

## 量子隐形传态的新方案

何锐<sup>1)†</sup> Bing He<sup>2)</sup>

1) (皖西学院材料与化工系, 六安 237012)

2) (Institute for Quantum Information Science, University of Calgary, Alberta T2N 1N4, Canada)

(2010年1月6日收到; 2010年9月23日收到修改稿)

提出一个量子隐形传态的新方案. 通过对一对压缩参数相同但相互独立的双模压缩真空态(1-2 和 3-4 量子态系统)中的 2-3 系统施行粒子数-相位的联合测量, 制备出另外两体系统(1-4 系统)的纠缠态作为纠缠源, 从而实现量子隐形传态.

**关键词:** 量子隐形传态, 双模压缩真空态, 纠缠态, 粒子数-相位测量

**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Hk

## 1. 引言

量子隐形传态 (quantum teleportation) 在量子通信及信息处理过程中扮演着一个重要的角色. 它是基于以下的物理思想: 借助于 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 粒子对的量子通道和经典通信, 可以将某个粒子的未知量子态 (即量子信息) 传送到远处, 使另一个粒子处于这个未知的量子态上, 而无需传送原始粒子本身. 1993 年, Bennett 等<sup>[1]</sup> 提出利用量子态的纠缠特性可以实现一个两态粒子的隐形传态的方案. 该开创性工作掀起了研究量子隐形传态的热潮. 实际上, 有限能级系统的隐形传态已被实验验证<sup>[2]</sup>. 另一方面, 这种分立量子态隐形传态思想已被推广到连续变量的隐形传态<sup>[3,4]</sup>. 范洪义<sup>[5]</sup> 的研究表明, 作为连续变量的 EPR 纠缠态表象  $|\eta\rangle_{12}$  可以直接被应用于量子隐形传态的研究.

双模压缩真空态在量子信息科学中比较常用, 实际上, 利用双模压缩真空态作为纠缠源或量子通道实现量子隐形传态是一种切实可行的方法. 1998 年, Furasawa 等<sup>[6]</sup> 根据 Braunstein 和 Kimble 提出的方案<sup>[4]</sup>, 证实了量子隐形传态的方法也能被应用于无限维 Hilbert 空间的纠缠态系统. 他们的工作同时表明, 利用一个双模压缩真空态组成的纠缠源可以隐形传递一个相干态. 在近期的研究结果中, Yan 等<sup>[7]</sup> 也提出了利用双模压缩真空态可以实现相干

态的隐形传递, 但是他们采用的是连续变量的 EPR 纠缠态表象  $|\eta\rangle_{12}$  作为 Bell 基. 宋同强<sup>[8]</sup> 的研究则指出, 借助于双模压缩真空态在 EPR 纠缠态表象中的表示, 可以利用双模压缩真空态作为量子通道实现任意的单模和双模量子态的远程传输.

本文是在 Furasawa 等<sup>[6]</sup> 工作的基础上展开的. 文献[6]提出的机理中一个显著特点是基于如下事实: 一个双模真空压缩态在压缩系数  $\lambda \rightarrow 1$  时是一个近似的 EPR 纠缠态. 但是, 一个双模压缩真空态在粒子数和相位上也是纠缠的. 自然会引出一个问题: 这个纠缠态也能被当作一个量子隐形传态的纠缠源么? 1999 年, Milburn 等<sup>[9]</sup> 的工作进一步表明, 通过粒子数-相位的联合测量这个纠缠特性也能被用于量子隐形传态. 但是他们的工作明显不足之处是压缩真空态的压缩系数作为乘积因子存在于终态 (输出态) 的 Fock 空间展开式的系数中而无法消除, 因此不能更为精确地实现量子隐形传态. 2002 年, 在 Kitagawa 等<sup>[10]</sup> 提出的方案中, 这个困难被成功地解决. 他们首先通过表述粒子数和与相位差的同时本征态在光子数基内给出了一个 Bell 测量的表达式  $|N, m\rangle$ , 然后提出了一个新颖的方法即通过执行粒子数-相位的 Bell 测量提取出纠缠源, 纠缠源的获得是从一对双模压缩真空态的交换中实现的.

