

# $S = 1$ 旋量 Bose-Einstein 凝聚中制备 双模最大纠缠态方案\*

徐岩<sup>1)2)</sup> 樊炜<sup>1)†</sup> 陈兵<sup>1)</sup> 李照鑫<sup>1)</sup>

1) (山东科技大学理学院, 青岛 266510)

2) (兰州大学磁学与磁性材料教育部重点实验室, 兰州 730000)

(2010年8月21日收到; 2010年9月9日收到修改稿)

在旋量 Bose-Einstein 凝聚体 (BEC) 中引入量子 Zeno 子空间, 将系统由 3 个自由度简化到 2 个自由度, 给出了在  $S = 1$  的反铁磁旋量 BEC 中制备双模最大纠缠态的方案. 通过计算未简化系统中粒子数随时间的演化, 证明了引入量子 Zeno 子空间简化系统的准确性.

**关键词:** Bose-Einstein 凝聚, 量子纠缠, 量子 Zeno 空间

**PACS:** 03.75.Gg, 03.75.Mn, 03.67.Bg

## 1. 引言

量子纠缠是一种量子非局域效应, 是量子力学的核心特征之一, 具有重要的理论和应用价值. 量子纠缠有助于对量子力学本质的理解, 实现一些思维实验, 如 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 佯谬<sup>[1]</sup>; 量子纠缠能够提高原子钟、干涉仪的精度<sup>[2]</sup>, 从而提高实验测量的精确度, 而且制备稳定的纠缠态是实现量子计算与量子信息传输的基础.

Bose-Einstein 凝聚 (BEC) 作为一种宏观量子现象, 是量子多体理论研究的舞台. BEC 具有宏观相干、量子隧穿和超流性等性质, 对基础理论研究有重要意义; 在原子激光、原子钟、原子芯片技术、精密测量、量子计算机和纳米技术等领域 BEC 也有很好的应用前景. 由于环境温度极低, BEC 中的量子退相干效应比较弱, 可以用来制备稳定的量子纠缠态<sup>[3]</sup>.

在 BEC 中实现的纠缠分为多粒子纠缠和多模式纠缠两种. 多粒子纠缠源于粒子自旋间的非线性相互作用<sup>[4]</sup>, 是系统处于纠缠态一个表现, 常见的是自旋压缩态, 一般用来提高干涉仪的测量精

度<sup>[2]</sup>. 多模式纠缠是系统的多个模式之间产生的纠缠, 而不是单个粒子间的纠缠, 如 BEC 的内部能级之间<sup>[5]</sup>、两块空间分离的凝聚体之间<sup>[6]</sup>或者 BEC 与光子之间<sup>[7]</sup>. 常见的是双模纠缠, 因为缺乏一个普遍的衡量更高阶模式纠缠的方法<sup>[8]</sup>. 由于系统不可避免地会与环境相互作用导致退相干, 所以研究退相干作用下纠缠态演化的动力学显得尤为重要. 最近的研究<sup>[9, 10]</sup>揭示: 对双模纠缠, 只要知道最大纠缠态随时间的演化, 就可以给出由任意初始态开始纠缠的演化.

对  $S = 1$  的旋量 BEC, 通过控制实验参量抑制自旋交换作用可以将系统限制在两个自旋自由度上, 进而制备自旋压缩态<sup>[3]</sup>; 在单模近似下, 可以在系统的 3 个自旋自由度上制备多粒子纠缠态和 3 模纠缠态<sup>[11]</sup>. 对铁磁性旋量 BEC, 在其上下两个自旋自由度之间施加强 Raman 耦合会产生量子 Zeno 子空间, 系统能够由自旋极化态演化为 N-GHZ 态<sup>[12]</sup> (猫态). 以上结果是在采用单模近似时得到的, 即假设凝聚体 3 个自旋自由度的空间波函数相同, 但单模近似并不总是成立<sup>[13]</sup>, 特别是对反铁磁旋量 BEC. 采用超越单模近似的办法, 对基态凝聚体的 3 个自旋自由度分别取不同的空间波函数, 会发现凝聚体

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10847150)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2009AM026)、教育部留学回国人员科研启动基金 (批准号: [2008]890) 和兰州大学磁学与磁性材料教育部重点实验室基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xly5@hotmail.com

基态能级有精细结构<sup>[14]</sup>,这是单模近似中所没有的现象.

