输电线非线性振动问题的同伦映射近似解*

吴钦宽†
(南京工程学院数学研究所, 南京 211167)

(2010 年 8 月 20 日收到;2010 年 9 月 3 日收到修改稿)

研究了一类输电线非线性振动的动力学模. 利用同伦映射方法,得到了该模型的任意次精度的近似解.

关键词: 输电线, 非线性振动, 同伦映射, 近似解
PACS: 88.80.H-, 46.15.-x, 02.60.Lj, 02.30.Mv

1. 引　　言

输电线振动是导线在外界风、雪等激励作用下产生的一种非线性运动,是实际工程应用引起输电线路发生故障的主要原因之一. 输电导线的舞动是偏心覆冰导线在外界激励(比如自然环境中的风、雨等)下产生的一种低频、大振幅的非线性振动. 输电导线的大振幅晃动伴随着大量的能量释放与转换,因此,势必会对杆塔、电力设施部件及导线自身造成损害,更是引发输电线路发生故障的重大隐患,轻则造成线路频繁跳闸与停电,重则造成巨大的经济损失和社会影响[1]. 因此,对于输电线振动问题的研究引起了国内外学者的高度关注. Bosdogianni 等[2]研究了输电线的弛振效应,王少华等[3]阐述了导线舞动的形成因素、舞动机理、防舞措施及相关理论、模型与现场试验、计算机仿真等国内外研究现状,Lin 等[4]从理论和实验角度研究了复杂缆线质量系统的自由振动,Gattulli 等[5]分析了缆线振动轴向控制问题, 肖锡武等[6]用多尺度法研究悬垂缆线的主共振、超谐波共振和次谐波共振得到了系统定常周期解,杨志安等[7]研究了输电线在温度场中谐扰力作用下的亚谐共振问题,蒋扇英等[1]研究了输电线具有初始垂度的非线性动力学模型,应用奇异摄动方法得到系统的近似解析解.

关于应用同伦理论和方法研究非线性问题,我国学者做了许多有益的工作[8—21],并解决了许多数学物理问题. 本文利用同伦映射方法[22,23],研究一类输电线非线性振动方程,得到方程的任意次精度的近似解,并把文献[1]所讨论的输电线非线性振动方程作为一个具体的例子,给出了解的二次近似 $x_{2\mathrm{hom}}$.

首先给出文献[1] 所讨论的输电线非线性振动方程

$$x'' + \beta x' + x + \alpha x^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 = P\cos\Omega t, \quad (1)$$

其中 $\beta \sim O(10^{-1}), \alpha \sim O(10^1), P \sim O(1), \Omega \approx 1$.

2. 输电线振动方程和同伦映射

现考虑一类输电线非线性振动方程

$$x'' + \beta x' + x + \alpha x^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 = f(t), \quad (2)$$

其中 $f(t)$ 为均布横向荷载,它是关于其变量在对应区间内的连续函数.

为了得到方程(2)的近似解,引入同伦映射 $H(x,s): R \times I \to R$,

$$H(x,s) = L(x) - L(\bar{x}) + s\left[L(\bar{x}) + \alpha x^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 - f(t)\right], \quad (3)$$

其中 $R = (-\infty, +\infty)$, $I = [0,1]$, $\bar{x}$ 为辅助函数,而线性算子 L 表示为

$$L(x) = x'' + \beta x' + x.$$

首先考虑方程(2)当 $\alpha = 0$ 且 $f(t) = 0$ 时对应的方程

$$\bar{x}'' + \beta\bar{x}' + \bar{x} = 0, \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(批准号:11071205)和江苏省自然科学基金(批准号: BK2008366)资助的课题.

† E-mail: wuqk@njit.edu.cn

方程(4)有如下精确解:

$$\bar{x} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t\right), \tag{5}$$

式中 c_1, c_2 为任意常数.

显然,由关系式(3), $H(x,1) = 0$ 与方程(2)相同. 故方程(2)的解 $x(t)$ 就是 $H(x,s) = 0$ 的解当 $s \to 1$ 的情形.

3. 输电线振动方程近似解的计算

令

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)s^i. \tag{6}$$

考虑到(3),(6)式,对方程 $H(x,s) = 0$ 中关于 s 的同次幂的系数加以比较.

