

## 新的具有光滑二次函数混沌系统的构建与实现\*

刘扬正 林长圣<sup>†</sup> 李心朝(南京工程学院非线性物理研究所, 南京 211167)  
(2010年8月20日收到; 2010年9月16日收到修改稿)

拓展和改变 Lorenz 混沌系统的非线性函数, 构建一个新的具有光滑二次函数的自治混沌系统, 系统包含 3 个系统变量乘积的非线性函数项和 5 个平衡点, 详细讨论了平衡点的性质并计算了分形维数. 利用分岔图和 Lyapunov 指数谱对系统随参数变化的情况进行分析后得出, 系统会发生倍周期分岔. 用数字信号处理芯片对混沌系统进行硬件实现, 实验结果表明理论分析的正确性以及系统具有较为复杂的动力学行为.

**关键词:** 混沌系统, 分岔图, Lyapunov 指数, 数字信号处理

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Ac

## 1. 引言

Lorenz 系统<sup>[1]</sup>是混沌理论和应用研究的重要模型之一, 在混沌学的建立和发展过程中起到了不可替代的重要作用, 研究者不断提出以 Lorenz 系统为基础的各种变形混沌系统. 文献[2]用系统变量的绝对值函数和符号函数代替 Lorenz 系统的二次非线性函数, 使变形 Lorenz 系统产生四翼奇异吸引子. 文献[3]用变量代换方法对 Lorenz 系统进行改造, 构建能够产生三翼、四翼甚至  $n$  翼的混沌系统. Liu 等<sup>[4]</sup>在 Lorenz 系统基础上构建了具有光滑二次非线性函数的四翼混沌系统. Chen 等<sup>[5]</sup>引入一个可以变化的参数到 Lorenz 系统而构建著名的 Chen 系统, 使系统的线性部分矩阵满足  $a_{12}a_{21} < 0$ ; Lü 等构建的 Lü 系统<sup>[6]</sup> ( $a_{12}a_{21} = 0$ ) 则成为了沟通 Lorenz 系统 ( $a_{12}a_{21} > 0$ ) 和 Chen 系统之间的桥梁; 统一混沌系统<sup>[7]</sup>通过引入可变化的系统参数将 Lorenz 系统、Chen 系统、Lü 系统融为一体, 构成了一个随系统参数变化的混沌系统族. Qi 等<sup>[8]</sup>在 Lorenz 系统基础上增加了一个非线性项构建了 Qi 系统; 文献[9—15]都是通过对 Lorenz 系统进行改造构建起来的混沌系统. 文献[16]通过拓展和改变 Lorenz 混沌系统的多个非线性函数, 构建一类包含多个子系统的切换

混沌系统. 这些混沌系统的建立极大地丰富了混沌学的研究内容和提高了混沌的工程应用能力.

本文通过拓展和改变 Lorenz 混沌系统的非线性函数, 构建一个新的具有光滑二次非线性函数的自治混沌系统, 能够产生复杂的奇异吸引子. 详细分析了系统平衡点的性质, 利用分岔图和 Lyapunov 指数谱对系统随参数变化的情况进行分析, 用数字信号处理 (DSP) 芯片对混沌系统进行硬件实现.

## 2. 系统的特性分析

参考文献[8, 9]的构建模式, 对 Lorenz 系统进行改造, 构建一个新的三维自治混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) - yz, \\ \dot{y} &= bx - y - xz, \\ \dot{z} &= -cz + y^2,\end{aligned}\quad (1)$$

式中  $x, y, z$  为系统变量, 正常数  $a, b, c$  为系统参量. 系统包含的 3 项非线性函数都是系统变量的光滑二次函数. 系统(1)与现有混沌系统的不同之处在于将系统变量交叉乘积  $yz$  负反馈回系统, 以及包含系统变量  $y^2$  非线性项.

