

# 随机扰动下一般混沌系统的 $H_\infty$ 同步\*

涂俐兰<sup>†</sup> 柯超 丁咏梅

(冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室, 武汉大学, 武汉 430081)

(2010年8月9日收到; 2010年9月6日收到修改稿)

本文对随机扰动下的一般混沌系统进行了  $H_\infty$  控制同步研究, 其中扰动是布朗运动随机过程. 基于随机李雅普诺夫稳定性理论、线性矩阵不等式、Itô 公式以及  $H_\infty$  控制方法, 通过设置控制器, 从理论上提出了驱动系统和随机扰动下的响应系统的  $H_\infty$  渐近同步的新标准, 这些标准形式简单且易于用 Matlab 实现. 最后的数值模拟表明提出的理论结果的正确性和有效性.

**关键词:** 随机扰动,  $H_\infty$  同步, 线性矩阵不等式, Itô 公式

**PACS:** 68.37.-d, 31.15.xv, 61.66.DK

## 1. 引言

自混沌理论在 20 世纪 60 年代出现以来, 混沌便一直是许多学者研究的热点课题, 目前对于混沌控制与同步的研究已经遍及许多学科领域, 并取得了可喜的成果<sup>[1-6]</sup>. 研究混沌的目的主要是更清楚揭示混沌的本质, 刻画它的基本特征, 了解它的动力学性态, 力求对它加以控制和利用, 使之向着有益的方向发展为人类服务<sup>[7,8]</sup>.

在混沌发展历史上, Lorenz 在 1963 年提出 Lorenz 系统<sup>[9]</sup>, 开辟了混沌发展的新纪元. Lorenz 系统作为第一个混沌模型, 成为研究混沌的基石. 随着混沌研究的深入, 新的混沌系统不断的被发现. 比较有典型意义的混沌系统有: 1976 年 Rossler 提出的 Rossler 混沌系统<sup>[7]</sup>、1983 年 Chua 提出的著名的 Chua 电路<sup>[10]</sup>, 1999 年 Chen 等在混沌系统反控制研究中发现的 Chen 系统<sup>[11]</sup>, 2002 年 Lü 等发现的 Lü 系统和统一混沌系统<sup>[12]</sup>, 2004 年 Liu 等发现的 Liu 系统<sup>[13]</sup> 以及后来的科学工作者研究的各种对应的超混沌系统<sup>[14-17]</sup> 等等.

混沌系统不是孤立地生存在社会中, 具有一定的社会性, 当然就存在着扰动. 随机扰动在研究混沌的基础研究中起着重要的作用, 在具体函数形式中的随机干扰项具有非常丰富的内容. 扰动的存在会使得系统出现不稳定且难以控制等现象, 所以在

混沌系统的同步控制中必须要考虑如何减少扰动的影晌.

在已有的控制方法中,  $H_\infty$  控制方法<sup>[18]</sup> 是研究随机扰动系统一种非常有效的方法, 它的主要特点是: 用灵敏度函数的  $H_\infty$  范数作为性能指标 (或目标函数), 从而将抗干扰问题化为求解使闭环稳定并且使相应的  $H_\infty$  范数指标最小的输出反馈控制器, 然后针对属于一个有限能量的信号集的干扰信号, 设计出一个控制器使系统闭环稳定而且干扰对期望输出的影响最小<sup>[18]</sup>. 近年来, 利用  $H_\infty$  方法研究扰动下的混沌系统的控制与同步已经取得了一些可喜的成果<sup>[19-23]</sup>. Yan<sup>[20]</sup> 对超 Rössler 系统进行了  $H_\infty$  控制研究, Hou 等<sup>[21]</sup> 采用  $H_\infty$  方法去研究一类扰动下的混沌系统的混沌同步问题, 杨东升等<sup>[22]</sup> 利用模糊自适应的  $H_\infty$  方法对参数未知的时滞混沌系统的同步提出了新的标准, 而 Park 等<sup>[23]</sup> 也用  $H_\infty$  方法研究了时滞混沌系统的同步问题.