比较 $H(x,s) = 0$ 中 s 的零次幂系数可得

$$L(x_0) = L(\bar{x}),$$

显然

$$x_0(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t\right). \tag{7}$$

由(3)式,比较 $H(x,s) = 0$ 中 s 的一次幂系数可得

$$L(x_1) = -\alpha x_0^2 - \frac{1}{3}\alpha x_0^3 + f(t), \tag{8}$$

式中 x_0 由(7)式表示. 于是,由(7)和(8)式,并利用 Fourier 变换,在初始条件 $x_1|_{t=0} = 0$ 时,可得

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2+\mathrm{j}\omega\beta} \times \left(-\alpha x_0^2 - \frac{1}{3}\alpha x_0^3 + f(\tau)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-\tau)\omega}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega. \tag{9}$$

由(3)式, 比较 $H(x,s) = 0$ 中 s 的二次幂系数可得

$$L(x_2) = -2\alpha x_0 x_1 - \alpha x_0^2 x_1, \tag{10}$$

式中 x_0, x_1 分别由(7),(9)式表示. 用相同的方法可得到方程(10)在初始条件 $x_2|_{t=0} = 0$ 下的解

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2+\mathrm{j}\omega\beta} \times \left(-2\alpha x_0 x_1 - \alpha x_0^2 x_1\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-\tau)\omega}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega. \tag{11}$$

于是由(7),(9),(11)式,方程(2)的二次近似解 $x_{2\mathrm{hom}}$ 为

$$\begin{aligned} x_{2\mathrm{hom}} &= \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2+\mathrm{j}\omega\beta} \\ &\times\Big(-\alpha x_0^2 - \frac{1}{3}\alpha x_0^3 - 2\alpha x_0 x_1 \\ &- \alpha x_0^2 x_1 + f(\tau)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-\tau)\omega}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{12}$$

用同样的方法比较关系式 $H(t,s) = 0$ 关于 s 的更高次幂的系数,可得到方程(2)的更高次近似解.

4. 应用举例

现讨论一个具体的输电线非线性振动方程,它的均布横向荷载 $f(t) = P\cos\Omega t$, 这时的方程(2)为

$$x'' + \beta x' + x + \alpha x^2 + \frac{1}{3}\alpha x^3 = P\cos\Omega t,$$

即方程(1). 这时由(7)式得输电线非线性振动方程(1)解的零次近似 $x_{0\mathrm{hom}}$ 为

$$x_{0\mathrm{hom}} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t\right). \tag{13}$$

利用同伦映射方法,由(9)和(13)式得到输电线非线性振动方程(1)解的一次近似 $x_{1\mathrm{hom}}$ 为

$$\begin{aligned} x_{1\mathrm{hom}} &= \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2+\mathrm{j}\omega\beta} \\ &\times\Bigg\{-\alpha\Bigg[\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}\Bigg(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \\ &+ c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau\Bigg)\Bigg]^2 \\ &- \frac{1}{3}\alpha\Bigg[\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}\Bigg(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \\ &+ c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau\Bigg)\Bigg]^3 \\ &+ P\cos\Omega\tau\Bigg\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(t-\tau)\omega}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\omega. \end{aligned} \tag{14}$$

再由(12)式得到输电线非线性振动方程(1)解的二次近似 $x_{2\mathrm{hom}}$ 为

$$\begin{aligned} x_{2\mathrm{hom}} &= \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t + c_2\sin\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}t\right) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1-\omega^2+\mathrm{j}\omega\beta} \\ &\times\Bigg\{-\alpha\Bigg[\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}\Bigg(c_1\cos\frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ c_2 \sin \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \Big) \Big]^2 \\
&- \frac{1}{3}\alpha \Big[e^{-\frac{\beta}{2}} \Big(c_1 \cos \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \\
&+ c_2 \sin \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \Big) \Big]^3 \\
&- \alpha \Big[2 + e^{-\frac{\beta}{2}} \Big(c_1 \cos \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \\
&+ c_2 \sin \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \Big) \Big] \\
&\times \Big[e^{-\frac{\beta}{2}} \Big(c_1 \cos \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \\
&+ c_2 \sin \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau \Big) \Big] \\
&\times \Big[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-\omega_1^2 + j\omega_1\beta} \\
&\times \Big\{ -\alpha \Big[e^{-\frac{\beta}{2}} \Big(c_1 \cos \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau_1 \\
&+ c_2 \sin \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau_1 \Big) \Big]^2 \\
&- \frac{1}{3}\alpha \Big[e^{-\frac{\beta}{2}} \Big(c_1 \cos \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau_1 \\
&+ c_2 \sin \frac{\sqrt{4-\beta^2}}{2}\tau_1 \Big) \Big]^3 \\
&+ P\cos\Omega\tau_1 \Big\} e^{j(t-\tau_1)\omega_1} d\tau_1 d\omega_1 \Big] \\
&+ P\cos\Omega\tau \Big\} e^{j(t-\tau)\omega} d\tau d\omega,
\end{aligned} \tag{15}
$$

式中 c_1, c_2 为常数.