在 Kitagawa 等<sup>[10]</sup> 的研究基础上, 本文提出一种量子隐形传态的新方案. 与文献[10]相仿的是通过对一对压缩参数相同但相互独立的双模压缩真空

†E-mail: jrql@yahoo.cn

态(1-2 和 3-4 系统)中的 2-3 系统施行粒子数和相位的联合测量,巧妙地制备出或提取出另外两体系统(1-4 系统)的纠缠态作为纠缠源,从而实现量子隐形传态;与文献[10]不同之处在于,文献[10]中 Bell 测量所获取的经典信息是两个可测得的光子数  $N$  和  $m$ ,而在本文提出的方案中 Bell 测量既有粒子数测量也有相位测量(相位投影),所获得的经典信息既有粒子数又有相位信息,目前相位测量在量子光学中已被实现<sup>[11]</sup>. 因此,本文提出的方案可以使传输的量子态更加精确,通过数学表达形式也可以看出这一点.

### 2. 相关物理条件及概念

首先简单介绍双模压缩真空态. 双模压缩真空态在实验上可以用光学参量振荡器(optical parameter oscillator)直接产生,这是一种比较成熟的技术且容易实现<sup>[12]</sup>. 双模压缩真空态可记为

$$|\lambda\rangle_{ab} = \text{sech}\mu e^{a^\dagger b^\dagger \tanh\mu} |0,0\rangle = (1 - \lambda^2)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n |n\rangle_a |n\rangle_b, \quad (1)$$

其中  $\lambda$  是压缩系数,  $\lambda = \tanh\mu$ .

对于一个离散系统,存在着一个很重要的正则共轭对,这就是粒子数和相位算符<sup>[13,14]</sup>. 一个  $N+1$  能级系统粒子数算符  $\hat{N}$  有谱  $Z_N = \{0, 1, \dots, N\}$  和本征态  $|n\rangle$  ( $n \in Z_N$ ). 在区间  $[0, 2\pi)$ , 可以定义指数相位算符

$$e^{in\hat{P}} = \sum_{m \in Z_N} |m+n\rangle \langle m| \quad (n \in Z_N), \quad (2)$$

其中  $e^{in\hat{P}}$  是么正算符,因而  $\hat{P}$  是 Hermite 的.  $\hat{P}$  具有本征谱  $\varepsilon_N = \{2m\pi/(N+1), m=0, 1, \dots, N\}$  及相应的本征态

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n \in Z_N} e^{-in\theta} |n\rangle \quad (\theta \in \varepsilon_N). \quad (3)$$

$\hat{P}$  和  $\hat{N}$  的对易关系很复杂,表现在它们满足 Weyl 对易关系上,

$$e^{i\theta\hat{N}} e^{in\hat{P}} e^{-i\theta\hat{N}} e^{-in\hat{P}} = e^{in\theta}. \quad (4)$$

对于两个  $N+1$  能级系统  $(a, b)$ , 相位算符可以定义量子加法  $\hat{P}_{ab} = \hat{P}_a - \hat{P}_b = (\hat{P}_a - \hat{P}_b) \bmod 2\pi$ , 同样可以定义粒子数和  $\hat{N}_a + \hat{N}_b = (\hat{N}_a + \hat{N}_b) \bmod N$ . 相位差与粒子数和是对易的,因而存在共同的本征态

$$|\theta_{ab}, n_{ab}\rangle = e^{-i\hat{N}_a \hat{P}_b} |\theta_{ab}\rangle_a \otimes |n_{ab}\rangle_b, \quad (5)$$

其中  $|\theta_{ab}\rangle_a$  是粒子  $a$  相位算符  $\hat{P}_a$  的本征态,本征值为  $\theta_{ab} \in \varepsilon_N$ ; 而  $|n_{ab}\rangle_b$  是粒子  $b$  粒子数算符  $\hat{N}_b$  的本征态,本征值  $n_{ab} \in Z_N$ .