在上述研究中, 考虑的只是响应系统受到了外部干扰. 本文将利用  $H_\infty$  方法研究一般混沌系统和外部干扰和随机干扰同时存在情况下的响应系统的同步问题, 提出驱动系统和响应系统同步的新标准. 因为对于本文的混沌系统而言, 不仅同时考虑外部干扰和随机干扰, 而且考虑的也是一般的混沌系统, 所以我们的研究更具有代表性.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60904060), 冶金工业过程系统科学湖北省重点实验室开放基金 (批准号: C201010) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: tulilan2002@163.com

## 2. 问题描述

设一般混沌系统的驱动系统为

$$dx(t) = (Ax(t) + F(x(t)))dt, \quad (1)$$

其中  $x(t)$  是系统状态,  $A$  为适当维数的实常数矩阵,  $F(x(t))$  是有界的非线性函数, 且满足

$$\begin{aligned} & \|F(x_1(t)) - F(x_2(t))\| \\ & \leq \|L_1(x_1(t) - x_2(t))\|, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $L_1$  是适当维数的实常数矩阵.

设扰动下的响应系统为

$$\begin{aligned} dy(t) = & ((Ay(t) + F(y(t))) + u(t) \\ & + Cv(t))dt + H(t, (y(t) \\ & - x(t)))dw(t), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $C$  是适当维数的实常数矩阵,  $u(t)$  是控制输入,  $v(t)$  是外部扰动,  $w(t)$  是随机扰动, 它是布朗运动随机过程,  $H(t, (y(t) - x(t)))$  是有界非线性函数, 且满足

$$\begin{aligned} & \|H(t, (y(t) - x(t)))\| \\ & \leq \|L_2(y(t) - x(t))\|, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $L_2$  是适当维数的实常数矩阵.

现令  $e(t) = y(t) - x(t)$ ,  $\bar{F}(e(t)) = F(y(t)) - F(x(t))$ , 则下列式子成立:

$$\begin{aligned} \| \bar{F}(e(t)) \| & = \| F(y(t)) - F(x(t)) \| \\ & \leq \| L_1 e(t) \|, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\| H(t, e(t)) \| \leq \| L_2 e(t) \|, \quad (6)$$

且

$$\begin{aligned} de(t) = & (A(y(t) - x(t)) + F(y(t)) \\ & - F(x(t)) + u(t) + Cv(t))dt \\ & + H(t, (y(t) - x(t)))dw(t), \end{aligned} \quad (7)$$

更进一步地, 有

$$\begin{aligned} de(t) = & (Ae(t) + \bar{F}(e(t)) + u(t) + Cv(t))dt \\ & + H(t, e(t))dw(t) \end{aligned} \quad (8)$$

和

$$\bar{F}^T(e(t)) \bar{F}(e(t)) \leq e^T(t) L_1^T L_1 e(t). \quad (9)$$

为了更好地说明本文的结果, 我们给出以下两个定义:

**定义 1** 如果系统(1)和系统(3)通过设置适当的控制器  $u(t)$ , 满足

$$E\{ \|y(t) - x(t)\|^2 \} \rightarrow 0, (t \rightarrow +\infty), \quad (10)$$

则称响应系统(3)与驱动系统(1)达到均方渐近同步.

**定义 2** ( $H_\infty$  同步<sup>[24]</sup>) 对于给定的扰动衰减

系数  $r$ , 驱动系统(1)和响应系统(3)是  $H_\infty$  同步的, 如果下面的条件成立:

1). 若外部扰动  $v(t) = 0$ , 设置合适的控制器  $u(t)$ , 同步误差系统(6)是均方渐近稳定的;

2). 若外部扰动  $v(t) \neq 0$ , 在初始条件为 0 的条件下, 有

$$\|e\|_{E_2} < r \|v\|_2, \quad (11)$$

其中  $\|e\|_{E_2} = \|E(\cdot)\|_2$ , 而且  $E(\cdot)$  表示数学期望算子.

在后面主要结果中, 我们需要用到线性矩阵不等式, 即对实矩阵  $M = M', R = R', N$ , 下列条件是等价的<sup>[25]</sup>:

$$M + NR^{-1}N' < 0; \begin{bmatrix} M & N \\ N' & -R \end{bmatrix} < 0.$$

混沌系统的同步控制是近 20 年来控制理论界的热点研究方向之一, 引起了众多学者的关注, 但是关于随机扰动下混沌系统的  $H_\infty$  同步控制问题, 相关的研究成果并不多. 第 3 节将通过随机李雅普诺夫稳定性理论、线性矩阵不等式、Itô 公式以及  $H_\infty$  控制方法, 通过设置控制器, 从理论上对驱动系统(1)和随机扰动下的响应系统(3)的  $H_\infty$  渐近同步进行了分析.