继续利用同伦映射关系式(3),可以得到输电线非线性振动方程(1)解的任意次近似表达式.

5. 结　　论

本文研究的架空输电线非线性动力学模型,往往需要将它简化为基本模式并利用近似方法去求解它. 同伦映射方法不同于一般的数值方法,它是一个简单而有效的方法. 用同伦映射方法求得的解还可以继续进行解析运算,所以我们还能进一步通过解析运算对输电线非线性振动方程的解(12)式作相应的定性和定量方面的分析. 本文用同伦映射方法,选取的初始近似 $x_0(t)$ 是采用原方程的对应齐次方程的解 $\bar{x}(t)$,这样就保证了对原方程能较快地求得在要求的精度范围内的近似解析解,故所得的结果更加实用、简捷.

[1] Jiang S Y, Xu J 2009 *Chin. Quart. Mech.* **30** 33 (in Chinese) [蒋扇英、徐　鉴 2009 力学季刊 **30** 33]

[2] Bosdogianni A, Olivari D 1996 *J. Wind Eng. Indus. Aerodyn.* **64** 171

[3] Wang S H, Jiang X L, Sun C X 2005 *High Voltage Eng.* **31** 11 (in Chinese) [王少华、蒋兴良、孙才新 2005 高电压技术 **31** 11]

[4] Lin H P, Perkins N C 1995 *J. Sound Vib.* **179** 131

[5] Gattulli V, Alaggio R, Potenza F 2008 *Int. J. Non-Linear. Mech.* **43** 36

[6] Xiao X W, Yang J, Jacques D, Xu Y 2003 *J. Vib. Measur Diagn.* **23** 110 (in Chinese) [肖锡武、杨　军、Jacques D、徐　嫣 2003 振动、测试与诊断 **23** 110]

[7] Yang Z A, Liu P F, Xi X Y 2007 *Eng. Mech.* **24** 182 (in Chinese) [杨志安、刘鹏飞、席晓燕 2007 工程力学 **24** 182]

[8] Li S, Liao S J 2005 *Appl. Math. Comput.* **169** 854

[9] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪、张伟江、陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]

[10] Lin W T, Mo J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2633 (in Chinese) [林万涛、莫嘉琪 2008 物理学报 **57** 2633]

[11] Mo J Q, Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6694 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 6694]

[12] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]

[13] Mo J Q, Cheng Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4379 (in Chinese) [莫嘉琪、程　燕 2009 物理学报 **58** 4379]

[14] Mo J Q, Chen X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1403 (in Chinese) [莫嘉琪、陈贤峰 2010 物理学报 **59** 1403]

[15] Wu Q K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2654 (in Chinese) [吴钦宽 2008 物理学报 **57** 2654]

[16] Wu Q K 2009 *J. Henan Univ. (Nat. Sci.)* **39** 567 (in Chinese) [吴钦宽 2009 河南大学学报(自然科学版) **39** 567]

[17] Shi L F, Zhou X C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2915 (in Chinese) [石兰芳、周先春 2010 物理学报 **59** 2915]

[18] Mo J Q 2009 *Chin. Phys.* B **18** 4608

[19] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030202

[20] Mo J Q, Chen X F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2919 (in Chinese) [莫嘉琪、陈贤峰 2010 物理学报 **59** 2919]

[21] Zhou X C, Lin W T, Lin T H, Mo J Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2173 (in Chinese) [周先春、林万涛、林一骅、莫嘉琪 2010 物理学报 **59** 2173]

[22] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) p113 (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法(郑州:河南科学技术出版社)第113页]

[23] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Yew York: CRC Press Co.) p46

Approximate solution of homotopic mapping for nonlinear vibration problem of transmission line*

Wu Qin-Kuan†

(*Institute of Mathematics, Nanjing Institute of Technology, Nanjing* 211167, *China*)

(Received 20 August 2010; revised manuscript received 3 September 2010)

Abstract

A class of dynamical model for the nonlinear vibration of a transmission line is studied. Using the homotopy mapping method, the approximate solution with an arbitrary degree of accuracy is obtained.

Keywords: transmission line, nonlinear vibration, homotopic mapping, approximate solution

PACS: 88.80.H-, 46.15.-x, 02.60.Lj, 02.30.Mv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11071205) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2008366).

† E-mail: wuqk@njit.edu.cn