

3 对非最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议*

张闻钊 李文东 史鹏 顾永建†

(中国海洋大学物理系, 青岛 266100)

(2010年6月22日收到; 2010年10月2日收到修改稿)

在 Nielsen 定理和纠缠浓缩基本思想的基础上, 对从 2 对非最大纠缠粒子中提取 1 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议进行了简化和改进, 从而建立了一个从 3 对非最大纠缠粒子中提取 2 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议. 该协议利用经典通信和局域操作并通过特定的正算符测度来实现, 避免了概率性的风险. 这有助于 n 对非最大纠缠粒子中提取 k 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议的最终确立.

关键词: 纠缠态, 确定性纠缠浓缩, Nielsen 定理

PACS: 03.67.Hk, 03.67.Ac

1. 引言

随着量子力学与现代通信技术的发展, 作为其交叉学科的量子信息也取得了令人瞩目的成就, 其中作为量子信息基本资源之一的量子纠缠更是扮演着重要的角色. 量子隐形传态^[1-3]、量子计算^[4,5]、量子密码术^[6,7]等都需要用到纠缠态. 然而, 由于信息传递过程中不可避免地存在着消相干作用, 从而使得量子纠缠度和纯度降低. 理论上, 虽然部分纠缠态和非最大纠缠态也能实现量子通信^[8-12], 但是过程是十分复杂的, 实现起来也非常困难. 因此, 如何从大量的部分纠缠态和非最大纠缠态中提取出尽可能多的最大纠缠态(即纠缠浓缩和纠缠纯化)便成为量子信息领域中的一个重要课题.

迄今为止, 人们提出了不少纠缠蒸馏和浓缩的方案^[13-17], 但是由于其本身存在着概率性的约束, 并不能确定性地提取最大纠缠粒子, 因此这些方案在物理实现上有着很大的局限性^[18-21]. 为了摆脱这一约束, 减少量子通信失败的风险, 确定性纠缠浓缩协议^[22]的提出及其物理实现^[23]便受到了广泛的关注. 该协议是针对从 2 对非最大纠缠粒子中以 100% 的成功概率提取出 1 对最大纠缠粒子的.

文献[22]中给出了从 2 对非最大纠缠粒子中确定性地提取出 1 对最大纠缠粒子的协议. 此协议提供

了一种确定性纠缠浓缩的方法, 但是要直接从该方法出发进行普适性的扩展是很困难的. 本文将给出一种从 3 对非最大纠缠粒子中提取出 2 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议, 引入了可扩展的思路. 便于对照比较, 抽取出一般普适的规律, 更将对粒子的利用率提到了 2/3, 这对多粒子纠缠浓缩的实现及确定性纠缠浓缩利用率的提高都有重要意义.

2. 3 对非最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议

我们将在 Nielsen 定理^[24]的基础上, 给出一个从 3 对非最大纠缠粒子中确定性地提出 2 对最大纠缠粒子的方案.

首先, 我们假设相距很远的通信双方 Alice 和 Bob 共享 3 对非最大纠缠粒子(这里仅讨论 2 态粒子的情况, 即每个粒子只有 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两种状态), 这 3 对粒子的状态可描述为

$$|\varphi\rangle_{A_1 B_1} = \sqrt{a} |00\rangle_{A_1 B_1} + \sqrt{1-a} |11\rangle_{A_1 B_1},$$

$$|\varphi\rangle_{A_2 B_2} = \sqrt{b} |00\rangle_{A_2 B_2} + \sqrt{1-b} |11\rangle_{A_2 B_2},$$

$$|\varphi\rangle_{A_3 B_3} = \sqrt{c} |00\rangle_{A_3 B_3} + \sqrt{1-c} |11\rangle_{A_3 B_3}, \quad (1)$$

其中 A_1, A_2 和 A_3 属于 Alice, B_1, B_2 和 B_3 属于 Bob; 不失一般性, 设 $a, b, c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), a \geq b \geq c$.