## 3. 随机扰动下一般混沌系统的 $H_\infty$ 渐近同步分析

对于系统(8), 首先, 我们将设置控制器为  $u(t) = Ke(t)$ , 其中  $K$  是适当维数的未知矩阵, 使得在  $v(t) = 0$  的情况下, 系统(8)在原点处达到均方渐近稳定. 构造 Lyapunov 函数为

$$V(t, e(t)) = e^T(t)Pe(t), \quad (12)$$

其中  $P$  为未知的正定对称矩阵. 现对  $V(t, e(t))$  求微分, 并应用 Itô 公式, 我们有

$$\begin{aligned} dV(t, e(t)) & = d(e^T(t)Pe(t)) \\ & = de^T(t)Pe(t) + e^T(t)Pde(t) \\ & = (e^T(t)A^T + \bar{F}^T(e(t)) \\ & \quad + e^T(t)K^T)Pe(t)dt \\ & \quad + H^T(t, e(t))Pe(t)dw(t) \\ & \quad + e^T(t)P(Ae(t) \\ & \quad + \bar{F}(e(t)) + Ke(t))dt \\ & \quad + e^T(t)PH(t, e(t))dw(t) \\ & = (e^T(t)(A^T P + PA)e(t) \\ & \quad + \bar{F}^T(e(t))Pe(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + e^T(t)P\bar{F}(e(t)) + e^T(t)K^TPe(t) \\
 & + e^T(t)PKe(t) dt \\
 & + H^T(t,e(t))Pe(t)dw(t) \\
 & + e^T(t)PH(t,e(t))dw(t) \\
 = & (e^T(t)(A^TP + PA + K^TP + PK)e(t) \\
 & + \bar{F}^T(e(t))Pe(t) + e^T(t)P\bar{F}(e(t)))dt \\
 & + H^T(t,e(t))Pe(t)dw(t) \\
 & + e^T(t)PH(t,e(t))dw(t) \\
 = & (e^T(t)(A^TP + PA + K^TP + PK)e(t) \\
 & + \bar{F}^T(e(t))Pe(t) + e^T(t)P\bar{F}(e(t)))dt \\
 & + H^T(t,e(t))PH(t,e(t))dt \\
 & + 2e^T(t)PH(t,e(t))dw(t) \\
 = & LV(t,e(t))dt + 2e^T(t)PH(t,e(t))dw(t),
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 LV(t,e(t)) = & e^T(t)(A^TP + PA + K^TP + PK)e(t) \\
 & + \bar{F}^T(e(t))Pe(t) + e^T(t)P\bar{F}(e(t)) \\
 & + H^T(t,e(t))PH(t,e(t)).
 \end{aligned}$$

由不等式(9),再设

$$P < \lambda E (\lambda > 0 \text{ 为正数}), \quad (13)$$

我们有

$$\begin{aligned}
 & \bar{F}^T(e(t))Pe(t) + e^T(t)P\bar{F}(e(t)) \\
 = & - [P^{\frac{1}{2}}\bar{F}^T(e(t)) + P^{\frac{1}{2}}e(t)]^T \\
 & \times [P^{\frac{1}{2}}\bar{F}^T(e(t)) + P^{\frac{1}{2}}e(t)] \\
 & + \bar{F}^T(e(t))P\bar{F}(e(t)) + e^T(t)Pe(t) \\
 \leq & \bar{F}^T(e(t))P\bar{F}(e(t)) + e^T(t)Pe(t) \\
 \leq & \lambda \bar{F}^T(e(t))\bar{F}(e(t)) + e^T(t)Pe(t) \\
 \leq & \lambda e^T(t)L_1^T L_1 e(t) + e^T(t)Pe(t).
 \end{aligned}$$

类似地,根据不等式(6),可得

$$\begin{aligned}
 & H^T(t,e(t))PH(t,e(t)) \\
 \leq & \lambda (L_2 e(t))^T L_2 e(t) \\
 = & \lambda e^T(t)L_2^T L_2 e(t).
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 LV(t,e(t)) \leq & e^T(t)(A^TP + PA + K^TP + PK)e(t) \\
 & + \lambda e^T(t)L_1^T L_1 e(t) + e^T(t)Pe(t) \\
 & + \lambda e^T(t)L_2^T L_2 e(t).
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 LV(t,e(t)) \leq & e^T(t)(A^TP + PA + K^TP \\
 & + PK + P + \lambda L_1^T L_1 + \lambda L_2^T L_2)e(t).
 \end{aligned}$$