本文采用强 Raman 耦合产生量子 Zeno 子空间<sup>[12]</sup>的方法,给出超越单模近似下在  $S = 1$  的反铁磁旋量 BEC 中制备双模最大纠缠态的方案. 研究发现,系统的有效 Hamilton 量与隧穿耦合 BEC 的 Hamilton 量相似<sup>[15]</sup>,制备所有粒子自旋都向下的初始态,控制系统参量后系统能够演化到最大纠缠态,且随后能够维持在纠缠度较高的状态.

## 2. 基本理论和模型讨论

### 2.1. 旋量 BEC

在光阱中制备的旋量 BEC,不像在磁阱中自旋自由度被冻结那样,其粒子的自旋自由度是展开的<sup>[16]</sup>,具有丰富的自旋混合动力学现象.

对  $S = 1$  的旋量 BEC,常采用单模近似<sup>[17, 18]</sup>来简化分析过程,即假设系统 3 个自旋自由度具有相同的空间波函数,其空间自由度被冻结,只能以自旋自由度来区分. 在粒子数守恒或粒子数损失可以忽略的情况下,系统的 Hamilton 量可以写为下列简洁的代数形式<sup>[17]</sup>:

$$H_{\text{SMA}} = \lambda_a \hat{L}^2, \quad (1)$$

其中  $\lambda_a$  与粒子散射长度和空间波函数有关; $\hat{L}$  是角动量算符,满足  $\hat{L}_+ = \sqrt{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_{-1})$ ,  $\hat{L}_- = \sqrt{2}(\hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1)$ ,  $\hat{L}_z = (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_{-1})$ ,  $\hat{a}_i$  ( $i = -1, 0, +1$ ) 为各自旋自由度的湮没算符.

单模近似简化了对系统的分析难度,但它有一定的适应范围<sup>[13]</sup>. 对铁磁性凝聚体,单模近似是准确的;对反铁磁性凝聚体,只有当系统的磁矩为零时单模近似才是准确的.

由于对反铁磁凝聚体存在的这一限制,本文采用超越单模近似的方法<sup>[14]</sup>来分析系统的 Hamilton 量. 引入一级修正因子  $\varepsilon$ ,系统 3 个自旋自由度的空间波函数为  $\phi_\kappa = \phi + \varepsilon_\kappa \phi$ ,其中  $\varepsilon_\kappa = 0, \pm \varepsilon$ ,对应于  $\kappa = 0, \pm 1$ . 保持粒子数守恒可得系统 Hamilton 量<sup>[14]</sup>

$$H_{\text{BSM}} = \lambda_a(\varepsilon) \hat{L}^2 + \frac{\chi}{2} \hat{L}_z, \quad (2)$$

其中  $\chi$  与粒子数  $N$ ,  $\varepsilon$  及散射长度和化学势有关. 应用将  $SU(3)$  分解为  $SU(2)$  的 Gell-Mann 分解<sup>[12]</sup>,可得

$$H_{\text{BSM}} = \mu \hat{J}_z^2 + \frac{\mu}{2} [\hat{V}_+ \hat{U}_+ + \hat{V}_- \hat{U}_- + (N + \frac{1}{2} - \hat{N}_0) \hat{N}_0] + \chi \hat{J}_z, \quad (3)$$

其中  $\mu = 4\lambda_a(\varepsilon)$ ,  $\hat{J}_z = \frac{1}{2} \hat{L}_z$ ,  $\hat{V}_+ = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0$ ,  $\hat{U}_+ = \hat{a}_{-1} \hat{a}_0$ .

当  $\varepsilon = 0$  时,  $H_{\text{BSM}} = H_{\text{SMA}}$ ; 当  $\varepsilon \neq 0$  时,  $\frac{\chi}{2} \hat{L}_z$  代表着系统的能级分裂. 数值计算显示<sup>[14]</sup>,对反铁磁凝聚体,  $\chi$  为一小量,随着粒子数的增多而减小,取值在  $0-10^{-3}$  之间. 根据这一结果,在考虑分裂项的影响时我们取参量关系为  $\chi = \frac{\mu}{100}$ .