对于纯态 $|\varphi\rangle_{A_1 B_1}$ 而言, A_1 和 B_1 的密度算符

* 国家自然科学基金(批准号:60677044)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yjgu@ouc.edu.cn

可表示为

$$\begin{aligned} \rho^{A_1} &= \text{tr}_{B_1} (|\varphi\rangle_{A_1 B_1 A_1 B_1} \langle \varphi|) \\ &= a |0\rangle_{A_1 A_1} \langle 0| + (1-a) |1\rangle_{A_1 A_1} \langle 1|, \\ \rho^{B_1} &= \text{tr}_{A_1} (|\varphi\rangle_{A_1 B_1 A_1 B_1} \langle \varphi|) \\ &= a |0\rangle_{B_1 B_1} \langle 0| + (1-a) |1\rangle_{B_1 B_1} \langle 1|. \end{aligned} \quad (2)$$

可以看到 ρ^{A_1} 和 ρ^{B_1} 本征值是相同的, 即 a 和 $1-a$; 同样, $|\varphi\rangle_{A_{II} B_{II}}$ 的密度矩阵 $\rho^{A_{II}}$ 和 $\rho^{B_{II}}$ 的本征值也相同, 即 b 和 $1-b$, $|\varphi\rangle_{A_{III} B_{III}}$ 的密度矩阵 $\rho^{A_{III}}$ 和 $\rho^{B_{III}}$ 的本征值同为 c 和 $1-c$. 所以可以将初态(1)式的密度矩阵的本征值表示为

$$\lambda = \lambda_{\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3} = \begin{bmatrix} abc \\ ab(1-c) \\ \vdots \\ (1-a)(1-b)(1-c) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

为了实现确定性纠缠浓缩, 需要利用经典通信和局域操作 (LOCC) 将初态(1)式确定性地变为所需的目标状态

$$|\varphi\rangle_{AB} = |\varphi\rangle_{A'B'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle_{AB} + |11\rangle_{AB}), \quad (4a)$$

$$|\varphi\rangle_{A'B'} = |00\rangle_{A'B'} \quad (4b)$$

或

$$|\varphi\rangle_{A'B'} = |11\rangle_{A'B'}, \quad (4c)$$

同样可将(4)式的密度矩阵的本征值表示为

$$\lambda' = \lambda_{\varphi \otimes \varphi' \otimes \varphi''} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中矩阵元中有 4 项为 1/4, 其余项为 0. 根据

Nielsen定理可知, 若 $\lambda_{\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3}$ 和 $\lambda_{\varphi \otimes \varphi' \otimes \varphi''}$ 的矩阵元 λ_i 和 λ'_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) 分别按照降序排列, 记作 $\lambda_{\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3}^\downarrow$ 和 $\lambda_{\varphi \otimes \varphi' \otimes \varphi''}^\downarrow$, 当满足 $\sum_{i=1}^l \lambda_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^l \lambda'_i^\downarrow, 1 \leq l \leq 8$, 记作

$$\lambda_{\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \varphi_3}^\downarrow = \begin{bmatrix} abc \\ ab(1-c) \\ \vdots \\ (1-a)(1-b)(1-c) \end{bmatrix} < \lambda_{\varphi \otimes \varphi' \otimes \varphi''}^\downarrow = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

则我们可以通过 LOCC 将态从(1)式变到(4)式. 从(6)式可以看到, 第一个矩阵元为最大, 因此要满足(6)式便要求 $abc \leq \frac{1}{4}$. 从文献[25]可以得知, 从 3 对非最大纠缠粒子中能确定性地提出的最大纠缠粒子的对数最多为 $k_{\max} = -\text{lb}(\frac{1}{4}) = 2$, 即从 3 对非最大纠缠粒子中确定性地提出 2 对最大纠缠粒子是可行的.

要从初态(1)式变到末态(4)式, 则相应地要把(3)式变到(5)式. 这里我们可以用一组完备基来展开(3)式, 同时需满足(3)式在这组基下的投影都与(5)式的形式是一致的, 即每一个基的矩阵形式都只有 4 个非零元且都为 1/4. 这样, 在这组基下对(3)式所对应的量子态进行测量便可以实现初态到末态的转化. 我们可以找到如下一组满足条件的基 $|k\rangle, k = 1, 2, \dots, 8$, 并将初态展开为

$$\begin{pmatrix} abc \\ ab(1-c) \\ a(1-b)c \\ a(1-b)(1-c) \\ (1-a)bc \\ (1-a)b(1-c) \\ (1-a)(1-b)c \\ (1-a)(1-b)(1-c) \end{pmatrix} = p_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_7 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p_8 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