当不等式

$$A^TP + PA + K^TP + PK + P + \lambda L_1^T L_1 + \lambda L_2^T L_2 < 0 \quad (14)$$

时,我们有

$$LV(t,e(t)) < 0.$$

根据随机李雅普诺夫稳定性理论,闭环系统(8)是均方渐近稳定的.

以上分析表明,假设存在矩阵  $P, K$  和正数  $\lambda$ , 在没有外部干扰的条件下,误差系统(8)在条件(12),(13)以及(14)下达到均方渐近稳定,即驱动系统(1)和随机扰动下的响应系统(3)均方渐近同步.

以上我们讨论的主要是没有外部干扰的情况下,混沌系统的稳定性情况;下面将对具有外部干扰的情况下的系统(1)和(3)的  $H_\infty$  同步进行讨论.

给定扰动衰减水平  $r > 0$ , 同样设控制器为  $u(t) = Ke(t)$  (其中  $K$  是适当维数的待定矩阵),则

$$\begin{aligned}
 & \|e(t)\|_2^2 - r^2 v(t)_2^2 \\
 = & E \int_0^\infty (e^T(t)e(t) - r^2 v^T(t)v(t)) dt \\
 = & E \int_0^\infty [(e^T(t)e(t) - r^2 v^T(t)v(t)) dt \\
 & + d(e^T(t)Pe(t))] - Ee^T(\infty)Pe(\infty) \\
 \leq & E \int_0^\infty [(e^T(t)e(t) - r^2 v^T(t)v(t)) dt \\
 & + d(e^T(t)Pe(t))] \\
 = & E \int_0^\infty [(e^T(t)e(t) - r^2 v^T(t)v(t)) dt \\
 & + (e^T(t)A^T + \bar{F}^T(e(t)) + e^T(t)K^T \\
 & + v^T(t)C^T)Pe(t) dt \\
 & + H^T(t,e(t))Pe(t)dw(t) \\
 & + e^T(t)P(Ae(t) + \bar{F}(e(t)) + Ke(t) \\
 & + Cv(t))dt + e^T(t)PH(t,e(t))dw(t)] \\
 = & E \int_0^\infty [(e^T(t)e(t) + e^T(t)A^T Pe(t) \\
 & + e^T(t)K^T Pe(t) + e^T(t)PAe(t) \\
 & + e^T(t)PKe(t))dt \\
 & + (\bar{F}^T(e(t))Pe(t) + e^T(t)P\bar{F}(e(t)))dt \\
 & + (v^T(t)C^T Pe(t) + e^T(t)PCv(t))dt \\
 & + H^T(t,e(t))Pe(t)dw(t) \\
 & + e^T(t)PH(t,e(t))dw(t) \\
 & - r^2 v^T(t)v(t)dt] \\
 = & E \int_0^\infty [e^T(t)e(t) + e^T(t)A^T Pe(t) \\
 & + e^T(t)K^T Pe(t) + e^T(t)PAe(t) \\
 & + e^T(t)PKe(t) - r^2 v^T(t)v(t)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{F}^T(e(t))Pe(t) + e^T(t)P\bar{F}(e(t)) \\
 & + v^T(t)C^TPe(t) + e^T(t)PCv(t) \\
 & + H^T(t,e(t))PH(t,e(t)) ] dt \\
 \leq & E \int_0^\infty [ e^T(t)e(t) + e^T(t)A^TPe(t) \\
 & + e^T(t)K^TPe(t) + e^T(t)PAe(t) \\
 & + e^T(t)PKe(t) - r^2v^T(t)v(t) \\
 & + \lambda \bar{F}^T(e(t)) \bar{F}(e(t)) + e^T(t)Pe(t) \\
 & + v^T(t)C^TPe(t) + e^T(t)PCv(t) \\
 & + \lambda H^T(t,e(t))H(t,e(t)) ] dt \\
 \leq & E \int_0^\infty [ e^T(t)e(t) + e^T(t)A^TPe(t) \\
 & + e^T(t)K^TPe(t) + e^T(t)PAe(t) \\
 & + e^T(t)PKe(t) - r^2v^T(t)v(t) \\
 & + e^T(t)L_1^TL_1e(t) + e^T(t)Pe(t) \\
 & + v^T(t)C^TPe(t) + e^T(t)PCv(t) \\
 & + \lambda e^T(t)L_2^TL_2e(t) ] dt \\
 = & E \int_0^\infty [ e^T(t) (I + A^TP + K^TP \\
 & + PA + PK + P + \lambda L_1^TL_1 + \lambda L_2^TL_2) e(t) \\
 & - r^2v^T(t)v(t) \\
 & + v^T(t)C^TPe(t) + e^T(t)PCv(t) ] dt \\
 = & E \int_0^\infty \begin{pmatrix} e(t) \\ v(t) \end{pmatrix}^T \Xi \begin{pmatrix} e(t) \\ v(t) \end{pmatrix} dt,
 \end{aligned}$$