系统具有对称性, 对系统作  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  变换, 系统保持不变. 系统关于  $z$  轴对称, 在  $x-y$  平面系统轨迹关于原点对称.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 90405011)、江苏省高等学校自然科学基金 (批准号: 07KJD120081) 和南京工程学院自然科学基金 (批准号: KXJ07068) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: cslin@njit.edu.cn

系统的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a-z & -y \\ b-z & -1 & -x \\ 0 & 2y & -c \end{bmatrix}. \quad (2)$$

系统有 5 个平衡点,分别为  $P_0(0,0,0), P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, -y_1, z_1), P_3(x_3, y_2, z_2), P_4(x_4, -y_2, z_2)$ , 其中

$$\begin{aligned} x &= y - y^3/ac, \\ y_1 &= \left( \frac{c}{2}(a+b - \sqrt{(a-b)^2 - 4a}) \right)^{1/2}, \\ y_2 &= \left( \frac{c}{2}(a+b + \sqrt{(a-b)^2 - 4a}) \right)^{1/2}, \\ z_{1,2} &= \frac{1}{2}(a+b \pm \sqrt{(a-b)^2 - 4a}). \end{aligned}$$

为保证系统存在实平衡点,系统参数需同时满足  $(a-b)^2 - 4a > 0$  和  $a+b - \sqrt{(a-b)^2 - 4a} > 0$ .

系统在平衡点  $P_0$  处的特征值  $\lambda_1 = -c, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(- (a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 + 4a(b-1)})$  皆为实数, 其中 2 个小于零, 1 个大于零, 平衡点  $P_0$  是不稳定的鞍点. 当系统的参数取值为  $a = 10, b = 40, c = 3$  时, 非零平衡点  $P_1(-0.1878, 5.5688, 10.3372)$ , 特征值  $\lambda_1 = 1.6612 + i10.2813, \lambda_2 = 1.6612 - i10.2813, \lambda_3 = -17.3225$ ;  $P_2(-11.3254, -5.5688, 10.3372)$ , 特征值  $\lambda_1 = 0.7758 + i14.2361, \lambda_2 = 0.7758 - i14.2361, \lambda_3 = -15.5516$ . 由于 3 个特征值中有 2 个实部大于零的复特征值, 非零平衡点  $P_1, P_2$  都是不稳定的鞍焦点, 且满足 Shil'nikov 定理<sup>[17]</sup>, 即对于 3 阶自治混沌系统平衡点的特征值  $\gamma_1$  和  $\sigma_1 \pm i\omega_1$ , 如果满足  $\sigma_1\gamma_1 < 0$  和  $|\gamma_1| > |\sigma_1|$ , 系统的矢量场满足产生混沌鞍焦点条件; 当系统的参数取值适当时, 则可满足形成奇异鞍环的条件, 系统可以产生混沌振荡<sup>[18]</sup>, 存在 Smale 马蹄意义上的混沌. 非零平衡点  $P_3(-32.3569, 10.9082, 39.6629)$ , 特征值  $\lambda_1 = 24.3935, \lambda_2 = -9.9838, \lambda_3 = -28.4096$ , 皆为实数, 其中 2 个小于零, 1 个大于零, 平衡点  $P_3$  是不稳定的鞍点.  $P_4(-54.1733, -10.9082, 39.6629)$ , 特征值  $\lambda_1 = -10.0081, \lambda_2 = -1.9959 + i34.5099, \lambda_3 = -1.9959 - i34.5099$ , 非零平衡点  $P_4$  的 3 个特征值中有 1 个特征值为负实数, 2 个特征值为负实部的复数, 因而非零平衡点  $P_4$  是稳定的鞍焦点.

保持系统的参数取值  $a = 10, c = 3$  不变, 得到系统变量  $y$  随参数  $b$  变化的分岔图和 Lyapunov 指数

谱, 如图 1 所示.