### 2.2. 量子 Zeno 子空间

在量子力学中可以把测量过程看做测量系统与被测系统之间的相互作用. 测量系统和被测系统分别由 Hamilton 量  $H_0$  和  $H_{\text{mea}}$  描述,对系统进行连续式测量时两个系统不再单独演化,而是耦合成一个整体  $H_{\text{tot}}$  进行演化,  $H_{\text{tot}} = H_0 + \Omega H_{\text{mea}}$ ,  $\Omega$  为两个系统的耦合强度,耦合系统的时间演化算符为  $U(t) = e^{-iH_{\text{tot}}t}$ . 当  $\Omega \rightarrow \infty$  时,演化算符  $U(t)$  与测量空间  $H_{\text{mea}}$  的投影算符  $P_n$  相互对易<sup>[19]</sup>

$$[U(t), P_n] = 0,$$

其中

$$H_{\text{mea}} P_n = \eta_n P_n. \quad (4)$$

这说明当耦合非常强时系统  $H_{\text{tot}}$  会在由  $H_{\text{mea}}$  所决定的子空间中单独演化<sup>[19]</sup>,这些子空间是  $P_n$  的投影空间,称为量子 Zeno 子空间.

## 3. 纠缠态的制备

### 3.1. 强 Raman 耦合下的 Zeno 子空间

在粒子上下两自旋自由度之间施加强 Raman 耦合可以产生 Zeno 子空间<sup>[12]</sup>. 我们取 Raman 耦合的形式为  $\Omega J_x = \frac{\Omega}{2}(a_1^\dagger a_{-1} + a_{-1}^\dagger a_1)$ ,则整个系统的 Hamilton 量

$$H_{\text{tot}} = H_{\text{BSM}} + \Omega J_x. \quad (5)$$

将  $J_x$  与  $\Omega$  分别看做测量系统和测量系统与凝聚体的耦合强度,根据(4)式可得,当  $\Omega \gg \mu$  时,系统会在由  $J_x$  所决定的子空间  $|0\rangle \oplus (|+\rangle + |-\rangle) \oplus (|+\rangle - |-\rangle)$  中演化,它们是  $J_x$  的本征空间.

取初始态  $|\psi_0\rangle = |-\rangle^{\otimes N}$ ,  $|\psi_0\rangle$  在由态  $|+\rangle$  和  $|-\rangle$  张成的子空间里, 根据上述讨论系统会在这个子空间里演化, 态  $|0\rangle$  上的粒子数  $N_0 = 0$ , 系统等效为一个两能级系统. 去掉(3)式中与  $|0\rangle$  有关的项可得系统的有效 Hamilton 量

$$H_{\text{eff}} = \mu \hat{J}_z^2 + \chi \hat{J}_z + \Omega \hat{J}_x. \quad (6)$$

系统的有效 Hamilton 量  $H_{\text{eff}}$  与两块隧穿耦合 BEC 的 Hamilton 量<sup>[15]</sup> 相似, 只是多了  $\chi \hat{J}_z$  这一项. 这是由于两个自由度之间的 Raman 耦合与隧穿耦合在角动量算符下有相同的形式;  $\chi \hat{J}_z$  则表征  $S = 1$  的旋量 BEC 本身的特征, 是从完整系统所继承下来的. 决定纠缠产生的是  $\hat{J}_z^2$  项,  $\hat{J}_z$  只是贡献了一相因子<sup>[4]</sup>, 从这个意义上看, 本文使用的系统与隧穿耦合 BEC 系统是等价的.

我们发现, 如果取  $\Omega = 2N\mu$ , 则由(6)式描述的等效系统可以由初始态  $|\psi_0\rangle$  演化到最大纠缠态, 且在随后的时间里能够维持在纠缠度比较高的状态. 本文首先计算  $\Omega = 2N\mu$  时 Zeno 子空间的准确性, 以说明等效系统的合理性, 然后给出等效系统由初始态  $|\psi_0\rangle$  演化到纠缠态的结果.