### 3. 量子隐形传态方案

如图 1 所示, Alice 和 Bob 分享 1 和 4 量子态的纠缠态,这个纠缠态是由 Clare 通过在两个双模真空态 1-2 和 3-4 系统上进行粒子数-相位测量制备的. 然后 Alice 也对量子态 1 和目标态系统  $T$  进行相位-粒子数测量操作. Bob 先接受 Clare 传递过来的经典信息,接着收到 Alice 传递过来的测量信息(经典的),然后 Bob 执行相应的么正变换操作,就能由

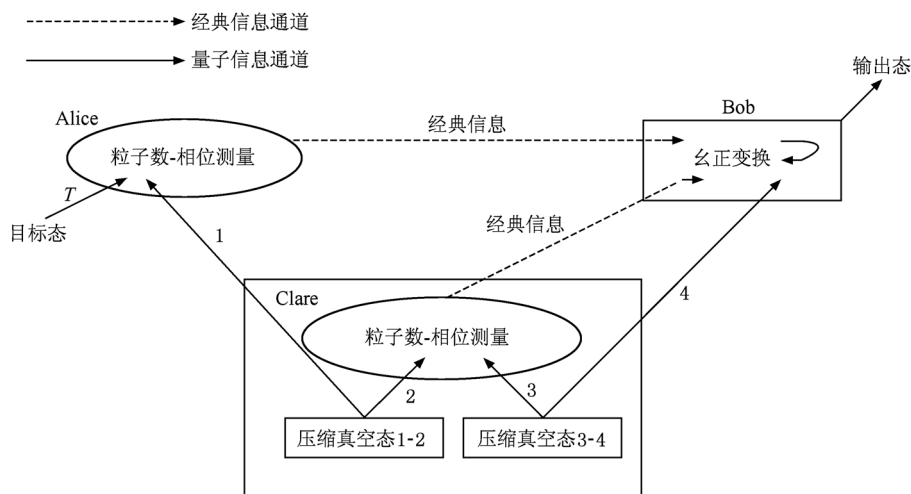


图 1 量子隐形传态原理示意图

量子态 4 重新构建目标态  $T$ .

实现具体方案必须做如下计算: 首先设两个压缩真空态  $|\lambda\rangle_{12}$  和  $|\lambda\rangle_{34}$  的压缩系数  $\lambda$  是相同的, 则

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle_{12} |\lambda\rangle_{34} &= (1 - \lambda^2) \sum_{n_{12}=0}^{\infty} \lambda^{n_{12}} |n_{12}\rangle_1 \\ &\quad \otimes |n_{12}\rangle_2 \sum_{n_{34}=0}^{\infty} \lambda^{n_{34}} |n_{34}\rangle_3 \otimes |n_{34}\rangle_4 \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{k=0}^N |k\rangle_1 \\ &\quad \times |N - k\rangle_3 |k\rangle_2 |N - k\rangle_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Clare 对 2-3 系统做一个相位差和粒子数和的联合测量, 其测量 (或操作) 可写为

$$\begin{aligned} &{}_3\langle n_{23} | \otimes_2 \langle \theta_{23} | e^{i\hat{N}_2 \hat{P}_3} (1 - \lambda^2) \\ &\quad \times \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{k=0}^N |k\rangle_1 |N - k\rangle_3 |k\rangle_2 |N - k\rangle_4 \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{k=0}^N {}_3\langle n_{23} | \otimes_2 \langle \theta_{23} | \\ &\quad \times e^{ik\hat{P}_3} |k\rangle_1 |N - k\rangle_3 |k\rangle_2 |N - k\rangle_4. \end{aligned} \quad (7)$$

注意到  $e^{ik\hat{P}_3} |N - k\rangle_3 = |N\rangle_3$ , 则 (7) 式可写为

$$\begin{aligned} &{}_3\langle n_{23} | \otimes_2 \langle \theta_{23} | e^{i\hat{N}_2 \hat{P}_3} (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \\ &\quad \times \sum_{k=0}^N |k\rangle_1 |N - k\rangle_3 |k\rangle_2 |N - k\rangle_4 \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{k=0}^N {}_3\langle n_{23} | \\ &\quad \otimes_2 \langle \theta_{23} | |k\rangle_1 |N\rangle_3 |k\rangle_2 |N - k\rangle_4 \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{k=0}^N {}_3\langle n_{23} | N\rangle_3 \\ &\quad \times {}_2\langle \theta_{23} | k\rangle_2 |k\rangle_1 |N - k\rangle_4. \end{aligned} \quad (8)$$