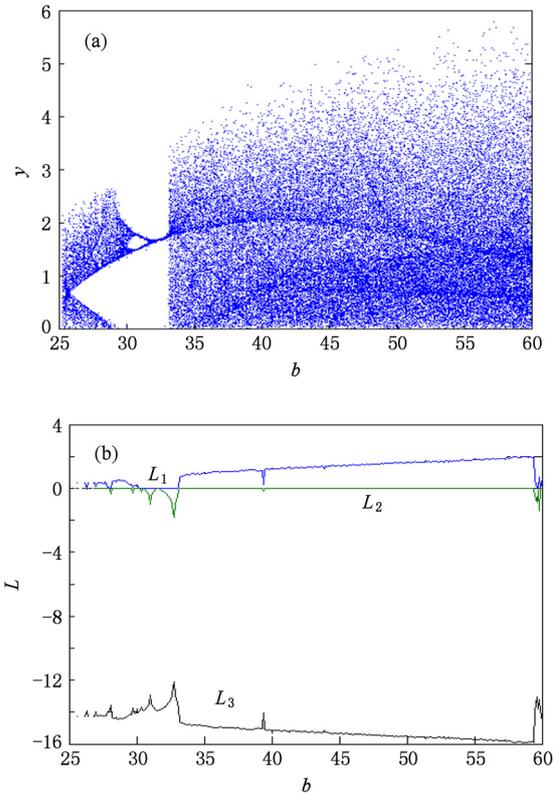


图 1 混沌系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图, (b) Lyapunov 指数谱

对系统的分岔图和 Lyapunov 指数谱分析, 系统参数  $b \in [33.75, 59.85]$  时, 系统有 1 个大于零的 Lyapunov 指数, 系统处于混沌状态. 当系统参数取值  $a = 10, b = 40, c = 3$  时, Lyapunov 指数  $L_1 = 1.7034, L_2 = 0, L_3 = -15.4028$ , 由分形维数的计算公式

$$D_L = j + \frac{1}{|L_{(j+1)}|} \sum_{i=1}^j L_i$$

得到分形维数为 2.1106. 当系统参数  $b = 30.23$  和  $b = 31.84$  时, 系统出现倍周期分岔现象.

### 3. 系统的 DSP 实现

为提高系统实现的精度和保证硬件实现的可靠性, 利用 DSP 芯片对系统进行硬件实现, 同时与数值仿真结果进行比较. 图 2 为系统参数  $b = 33$  时, 系统处于稳定的 2 周期态二维相图.

图 3 为系统参数  $b = 31$  时系统处于稳定的 4 周期态相图, 图 4 为系统参数  $b = 40$  时系统处于混沌状态相图. 系统的相图说明数值仿真和 DSP 硬件实