### 3.2. Zeno 子空间的准确性

由于本文制备纠缠态的系统是在引入 Zeno 子空间后得到的, 要保证所得纠缠态的正确性, 我们首先证明在强耦合作用  $\Omega = 2N\mu$  下确实会产生 Zeno 子空间, 即几乎所有粒子都布居在  $|+\rangle$  和  $|-\rangle$  上,  $N_+ + N_- \approx N$ .

图 1 给出了粒子数  $N = 40$  时, 在完整 Hamilton 量(5)式下 Zeno 空间中的粒子数( $N_+ + N_-$ )随时间

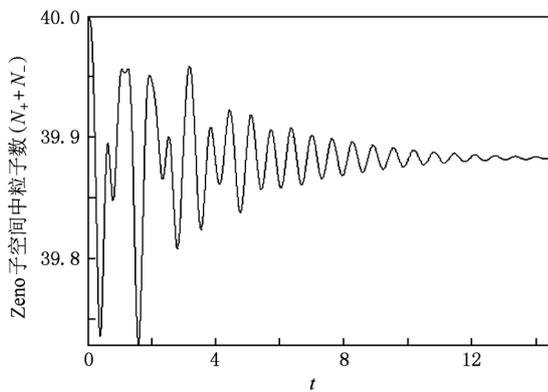


图 1 Zeno 子空间中粒子数 ( $N_+ + N_-$ ) 随时间  $t$  的演化  $N = 40$

的演化. 发现态  $|0\rangle$  上的粒子数  $N_0$  最大不超过 0.28 个, 最后稳定在  $N_0 = 0.12$ . 如此小的粒子数损失完全可以忽略不计, 可以认为粒子数全部布居在由态  $|+\rangle$  和  $|-\rangle$  产生的 Zeno 子空间内. 因此我们所使用的量子 Zeno 子空间是准确的, 等效系统(6)式也是值得信赖的.

### 3.3. 双模最大纠缠态

如果一个系统可以分解为两个子系统  $A$  和  $B$ ,  $A$  与  $B$  分别代表系统的 2 个模式(本文中  $A$  和  $B$  代表系统的 2 个自旋自由度), 那么其双模纠缠态的纠缠度可以由 von Neumann 熵

$$E(\rho_A) = -\text{Tr}(\rho_A \lg(\rho_A)) \quad (7)$$

衡量, 其中  $\rho_A$  是子系统  $A$  的约化密度矩阵.

若系统的粒子数为  $N$ , 则其最大纠缠态为<sup>[15]</sup>

$$|\varphi_{\text{MES}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=0}^N |n\rangle_A |N-n\rangle_B, \quad (8)$$

其中  $|n\rangle_i$  代表模式  $i$  上的粒子数为  $n$ ,  $i = A, B$ . 处于最大纠缠态  $|\varphi_{\text{MES}}\rangle$  的系统会以相等的振幅均匀地分布在各个状态上, 其纠缠度为<sup>[15]</sup>

$$E_{\text{max}} = \text{lb}(N+1). \quad (9)$$

在图 2 中我们对  $N = 40$  情况计算了纠缠度  $E$  在系统由初始态  $|\psi_0\rangle$  开始进行演化的过程中随时间的变化. 从图 2 可以看出, 当  $t = 2.1941$  时纠缠度  $E$  取最大值 5.3083, 与理论上的最大纠缠态  $E_{\text{max}}$  相差 0.9%, 自  $t = 4$  时刻后系统维持在纠缠度  $E$  比较高的状态.