这里为了便于计算将(7)式右边矩阵元中的常系数

1/4 提到了系数 p_i 之内, 其中

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{1}{2}[b(2a-1)(2c-1) + (2c-1)(1-a)], & p_7 &= \frac{1}{4}(2a-1)(2b-1), \\
 p_2 &= \frac{1}{4}(2b-1), & p_8 &= \frac{1}{2}(1-a)(2b-1)(2c-1). \quad (8) \\
 p_3 &= \frac{1}{2}a(1-2bc), \\
 p_4 &= \frac{1}{4}(1-4abc), \\
 p_5 &= \frac{1}{2}(2a-1)(2b-1)(2c-1), \\
 p_6 &= \frac{1}{2}(1-b)(2a-1)(2c-1),
 \end{aligned}$$

现在我们找到了符合要求的一组基 $|k\rangle$, 接下来便是通过这一组基反演出我们所需的正算符测度 (POVM), 以 $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$ 为基定义 8 个对角矩阵 $A_j (j=1, 2, \dots, 8)$, 且以下的所有矩阵均在此标准基下表示. 这 8 个对角矩阵分别为

$$\begin{aligned}
 A_1 &= p_1 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, 0, \frac{1}{a(1-b)c}, 0, \frac{1}{(1-a)bc}, 0, \frac{1}{(1-a)(1-b)c}, 0\right), \\
 A_2 &= p_2 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, \frac{1}{ab(1-c)}, 0, 0, \frac{1}{(1-a)bc}, \frac{1}{(1-a)b(1-c)}, 0, 0\right), \\
 A_3 &= p_3 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, \frac{1}{ab(1-c)}, \frac{1}{a(1-b)c}, \frac{1}{a(1-b)(1-c)}, 0, 0, 0, 0\right), \\
 A_4 &= p_4 \text{diag}\left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{(1-a)bc}, \frac{1}{(1-a)b(1-c)}, \frac{1}{(1-a)(1-b)c}, \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}\right), \\
 A_5 &= p_5 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, 0, 0, \frac{1}{a(1-b)(1-c)}, 0, \frac{1}{(1-a)b(1-c)}, 0, \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}\right), \\
 A_6 &= p_6 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, 0, \frac{1}{a(1-b)c}, 0, 0, \frac{1}{(1-a)b(1-c)}, 0, \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}\right), \\
 A_7 &= p_7 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, \frac{1}{ab(1-c)}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{(1-a)(1-b)c}, \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}\right), \\
 A_8 &= p_8 \text{diag}\left(\frac{1}{abc}, 0, 0, \frac{1}{a(1-b)(1-c)}, \frac{1}{(1-a)bc}, 0, 0, \frac{1}{(1-a)(1-b)(1-c)}\right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

容易证得 $A_j (j=1, 2, \dots, 8)$ 都是正矩阵且 A_j 的和为单位矩阵, 即 $\sum_{j=1}^8 A_j = I$, 满足正算符和完备性关系, 因此 $\{A_j\}$ 可以定义一个 POVM. 现在我们来讨

论 POVM 作用后的结果. 假设 Alice 对手上的粒子 A_I, A_{II}, A_{III} 做 POVM 测量, $\sqrt{A_j} |\varphi\rangle_{A_I B_I} \otimes |\varphi\rangle_{A_{II} B_{II}} \otimes |\varphi\rangle_{A_{III} B_{III}}$, 相应的测量结果为