其中

$$\Xi = \begin{pmatrix} I + A^TP + PA + K^TP + PK + P + \lambda L_1^TL_1 + \lambda L_2^TL_2 & PC \\ C^TP & -r^2I \end{pmatrix}. \quad (15)$$

若要使  $\|e(t)\|_2^2 < r^2 \|v\|_2^2$  成立,则等价于  $\Xi < 0$ . 由线性矩阵不等式可知,

$$\begin{aligned}
 & I + A^TP + PA + K^TP + PK + P + \lambda L_1^TL_1 \\
 & + \lambda L_2^TL_2 + r^{-2}PCC^TP < 0, \quad (16)
 \end{aligned}$$

即为  $\Xi < 0$ . 此时,我们有驱动系统(1)和扰动下的响应系统(3)  $H_\infty$  同步.

条件(13)和(16)保证了误差系统(8)具有外部干扰时,  $\|e\|_{e_2} < r \|v\|_2$  能够成立. 综合前面的分析,根据定义1和定义2,可得系统(1)与系统

(3)在设置合适的控制器  $u(t) = Ke(t)$  下是  $H_\infty$  同步的.

由于条件(16)不是标准的线性矩阵不等式,它是很难验证的条件,所以我们需要给出它的另外一种表述形式.

设  $PK = Y$ , 则  $K = P^{-1}Y$  ( $Y$ 都是适当维数的矩阵),根据引理1,不等式(16)可改写为

$$\begin{aligned}
 & I + A^TP + PA + Y^T + Y + P + \lambda L_1^TL_1 + \lambda L_2^TL_2 + r^{-2}PCC^TP \\
 = & (I + P + A^TP + PA + Y^T + Y + r^{-2}PCC^TP) + \lambda L_1^TL_1 + \lambda L_2^TL_2 \\
 = & \begin{pmatrix} I + P + A^TP + PA + Y^T + Y + r^{-2}PCC^TP & L_1^T & L_2^T \\ & L_1 & 0 \\ & L_2 & 0 \end{pmatrix} < 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

不等式(17)是一个标准的线性矩阵不等式,而且很容易由 Matlab 中的 LMI 工具箱来计算.

#### 4. 数值模拟

为了说明在第3节中所给出的理论分析的正确

性和有效性,本节将用 Lorenz 系统<sup>[8]</sup>做数值模拟. 设驱动系统是 Lorenz 系统,该系统可表示为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(x(t)), \quad (18)$$

其中  $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix},$$

$$F(x(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix},$$

而且它的运行轨迹如图 1 所示.

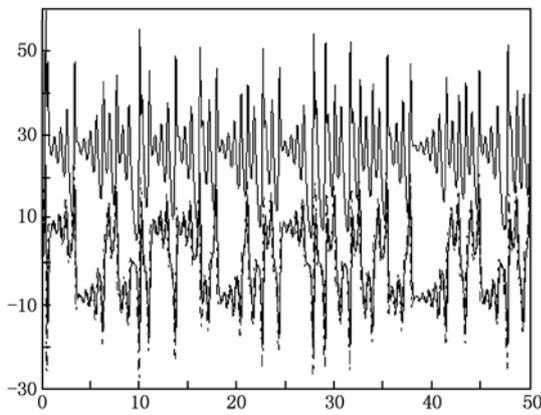


图 1 Lorenz 系统(18)的轨迹图

根据前面题设,我们可以将响应系统表示为

$$dy(t) = (Ay(t) + F(y(t)) + u(t) + Cv(t))dt + H(t, (y(t) - x(t)))dw(t), \quad (19)$$