由于  $k$  的取值是  $0 \rightarrow N$ , 故  ${}_2\langle \theta_{23} | k\rangle_2 = \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{N+1}}$ , 则有

$$\begin{aligned} &{}_3\langle n_{23} | \otimes_2 \langle \theta_{23} | e^{i\hat{N}_2 \hat{P}_3} (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \\ &\quad \times \sum_{k=0}^N |k\rangle_1 |N - k\rangle_3 |k\rangle_2 |N - k\rangle_4 \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{N=0}^{\infty} \lambda^N \sum_{k=0}^N \delta_{n_{23}, N} \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{N+1}} |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4 \\ &= (1 - \lambda^2) \sum_{k=0}^{n_{23}} \lambda^{n_{23}} \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{n_{23}+1}} |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4. \end{aligned} \quad (9)$$

可见 Clare 通过对两个压缩真空态所做的两体测量制造了一个最大纠缠态, 即叠加态中各项系数的绝

对值相等的纠缠态. 同时, Clare 可以把测量得到  $n_{23}$  和  $\theta_{23}$  通过经典通道传递给 Bob. 再施行 Alice 的操作 (测量), 设目标态为

$$|\psi\rangle_T = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_T. \quad (10)$$

那么我们可以做如下的计算:

$$\begin{aligned} &{}_T\langle n_{1T} | \otimes_1 \langle \theta_{1T} | e^{i\hat{N}_1 \hat{P}_T} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_T (1 - \lambda^2) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n_{23}} \lambda^{n_{23}} \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{n_{23}+1}} |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4 \\ &= \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}}}{\sqrt{n_{23}+1}} {}_T\langle n_{1T} | \otimes_1 \langle \theta_{1T} | \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{k=0}^{n_{23}} e^{ik\hat{P}_T} e^{i\theta_{23}k} |n\rangle_T |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4 \\ &= \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}}}{\sqrt{n_{23}+1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{k=0}^{n_{23}} e^{ik\theta_{23}} {}_T\langle n_{1T} | n \\ &\quad + k\rangle_{T1} \langle \theta_{1T} | k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4. \end{aligned} \quad (11)$$

由于  $k$  的取值是从  $0 \rightarrow n_{23}$ , 故  $\langle \theta_{1T} | k\rangle_1 = \frac{e^{ik\theta_{1T}}}{\sqrt{n_{23}+1}}$ ,

则 (11) 式又可写为

$$\begin{aligned} &{}_T\langle n_{1T} | \otimes_1 \langle \theta_{1T} | e^{i\hat{N}_1 \hat{P}_T} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_T (1 - \lambda^2) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n_{23}} \lambda^{n_{23}} \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{n_{23}+1}} |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4 \\ &= \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}}}{\sqrt{n_{23}+1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{k=0}^{n_{23}} e^{ik\theta_{23}} \\ &\quad \times \delta_{n_{1T}, n+k} \frac{e^{ik\theta_{1T}}}{\sqrt{n_{23}+1}} |n_{23} - k\rangle_4 \\ &= \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}}}{n_{23}+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i(n_{1T}-n)(\theta_{23}+\theta_{1T})} \\ &\quad \times |n_{23} - n_{1T} + n\rangle_4. \end{aligned} \quad (12)$$

将 (12) 式整理成下列形式:

$$\begin{aligned} &{}_T\langle n_{1T} | \otimes_1 \langle \theta_{1T} | e^{i\hat{N}_1 \hat{P}_T} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_T (1 - \lambda^2) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n_{23}} \lambda^{n_{23}} \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{n_{23}+1}} |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4 \\ &= \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}}}{n_{23}+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in_{23}(\theta_{23}+\theta_{1T})} \\ &\quad \times e^{-i(n_{23}-n_{1T}+n)(\theta_{23}+\theta_{1T})} |n_{23} - n_{1T} + n\rangle_4 \\ &= \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}} e^{in_{23}(\theta_{23}+\theta_{1T})}}{n_{23}+1} e^{-i(\theta_{23}+\theta_{1T})\hat{N}_4} \end{aligned}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n_{23} - n_{1T} + n\rangle_4. \quad (13)$$