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2}(|00\rangle_{A_I B_I} + |11\rangle_{A_I B_I}) \otimes (|00\rangle_{A_{II} B_{II}} + |11\rangle_{A_{II} B_{II}}) \otimes |00\rangle_{A_{III} B_{III}} \quad (j=1), \\
 &\frac{1}{2}(|00\rangle_{A_I B_I} + |11\rangle_{A_I B_I}) \otimes |00\rangle_{A_{II} B_{II}} \otimes (|00\rangle_{A_{III} B_{III}} + |11\rangle_{A_{III} B_{III}}) \quad (j=2), \\
 &\frac{1}{2}|00\rangle_{A_I B_I} \otimes (|00\rangle_{A_{II} B_{II}} + |11\rangle_{A_{II} B_{II}}) \otimes (|00\rangle_{A_{III} B_{III}} + |11\rangle_{A_{III} B_{III}}) \quad (j=3), \\
 &\frac{1}{2}|11\rangle_{A_I B_I} \otimes (|00\rangle_{A_{II} B_{II}} + |11\rangle_{A_{II} B_{II}}) \otimes (|00\rangle_{A_{III} B_{III}} + |11\rangle_{A_{III} B_{III}}) \quad (j=4), \\
 &\frac{1}{2}|000000\rangle_{A_I B_I A_{II} B_{II} A_{III} B_{III}} + \frac{1}{2}(|0011\rangle_{A_I B_I A_{II} B_{II}} + |1100\rangle_{A_I B_I A_{II} B_{II}} + |1111\rangle_{A_I B_I A_{II} B_{II}}) \otimes |11\rangle_{A_{III} B_{III}} \quad (j=5), \\
 &\frac{1}{2}(|0000\rangle_{A_I B_I A_{II} B_{II} A_{III} B_{III}} + |1111\rangle_{A_I B_I A_{II} B_{II} A_{III} B_{III}}) \otimes (|00\rangle_{A_{II} B_{II}} + |11\rangle_{A_{II} B_{II}}) \quad (j=6),
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(|0000\rangle_{A_1 B_1 A_{II} B_{II}} + |1111\rangle_{A_1 B_1 A_{II} B_{II}}) \otimes (|00\rangle_{A_{III} B_{III}} + |11\rangle_{A_{III} B_{III}}) \quad (j = 7),$$

$$\frac{1}{2}(|00\rangle_{A_1 B_1} + |11\rangle_{A_1 B_1}) \otimes (|0000\rangle_{A_{II} B_{II} A_{III} B_{III}} + |1111\rangle_{A_{II} B_{II} A_{III} B_{III}}) \quad (j = 8). \quad (10)$$

当 $j=1, 2, 3, 4$ 时, Alice 和 Bob 不需要进行任何的局域操作, 只要根据所测结果选取需要的粒子对, 如当 $j=1$ 时丢掉第 3 对粒子保留前两对即可.

当 $j=5$ 时, Alice 和 Bob 都需要做 P_1 操作,

$$P_1 = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (11)$$

其中 I 为 6×6 的单位阵, 结果变为 $\frac{1}{2}(|00\rangle_{A_1 B_1} + |11\rangle_{A_1 B_1}) \otimes (|00\rangle_{A_{II} B_{II}} + |11\rangle_{A_{II} B_{II}}) \otimes |00\rangle_{A_{III} B_{III}}$, 丢掉第 3 对粒子, 提出最大纠缠粒子对 $A_1 B_1$ 和 $A_{II} B_{II}$.

当 $j=6, 7, 8$ 时, 需要 Alice 和 Bob 都对 1, 3 粒子 (1, 2 粒子或 2, 3 粒子) 做 P_3 操作, 如当 $j=6$ 时作用结果为 $\frac{1}{2}(|00\rangle_{A_1 B_1} + |11\rangle_{A_1 B_1}) \otimes (|00\rangle_{A_{II} B_{II}} + |11\rangle_{A_{II} B_{II}}) \otimes |00\rangle_{A_{III} B_{III}}$, 丢掉第 3 对粒子提出最大纠缠粒子对 $A_1 B_1$ 和 $A_{II} B_{II}$. 同样, 当 $j=7, 8$ 时, 提出最大纠缠粒子对 $A_1 B_1, A_{III} B_{III}$ 和 $A_1 B_1, A_{II} B_{II}$. 这里 P_3 为 4×4 的矩阵, 表示为

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

由此可知, P_1 和 P_3 都是受控非门. 对于任意的 $j=1, 2, \dots, 8$ 而言, 我们都能提出 2 对最大纠缠粒子, 也就是提取的概率为 100%, 而且只需要舍弃一

对粒子, 也就是对粒子的利用率为 $2/3$, 高于之前从 2 对非最大纠缠粒子中提取出 1 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议.

对于从 n 对非最大纠缠粒子中提取出 k 对最大纠缠粒子而言, 若假设这 n 对粒子的状态分别为 $\psi_i = \sqrt{a_i} |00\rangle + \sqrt{1-a_i} |11\rangle, a_i \in (\frac{1}{2}, 1), i=1, 2,$

\dots, n , 如果它们满足 $a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{1}{2^k}, k < n$, 则说明能

确定性地从 n 对非最大纠缠粒子中提取出 k 对最大纠缠粒子. 那么我们就找到一组满足要求的基, 即表示每一个基的矩阵中有且仅有 2^k 个非零元, 然后, 按照从 3 对非最大纠缠粒子中确定性地提出 2 对最大纠缠粒子的方法得到所需的 POVM, 实现 n 对非最大纠缠粒子中提取出 k 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩.