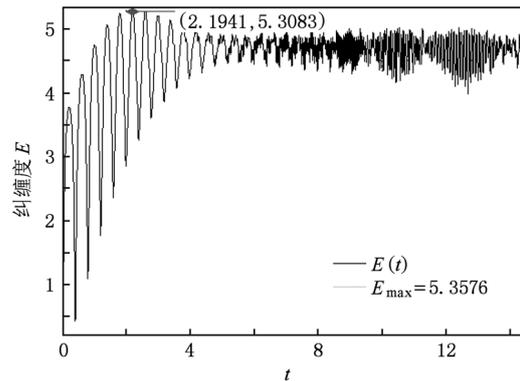


图 2 纠缠度  $E$  随时间的演化  $N = 40$

## 4. 结 论

本文给出了在  $S = 1$  的反铁磁旋量 BEC 中制

备双模最大纠缠态的方案. 首先, 解释了应用超越单模近似分析凝聚体的原因, 并给出了其 Hamilton 量; 为了引入量子 Zeno 子空间, 我们用 Gell-Mann 分解重写了系统的 Hamilton 量. 然后, 采用强 Raman 耦合产生 Zeno 子空间将 3 自由度系统约化到 2 自由度, 系统等效为一个二能级系统. 研究发现, 等效系统与隧穿耦合 BEC 系统相似, 由初始自

旋极化态  $|\psi_0\rangle = |-\rangle^{\otimes N}$  出发, 系统会演化到最大纠缠态并且随后能够维持在纠缠度比较高的状态. 最后, 计算了在完整 Hamilton 量下粒子数随时间的演化, 证明了量子 Zeno 子空间的正确性, 从而确定了所用方案的合理性. 本文提供的建议制备纠缠态的方案在量子信息及量子计算中有一定的应用价值.

- [1] Kheruntsyan K V, Olsen M K, Drummond P D 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 150405
- [2] Esteve J, Gross C, Weller A, Giovanazzi S, Oberthaler M K 2008 *Nature* **455** 1216
- [3] Sorensen A, Duan L M, Cirac J I, Zoller P 2001 *Nature* **409** 63
- [4] Kitagawa M, Ueda M 1993 *Phys. Rev. A* **47** 5138
- [5] Shi Y, Niu Q 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 140401
- [6] Deb B, Agarwal G S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 013639
- [7] Cola M M, Piovella N 2004 *Phys. Rev. A* **70** 045601
- [8] Li Z G, Fei S M, Alberverio S, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **80** 034301
- [9] Li Z G, Fei S M, Wang Z D, Liu W M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 024303
- [10] Li Z G, Zhao M J, Fei S M, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 042312
- [11] Duan L M, Cirac J I, Zoller P 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033619
- [12] Zhang M, You L 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 230404
- [13] Yi S, Müstecaplıoğlu Ö E, Sun C P, You L 2002 *Phys. Rev. A* **66** 011601
- [14] Xu Y, Jia D J, Li Z X, Chen B, Tan L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 55 (in Chinese) [徐岩、贾多杰、李照鑫、陈兵、谭磊 2009 物理学报 **58** 55]
- [15] Hines A P, McKenzie R H, Milburn G J 2003 *Phys. Rev. A* **67** 013609
- [16] Ho T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742
- [17] Law C K, Pu H, Bigelow N P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257
- [18] Pu H, Law C K, Raghavan S, Eberly J H, Bigelow N P 1999 *Phys. Rev. A* **60** 1463
- [19] Facchi P, Pascazio S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 080401

# Scheme for generating maximally two-mode entangled state in an $S=1$ antiferromagnetic Bose-Einstein condensation \*

Xu Yan<sup>1)2)</sup> Fan Wei<sup>1)†</sup> Chen Bing<sup>1)</sup> Li Zhao-Xin<sup>1)</sup>

1) (College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China)

2) (Key Laboratory for Magnetism and Magnetic Materials of Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

(Received 21 August 2010; revised manuscript received 9 September 2010)

## Abstract

We propose a scheme to generate maximally two-mode entangled state in a spinor-1 anti-ferromagnetic Bose-Einstein condensation. We reduce the three-level system into an effective two-level system via the quantum Zeno subspace created by exerting strong Raman coupling. We investigate the particle number evolution in the unreduced system to justify the existence of Zeno subspace and find that the effective system can be trusted and the entanglement production is reliable.

**Keywords:** Bose-Einstein condensation, quantum entanglement, quantum Zeno subspace

**PACS:** 03.75.Gg, 03.75.Mn, 03.67.Bg

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10847150), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2009AM026), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars of Ministry of Education, China (Grant No. [2008] 890), and the Foundation of Key Laboratory for Magnetism and Magnetic Materials of Ministry of Education, Lanzhou University, China.

† Corresponding author. E-mail: x1y5@hotmail.com