指颗粒自由表面非常缓慢地倾斜到最大时, 发生崩塌的前后角, 其间有  $2^\circ$  左右的, 被称作 Bagnold 角的差别  $\Delta\theta = \theta_m - \theta_r$  [12]). 由于  $\theta_c$  是以线性方式逼近  $\theta_m$  或  $\theta_r$  的, 我们实验中最大孔径  $D = 20\text{ mm}$  的休止倾角仍比  $\theta_0$  小  $15^\circ$  左右. 因此直线(2)式与安息角的关系往往需要通过(4)式的外推得到, 我们的实验和文献 [5] 所考虑的最大孔径都没有大到能给出接近安息角的程度. 另外我们没有精确测量安息角  $\theta_m$  和最大稳定角  $\theta_r$ , 图 4b 给出的  $\theta_0$  与它们的细致关系还有待进一步研究. 由于  $\theta_0$  是从 GOF 流量数据通过流量(2)和(4)式拟合得到的, 属于材料表征动态性质的参数, 而倾斜 GOF 流是通过间歇流过渡到休止状态, 间歇流又与崩塌有些类似, 直觉上,  $\theta_0$  应该是安息角  $\theta_r$ . 但这个推测是否合理, 还需要进一步的实验来验证.

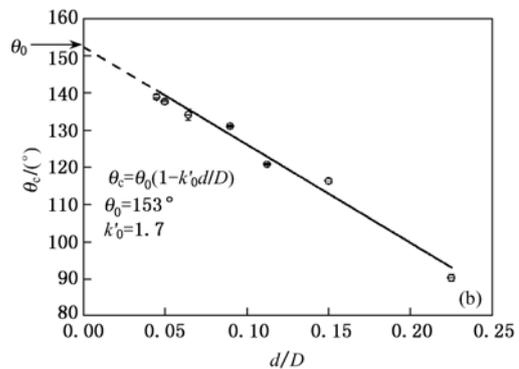
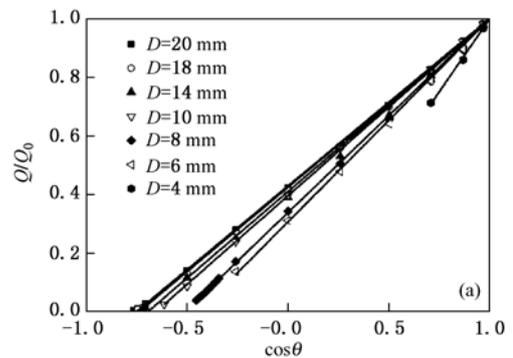


图4 (a) 用水平流量归一化的流量  $Q/Q_0$  随倾角余弦  $\cos\theta$  的变化关系, 实线为(2)式的拟合结果; (b) 临界流量休止角  $\theta_c$  随粒径-孔径比  $d/D$  的变化关系, 实线为直线拟合结果

当 GOF 没有倾斜时 ( $\theta = 0^\circ$ ), (2)式退化为  $Q = Q_0$ , 即 Beverloo 的水平 GOF(1)式. 对图 2 中  $\theta = 0^\circ$  的数据拟合得 Beverloo(1)式中的参数为  $C_0 = 0.55$ ,  $k_0 = 1.34$ , 接近文献 [1] 中的典型值. 注意这个  $k_0$  值与图 4(b) 中的  $k'_0$  大约小 20%, 应该视作两个表征倾斜 GOF 的独立参数.

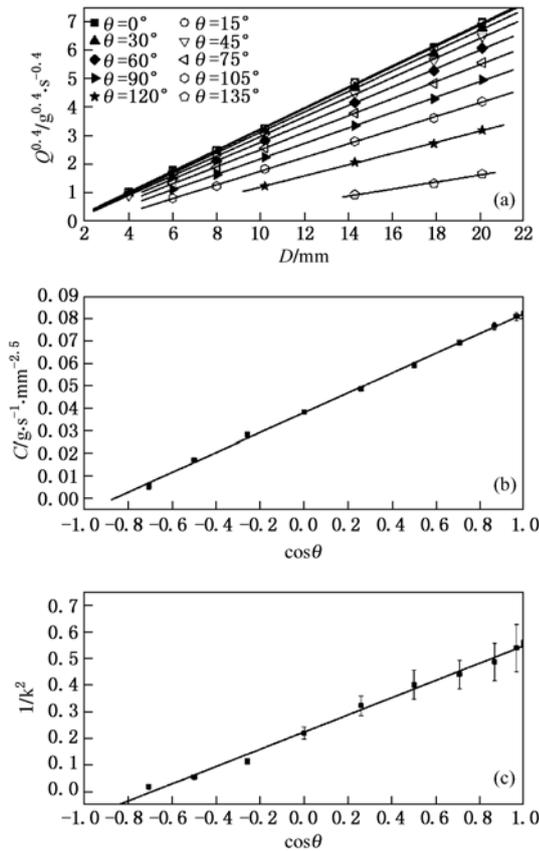


图5 用 Beverloo(3)式拟合图2 数据的结果 (a)不同倾角时  $Q^{0.4}$ 随  $D$ 的变化关系,实线为线性拟合;(b)(c)是 Beverloo 参数  $C$ 和  $k$ 随  $\cos\theta$ 的变化关系,及其直线拟合

利用(1),(2)式和(3)式可得直线和 Beverloo 两种拟合方法的流量比值为

$$\delta = \frac{C_0}{\cos\theta_c - 1} \frac{\cos\theta_c - \cos\theta}{a_1 - a_2 \cos\theta} \left( \frac{D - k_0 d}{D - d/\sqrt{a_3 + a_4 \cos\theta}} \right)^{5/2}, \quad (5)$$