3. 结 论

从确定性纠缠浓缩的思想出发, 根据 Nielsen 定理, 通过设计特定的 POVM, 提出了 3 对非最大纠缠粒子中提出 2 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议, 避免了概率性风险, 并将确定性纠缠浓缩的粒子利用率从 $1/2$ 提到了 $2/3$. 同时还指出了扩展运算的可能, 这对从中寻找普适的规律, 朝着从 n 对非最大纠缠粒子中提出 k 对最大纠缠粒子的确定性纠缠浓缩协议的建立迈出了重要的一步.

[1] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
 [2] Ren J G, Yang B, Yi Z H, Zhou F, Chen K, Peng C Z, Pan J W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3605
 [3] Chen Q, Fang X M 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1587
 [4] Shi Z G, Chen X W, Zhu X X, Song K H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 910
 [5] Liang B L, Wang J S 2007 *Chin. Phys.* **16** 3097
 [6] Noh T G 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 230501
 [7] Werner A H, Franz T, Werner R F 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 220504

[8] Cao H J, Guo Y Q, Song H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 915
 [9] Brunner N, Gisin N, Popescu S, Scarani V 2008 *Phys. Rev. A* **78** 052111
 [10] Zhou X Q, Lu C Y, Gao W B, Zhang J, Chen Z B, Yang T, Pan J W 2008 *Phys. Rev. A* **78** 012112
 [11] Sheng Y B, Deng F G, Zhou H Y 2008 *Phys. Rev. A* **77** 062325
 [12] Xue P, Li C F, Guo G C 2001 *Phys. Rev. A* **64** 032305
 [13] Groisman B, Linden N, Popescu S 2005 *Phys. Rev. A* **72** 062322
 [14] Ogden C D, Paternostro M, Kim M S 2007 *Phys. Rev. A* **75**

- 042325
- [15] Ballester D 2009 *Phys. Rev. A* **79** 062317
- [16] Short A J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 180502
- [17] Sheng Y B, Deng F G 2010 *Phys. Rev. A* **81** 032307
- [18] Reichle R, Leibfried D, Knill E, Britton J, Blakestad R B, Jost J D, Langer C, Ozeri R, Seidelin S, Wineland D J 2006 *Nature* **443** 838
- [19] Dong R, Lassen M, Heersink J, Marquardt C, Filip R, Leuchs G, Andersen U L 2008 *Nat. Phys.* **4** 919
- [20] Hage B, Samblowski A, DiGuglielmo J, Franzen A, Fiurášek J, Schnabel R 2008 *Nat. Phys.* **4** 915
- [21] Takahashi H, Neergaard-Nielsen J S, Takeuchi M, Takeoka M, Hayasaka K, Furusawa A, Sasaki M 2010 *Nat. Photon.* **4** 178
- [22] Gu Y J, Li W D, Guo G C 2006 *Phys. Rev. A* **73** 022321
- [23] Wang H F, Zhang S 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 1678
- [24] Nielsen M A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 436
- [25] Morikoshi F, Koashi M 2001 *Phys. Rev. A* **64** 022316

Protocol for deterministic entanglement concentration of three pairs of partially entangled particles^{*}

Zhang Wen-Zhao Li Wen-Dong Shi Peng Gu Yong-Jian[†]

(Department of Physics, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

(Received 22 June 2010; revised manuscript received 20 October 2010)

Abstract

According to the Nielsen's theorem and the basic idea of entanglement concentration, we improve and extend the deterministic entanglement concentration protocol that extracts one pair of maximally entangled particles out of two pairs of non-maximally entangled particles, thus establishing a deterministic entanglement concentration protocol that extracts two pairs of maximally entangled particles out of three pairs of non-maximally entangled particles in the way of the classical communication and local operation and the specific positive operator-valued measure. This is helpful for establishing a deterministic entanglement concentration protocol that extracts k pairs of maximally entangled particles out of n pairs of non-maximally entangled particles.

Keywords: entangled states, deterministic entanglement concentration, Nielsen's theorem

PACS: 03.67.Hk, 03.67.Ac

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60677044).

[†] Corresponding author. E-mail: yjgu@ouc.edu.cn