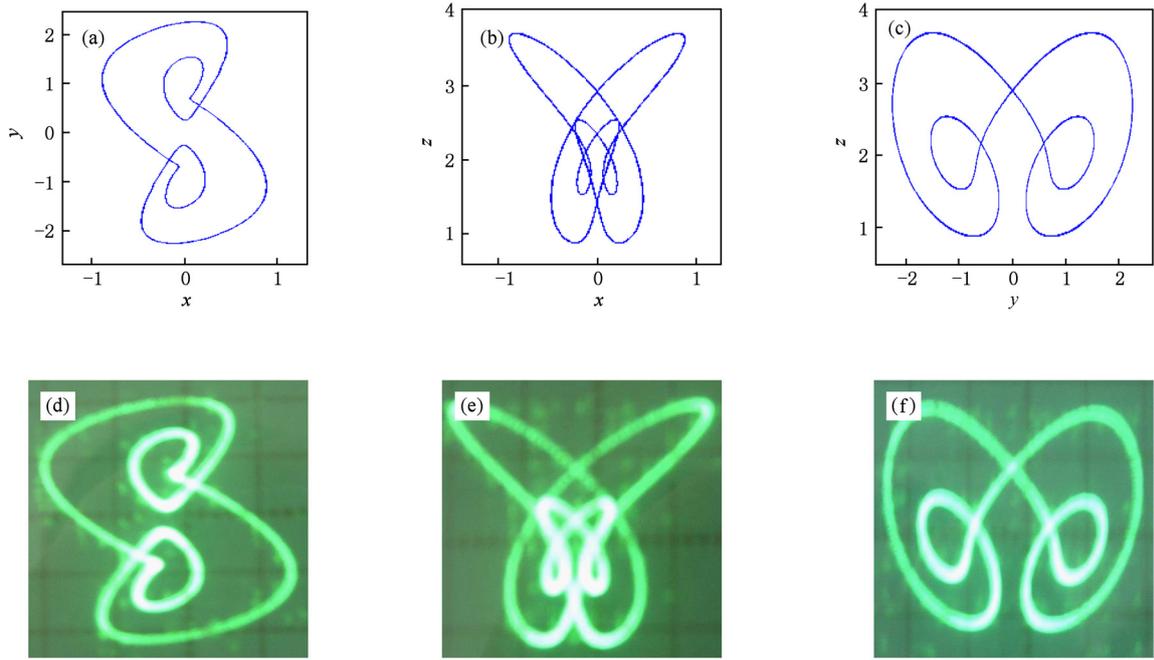


图2 系统参数  $b=33$  时系统处于稳定的2周期态相图 (a),(b)和(c)为数值仿真结果,(d),(e)和(f)为对应的 DSP 仿真结果

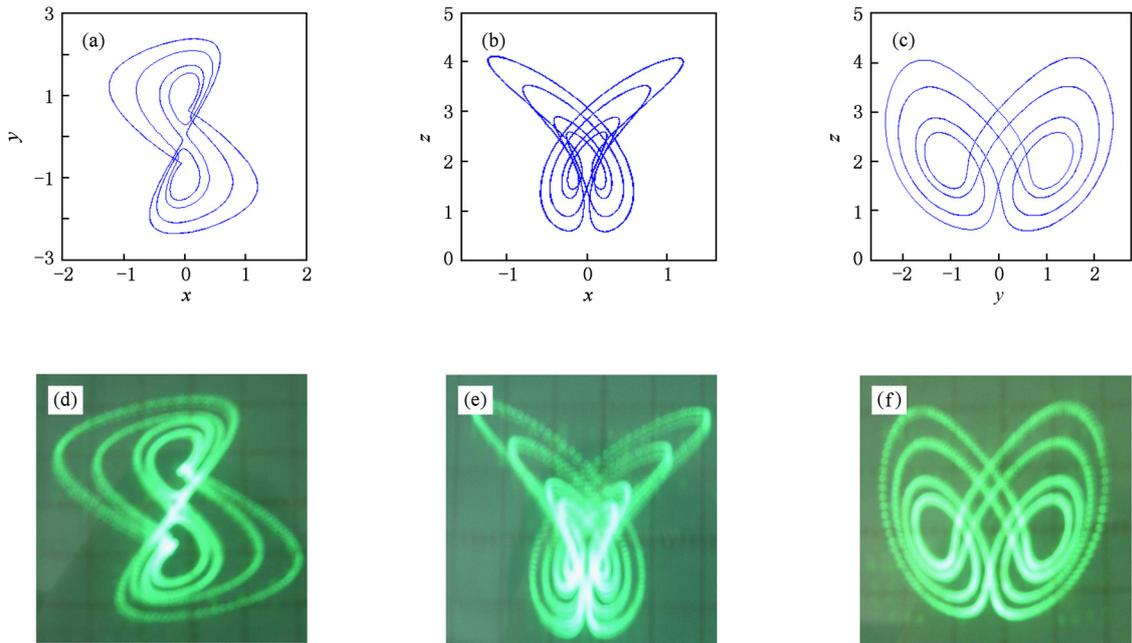


图3 系统参数  $b=31$  时系统处于稳定的4周期态相图 (a),(b),(c)为数值仿真结果;(d),(e),(f)为对应的 DSP 仿真结果

现的结果完全一致,同时表明系统具有与其他变形 Lorenz 系统不同的特性. 由于系统有 4 个非零平衡点,系统的二维相图具有自内到外的分层嵌套结构. 从  $x-z$  平面的二维相图可明显看出自内到外逐渐张开的双翼,体现了局部与整体的相似性,说明系统具有较为丰富的动力学演化行为.