其中  $C = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $H(t, (y(t) - x(t))) = (0.1(y_1(t) - x_1(t)), 0, 0)^T$ ,  $v(t)$  是具有均值为 0, 方差为 1 的正态分布的随机序列. 要使得 (18) 和 (19) 达到  $H_\infty$  同步, 建立它们的误差系统为

$$de(t) = (Ae(t) + \bar{F}(e(t)) + u(t) + Cv(t))dt + H(t, e(t))dw(t). \quad (20)$$

由前所述, 可令

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 60 \\ 60 & 60 & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r = 0.5$ . 下面我们分别考虑没有外部干扰和有外部干扰两种情况下的数值模拟, 在模拟中, 我们始终设驱动系统和响应系统的初始值分别为  $(x_1, x_2, x_3) = (-4, 10, -5)$  和  $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 1)$ .

1) 首先, 我们考虑没有外部扰动的情况, 即

$v(t) = 0$ . 图 2 是随机扰动下 Lorenz 系统的轨迹图. 比较图 1 和图 2, 可知 Lorenz 系统在随机扰动下轨迹变化很大.

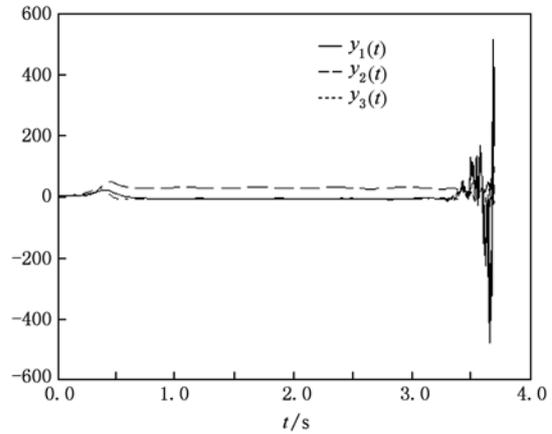


图 2 随机扰动下 Lorenz 系统(19)的轨迹图(  $v(t) = 0$  )

利用 Matlab 中的 LMI 工具, 再根据条件(13)和 (14), 可确定出正定矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 266.39.5 & 118.2253 & 116.0046 \\ 118.2253 & 182.5148 & -111.3310 \\ 116.0046 & -111.3310 & 536.7934 \end{pmatrix},$$

以及正数  $\lambda = 591.2760$ , 使得系统 (18) 和 (19) 在控制器

$$Ke(t) = \begin{pmatrix} -8.9999 & -19.0001 & -0.0001 \\ -19.0001 & -5.0000 & -0.0000 \\ -0.0001 & 0.0000 & -1.6666 \end{pmatrix} e(t)$$

的作用下达到均方渐近同步, 如图 3 所示.

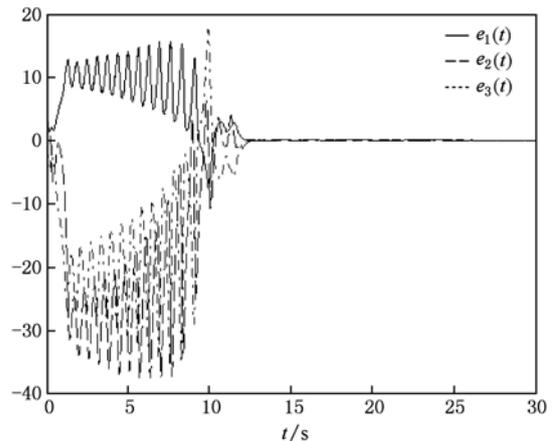


图 3 驱动系统和响应系统的误差轨迹图(  $v(t) = 0$  )

2)其次,我们考虑  $v(t) \neq 0$  的情况. 此时,响应系统同时受到随机扰动和外部干扰,它的轨迹图如图 4 所示. 在外部干扰下,图 4 完全不同于图 2.