由指数相位算符的定义,得

$$e^{i(n_{23}-n_{1T})\hat{P}_4} |n\rangle_4 = |n_{23} - n_{1T} + n\rangle_4. \quad (14)$$

所以(13)式可进一步写为

$$\begin{aligned} & {}_T\langle n_{1T} | \otimes_1 \langle \theta_{1T} | e^{i\hat{N}_1\hat{P}_T} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_T (1 - \lambda^2) \\ & \times \sum_{k=0}^{n_{23}} \lambda^{n_{23}} \frac{e^{i\theta_{23}k}}{\sqrt{n_{23} + 1}} |k\rangle_1 |n_{23} - k\rangle_4 \\ & = \frac{(1 - \lambda^2) \lambda^{n_{23}} e^{in_{23}(\theta_{23} + \theta_{1T})}}{n_{23} + 1} e^{-i(\theta_{23} + \theta_{1T})\hat{N}_4} \\ & \times e^{i(n_{23}-n_{1T})\hat{P}_4} \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle_4. \end{aligned} \quad (15)$$

这样 Bob 接收到来自 Alice 的信息以后,获取

了  $\theta_{1T}$  和  $n_{1T}$  的信息与变换  $e^{-i(\theta_{23} + \theta_{1T})\hat{N}_4}$  和  $e^{i(n_{23} - n_{1T})\hat{P}_4}$  的信息,他对手中的第 4 个量子态做一个么正变换,就可以由这些信息重建目标态.

#### 4. 结 论

根据分析可知,我们提出的这种方案确实提供了量子隐形传态的一个新思路,目标态可以通过么正变换被精确地复制为量子态 4. Kitagawa 等提出的方案只能部分实现原来的态,而我们的方案可以做到保真度为 1. 但是实现这一连续的么正变换目前在实验上可能还有一定难度. 随着量子信息科学的发展,期望将来人们可以利用这个方案从实验上得到实现.

[1] Bennett C H, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895  
 [2] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, Eible M, Weinfurter H, Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575  
 [3] Vaidman L 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1473  
 [4] Braunstein S L, Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869  
 [5] Fan H Y 2002 *Phys. Lett. A* **294** 253  
 [6] Furusawa A, Sørensen J L, Braunstein S L, Fuchs C A, Kimble H J, Polzik E S 1998 *Science* **282** 706  
 [7] Yan W, Zhang W J 2007 *Chin. Phys.* **16** 2584

[8] Song T Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3358 (in Chinese) [宋同强 2004 物理学报 **53** 3358]  
 [9] Milburn G J, Braunstein S L 1999 *Phys. Rev. A* **60** 937  
 [10] Kitagawa A, Yamamoto K 2002 *Phys. Rev. A* **66** 052312  
 [11] Sun F W, Liu B H, Gong Y X, Huang Y F, Ou Z Y, Guo G C 2008 *Europhys. Lett.* **82** 24001  
 [12] Xiao M, Wu L A, Kimble H J 1988 *Opt. Lett.* **13** 476  
 [13] Yu S X 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 780  
 [14] Yu S X, Zhang Y D 1998 *J. Math. Phys.* **39** 5260

## A new quantum teleportation protocol

He Rui<sup>1)†</sup> Bing He<sup>2)</sup>

1) (*Department of Material and Chemical Engineering, West Anhui University, Liuan 237012, China*)

2) (*Institute for Quantum Information Science, University of Calgary, Alberta T2N 1N4, Canada*)

(Received 6 January 2010; revised manuscript received 23 September 2010)

### Abstract

A new quantum teleportation protocol is addressed in this article. By performing the joint measurement of number-phase on a pair of independent two-mode squeezed vacuum states (1-2 and 3-4 systems), whose squeezed parameters are the same, the entangled states of the other two bodies (1-4 systems) as the entangled resource are prepared. Thus the quantum teleportation is successfully realized.

**Keywords:** quantum teleportation, two-mode squeezed vacuum states, entangled states, number-phase measurement

**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Hk

---

† E-mail: jrql@yahoo.cn