由于  $\delta$  并不恒为 1,严格地讲这两种流量公式有一定的差别,但差别很小,超出了本文实验的测量精度.图2 的测量数据的确也可以很好地用(3)式拟合,拟合结果见图5.如果单从图4 和图5 中拟合公式与数据点的符合程度看,我们无法判断(2)式与(3)式究竟哪个更为合理.因此本文的结果并不与文献[5]建议的 Beverloo 公式矛盾,只是强调

Beverloo 公式不能体现 GOF 流量的休止倾角行为,及其与安息角的关系.考虑到 GOF 流量和休止倾角属于颗粒物质的基本性质,所涉及的不仅是一个简单的拟合问题,今后有必要进一步提高实验精度,澄清哪个公式才是更为正确的倾斜 GOF 流量公式.提高实验精度的主要难点在于对样品温湿度的控制,也许还有静电的影响,这些因素可能也是图4(b)中数据点出现涨落的原因.

#### 4. 结 论

本文仔细测量了不同倾斜角  $\theta$  和孔径  $D$  下,重力驱动的颗粒物质(玻璃珠)从圆形孔洞卸载的流量  $Q$ ,得到了下面几点结论:1)对所有孔径,无论大小,流量  $Q$  都与  $\cos\theta$  呈良好的线性关系.此结果不同于文献[5]认为的,该线性性质仅对大孔径情况适用.2)用随  $\cos\theta$  线性变化的流量公式拟合实验数据,发现拟合给出的流量休止临界角  $\theta_c$  随粒径-孔径比的减小而线性增加,并且在无穷大孔径极限下,其线性外推值  $\theta_0$  在 Bagnold 角的误差范围内与安息角一致.3)基于上述结果,我们建议用线性公式描写倾斜 GOF 的流量,因为它能揭示临界角  $\theta_c$  随孔径的变化规律,这是文献[5]推荐的 Beverloo 公式所不具备的.

尽管仍有诸如不同的流量公式那个更合理,  $\theta_0$  与安息角的偏离情况等细节问题有待澄清,本文的结果将有助于最终解决(如何理解颗粒孔洞流所表现独特行为)这个古老的问题.

最后,值得指出的是,颗粒流的流量大小对于颗粒实验的样品制备是个重要的问题<sup>[13]</sup>.通常,为了得到小流量的颗粒流,人们总是习惯在 Beverloo 公式的提示下去调节孔洞的大小,但由于颗粒尺寸的阻塞效应,颗粒流量常常无法调节到很小,更难连续调节.本文提到的倾斜颗粒孔洞流的实验装置提供了一种得到连续可调的小流量颗粒流的实用方法.

[1] Nedderman R M 1992 *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge: Cambridge University Press)  
 [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 713 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 713]

[3] Beverloo W A, Lenginger H A, van de Velde J 1961 *Chem. Eng. Sci.* **15** 260  
 [4] Peng Z, Zheng H P, Jiang Y M 2009 arXiv: 0908.0258v3 [cond-mat. soft]

- [5] Sheldon H G, Durian D J 2010 *Granular Matter* **12** 579  
*Granular flow '07* (Heidelberg: Springer)
- [6] Hou M, Chen W, Zhang T, Lu K, Chan C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 204301  
 [11] Tang X, Zhang X, Lu K 2004 *Traffic and Granular flow* (Hangzhou: Zhejiang University Press) (in Chinese) [唐孝威、张训生、陆坤权 2004 交通流与颗粒流 (杭州: 浙江大学出版社)]
- [7] Zhong J, Peng Z, Wu Y, Shi Q, Lu K, Hou M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6691 (in Chinese) [钟杰、彭政、吴耀宇、史庆藩、陆坤权、厚美瑛 2006 物理学报 **55** 6691]  
 [12] Nagel S R 1992 *Rev. Mod. Phys.* **64** 321
- [8] To K, Lai P K, Pak H K 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 71  
 [13] Kong W, Hu L, Zhang X, Yue G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 411 (in Chinese) [孔维姝、胡林、张兴刚、岳国联 2010 物理学报 **59** 411]
- [9] Kerner B S, Rehborn H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4030
- [10] Appert-Rolland C, Chevoir F, Gondret P 2009 *Traffic and*

## Maximum ceasing angle of inclination and flux formula for granular orifice flow\*

Peng Zheng<sup>†</sup> Jiang Yi-Min

(School of Physical Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

(Received 8 November 2010; revised manuscript received 23 November 2010)

### Abstract

This work measured mass flux of a granular sample (glass beads) discharged from an inclined orifice for various inclination angles and orifice diameters. It is found that irrespective the orifice sizes, the fluxes all vary linearly with cosine of the inclination angle, and the linearly extrapolated angle of zero-flux, namely the critical angle of flow ceasing, increases linearly with ratio between grain and orifice diameter, tends to the angle of repose in the limit of infinite orifice diameter within an approximation of the Bagnold angle. The results show that the flux formula varying linearly with cosine of inclination angle is capable to reveal behaviors of the critical ceasing angle, a property that the Beverloo formula of which parameters vary with cosine of inclination angle can not describe.

**Keywords:** granular matter, inclined orifice flow, Beverloo formula

**PACS:** 45.70.-n, 47.57.Gc

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10904175), the National Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB731504) and Open Research Fund Program of State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering (Grant No. sklhse-2008-C-01)

<sup>†</sup> E-mail: pz177@yahoo.com.cn