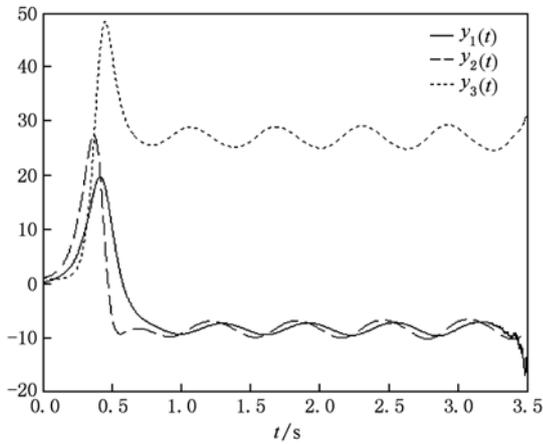


图 4 随机扰动和外部干扰下 Lorenz 系统的轨迹图 ( $v(t) \neq 0$ )

根据定理 3,同样利用 Matlab 中的 LMI 工具箱,可设矩阵

$$P = 10^7 \times \begin{pmatrix} 1.8783 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.8783 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.8763 \end{pmatrix},$$

$$Y = 10^8 \times \begin{pmatrix} 0.9391 & 0.3756 & -0.0000 \\ -9.0161 & -0.7514 & -0.0000 \\ -1.5027 & -1.5027 & -0.4383 \end{pmatrix},$$

以及正数  $\lambda = 10^7 \times 1.8783$ , 使得满足定理 3 中的条件,即存在矩阵  $P, Y$  和数  $\lambda$ , 使得 (18) 和 (19) 式达到  $H_\infty$  同步. 再由  $u(t) = P^{-1}Ye(t)$ , 可知此时我们可设控制器为

$$u(t) = Ke(t) = P^{-1}Ye(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 4.9996 & 1.9996 & -0.0001 \\ -48.0000 & -4.0002 & -0.0001 \\ -8.0003 & -7.9999 & -2.3335 \end{pmatrix} e(t).$$

利用此控制器,我们进行数值模拟,获得同步误差图以及驱动系统和响应系统的误差轨迹的均方二范数和外部扰动的均方二范数的比较图,如图 5、图 6 所示. 图 5 说明了两个系统很快达到同步,而图 6 表达了系统的误差随时间的推移满足关系:  $\|e(t)\|_{e_2} < r\|v(t)\|_2$ .

数值模拟 1) 和 2) 说明了根据前面所提出的  $H_\infty$  同步新标准,设置合适的控制器,可使得 Lorenz 系统(18)和扰动下的 Lorenz 系统(19)获得  $H_\infty$  同步,也证明了本文提出的理论结果的正确性和有效性.

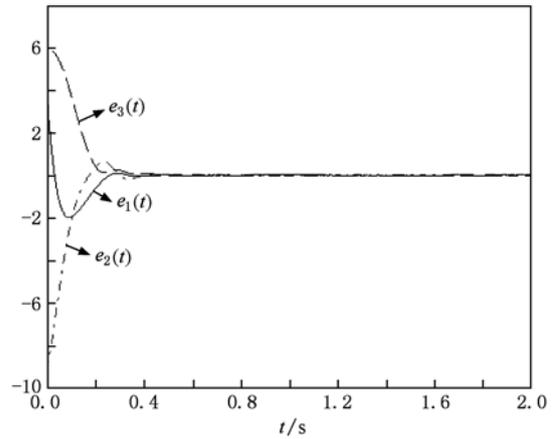


图 5 同步误差轨迹图 ( $v(t) \neq 0$ )

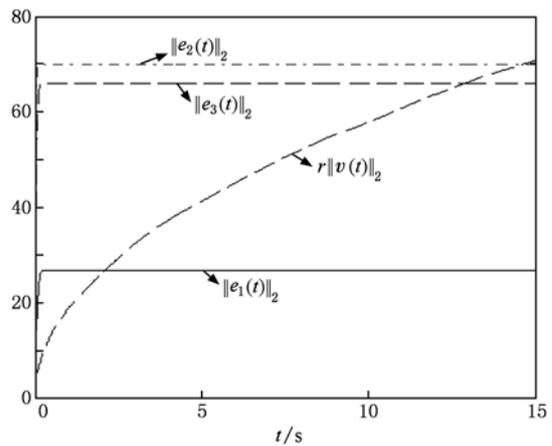


图 6 驱动系统和响应系统的误差轨迹和外部扰动的均方二范数比较图 ( $v(t) \neq 0$ )