#### 4. 结 论

通过拓展和改变 Lorenz 系统的非线性函数构建了一个新的自治混沌系统,系统有 3 个系统变量乘积的光滑二次非线性函数项和 5 个平衡点. 随着

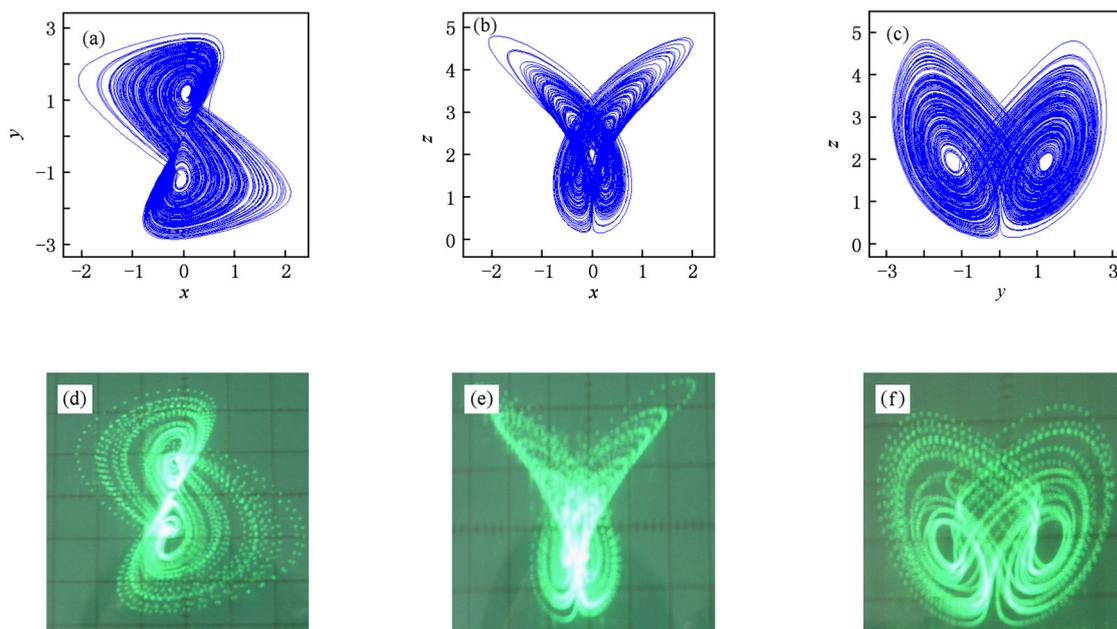


图4 系统参数  $b=40$  时系统处于混沌状态相图 (a),(b),(c)为数值仿真结果;(d),(e),(f)为对应的 DSP 仿真结果

系统变量的变化系统会发生倍周期分岔,系统具有学行为. 比 Lorenz 系统及其各种变形系统更为复杂的动力

[1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130  
 [2] Elwakil A S, Özguz S, Kennedy M P 2002 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **49** 527  
 [3] Miranda R, Stone E 1993 *Phys. Lett. A* **178** 105  
 [4] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifur. Chaos* **13** 261  
 [5] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465  
 [6] Lü J H, Chen G 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 659  
 [7] Lü J H, Chen G, Cheng D 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 1507  
 [8] Qi G Y, Chen G R, Du S Z, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Physica A* **352** 295  
 [9] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 1031  
 [10] Liu L, Su Y C, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1897  
 [11] Wang F Z, Qi G Y, Chen Z Q, Zhang Y H, Yuan Z Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4005 (in Chinese) [王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005]  
 [12] Wang G Y, Qiu S S, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3295 (in Chinese) [王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295]  
 [13] Wang G Y, Qiu S S, Li H W, Li C F, Zheng Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 2872  
 [14] Wang F Z, Chen Z Q, Wu W J, Yuan Z Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 3238  
 [15] Cai G L, Tan Z H, Zhou W H, Tu W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6230 (in Chinese) [蔡国梁、谭振海、周维怀、涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]  
 [16] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5131 (in Chinese) [刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 5131]  
 [17] Shil'nikov L P 1994 *Int. J. Bifur. Chaos* **4** 489  
 [18] Long M, Qiu S S 2007 *Chin. Phys.* **16** 2254

# A new smooth quadratic chaotic system and its digital signal processing implementation \*

Liu Yang-Zheng Lin Chang-Sheng<sup>†</sup> Li Xin-Chao

(*Institute of Nonlinear Physics, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China*)

(Received 20 August 2010; revised manuscript received 16 September 2010)

## Abstract

Developing and changing nonlinear function of Lorenz chaotic system, a new autonomous chaotic system is generated which contains three smooth quadratic terms of system variables and five equilibriums. The characteristics of five equilibriums are discussed and a fractal dimension is calculated. The features of chaotic system are analyzed in detail using bifurcation diagram and Lyapunov exponent. The period doubling bifurcation of the system can occur. The chaotic system is realized based on digital signal processing. Experimental result shows the effectiveness and feasibility of the theoretical analysis and verifies the behaviors of various attractors.

**Keywords:** chaotic system, bifurcation diagram, Lyapunov exponents, digital signal processing

**PACS:** 05.45.Pq, 05.45.Ac

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 90405011), the Natural Science Foundation of the Higher Education Institutions of Jiangsu Province, China (Grant No. 07KJD120081), and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology, China (Grant No. KXJ07068).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: cslin@njit.edu.cn