## 5. 结 论

混沌系统的同步控制是近 20 年来控制理论界的热点研究方向之一,本文主要探讨了随机扰动下一般混沌系统的  $H_\infty$  控制同步问题. 由于本文不仅同时考虑外部干扰和随机干扰,而且考虑的系统是一般的混沌系统,所以我们的研究更具有代表性. 利用随机李雅普诺夫稳定性理论、线性矩阵不等式、Itô 公式以及  $H_\infty$  控制方法,通过设置控制器,本文从理论上提出了驱动系统和随机扰动下的混沌系统的  $H_\infty$  均方渐近同步的新标准,这些标准简单且易于实现,最后的数值模拟表明理论结果的正确性和有效性.

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Lett.* **64** 1196
- [2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rec. Let.* **64** 821
- [3] Tu L L, Lu J A 2005 *Chin. Phys.* **14** 1755
- [4] Cai G L, Tan Z M, Zhou W H, Tu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 (in Chinese) [蔡国梁、谭振梅、周维怀、涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]
- [5] Gong L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3502 (in Chinese) [龚礼华 2005 物理学报 **54** 3502]
- [6] Zhang H B, Yu Y B, Zhang J 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080509-1
- [7] Chen G R, Lv J H 2003 *Dynamics analysis, control and synchronization of Lorenz system family* (Beijing: Science Press) p2 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (北京: 科学出版社) 第 2 页]
- [8] Chen G, Dong X 1998 *From chaos to order: Methodologies, Perspectives and Application* (Singapore: World Scientific) p4
- [9] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [10] Chua L O, Komuro M, Matsumoto T 1986 *IEEE Trans. On Circuits & Systems - I* **33** 1072
- [11] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. of Bifur Chaos* **9** 1465
- [12] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. of Bifur Chaos* **12** 659
- [13] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 1031
- [14] Wu X J, Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese) [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [15] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6808 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2008 物理学报 **57** 6808]
- [16] Chen G P, Hao J B 2008 *Communications Technology* **41** 230 (in Chinese) [陈光平、郝加波 2008 通信技术 **41** 230]
- [17] Chen A M, Lu J A, Lv J H 2006 *Physics A* **364** 103
- [18] Zames G 1981 *IEEE Trans. Automatic Control* **26** 301
- [19] Wei R, Wang X Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3298 (in Chinese) [魏 荣、王行愚 2004 物理学报 **53** 3298]
- [20] Yan J J 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **21** 283
- [21] Hou Y Y, Liao T L, Yan J J 2007 *Physica A* **379** 81
- [22] Yang D S, Zhang H G, Zhao Y, Song C H, Wang Y C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1562 (in Chinese) [杨东升、张化光、赵琰、宋崇辉、王迎春 2010 物理学报 **59** 1562]
- [23] Park J H, Ji D H, Won S C, Lee S M 2008 *Applied Mathematics and Computation* **204** 170
- [24] Anton S 1992 *The  $H_\infty$  Control Problem* (New York: Prentice-Hall) p5
- [25] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V 1994 *Linear Matrix Inequalities in System*

# $H_\infty$ synchronization of general chaotic systems with random perturbations\*

Tu Li-Lan<sup>†</sup> Ke Chao Ding Yong-Mei

(Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

(Received 9 August 2010; revised manuscript received 6 September 2010)

## Abstract

In this paper, the  $H_\infty$  synchronization of general chaotic systems with random perturbations is investigated, in which perturbation is a random process of Brownian motion. Based on stochastic Lyapunov stability theory, linear matrix inequalities, and Itô formula and  $H_\infty$  control method combined with feedback control laws, some new asymptotic synchronization schemes are established which guarantee robust stochastic mean square asymptotical synchronization for drive system and noise-perturbed response system, as well as achieving a prescribed stochastic robust  $H_\infty$  performance level. These schemes are in a simple form and easy to work with Matlab. Finally, simulations show that the proposed results are correct and effective.

**Keywords:** random perturbation,  $H_\infty$  synchronization, linear matrix inequalities, Itô formula

**PACS:** 68.37.-d, 31.15.xv, 61.66.DK

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60904060) and the Open Foundation of Hubei Province Key Laboratory of Systems Science in Metallurgical Process (Grant No. C201010).

<sup>†</sup> E-mail: tulilan2002@163.com