

Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-van der Pol 振子的随机分岔*

顾仁财 许勇[†] 郝孟丽 杨志强

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2010年11月23日收到; 2011年3月8日收到修改稿)

研究了 Lévy 稳定噪声激励下的双稳 Duffing-van der Pol 振子, 利用 Monte Carlo 方法, 得到了振幅的稳态概率密度函数. 分析了 Lévy 稳定噪声的强度和稳定指数对概率密度函数的影响, 通过稳态概率密度的性质变化, 讨论了噪声振子的随机分岔现象, 发现了不仅系统参数和噪声强度可以视为分岔参数, Lévy 噪声的稳定指数 α 的改变也能诱导系统出现随机分岔现象.

关键词: Lévy 稳定噪声, Duffing-van der Pol 振子, 稳态概率密度函数, 随机分岔

PACS: 05.40. - a, 05.40. Fb, 05.45. - a

1. 引言

许多物理、化学和生物进程都可以看做是非线性的, 其振荡运动会受到外在噪声的影响^[1,2]. 噪声诱导下的非线性系统的动力学行为, 已经成为近年来最热门的研究方向之一, 受到了许多学者的关注. 由于参数的改变而引起的系统定性态变化的现象, 称为分岔. 人们对确定系统的分岔已研究了多年, 积累了许多成果^[3-8], 但对随机系统分岔现象的研究目前仍然处于初级阶段^[9], 只有少量严格的一般性定理与准则, 许多现象只能通过计算机模拟证实, 或只对特定的模型进行研究. 目前, 随机分岔的定义主要有两种: 动态分岔(D分岔)和唯象分岔(P分岔). D分岔点一般通过最大 Lyapunov 指数的正负号变化来判定. P分岔则研究随机动态系统的不变测度的密度(平稳概率密度)的形状(峰的个数、位置及形状)随参数的变化, 可通过对平稳概率密度求极值进行研究. D分岔是一种动态概念, 与确定性分岔相对应. P分岔则是一种静态概念. D分岔和P分岔之间一般没有必然的联系.

在以往很多研究中, 所设的噪声源通常是高

斯白噪声, 因为其数学上的处理就会变得更简单些. 然而, 高斯白噪声是一种理想噪声源, 只能在均值小范围的附近起伏, 不能模拟大幅度起伏的噪声, 而 Lévy 噪声具有长拖尾性质, 能够很好的解决这个问题. 在随机动力系统里, Lévy 稳定噪声被认为与高斯噪声同等重要. 高斯噪声是 Lévy 稳定噪声的一种特殊情形. 近年来, 不仅在物理学, 生物学, 地球科学等自然学科, 而且在经济学, 社会学等领域里, Lévy 噪声吸引了很多人的目光^[10-14]. 尽管如此, 对 Lévy 噪声驱动下的动力系统的研究依然很少. Duffing-van der Pol 振子是一个重要的物理学模型, 许多现象经过简化和模型化后可以用这一模型描述. 对于加性或乘性高斯噪声激励下 Duffing-van der Pol 振子的随机分岔现象, Arnold 等作了较为详尽的研究和讨论^[9,15-18], 其结果表明系统参数和噪声强度都能诱导随机分岔的发生. 迄今为止, 对于 Lévy 噪声诱导的随机分岔的研究还未见报道, 因此研究 Lévy 噪声激励下的动力系统的随机分岔现象是有意义的. 本文研究了 Lévy 稳定噪声作用下的双稳 Duffing-van der Pol 振子, 讨论了 Lévy 稳定噪声对稳态概率密度的影响, 捕捉到了该随机系统的 P 分岔现象.

* 国家自然科学基金(批准号:10972181)和西北工业大学基础研究和翱翔之星资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn

2. 系统模型

考虑如下形式 Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-van der Pol 振子

$$\ddot{x} - (\varepsilon + x^2 - x^4) \dot{x} + x + \beta_0 x^3 = \zeta(t) \quad (\beta_0 \geq 0), \quad (1)$$

其中 $\zeta(t)$ 是 Lévy 白噪声, 其由包含 4 个参数 $(\alpha, \beta, \gamma, D)$ 的特征函数所决定

$$E[\exp(ik\zeta(t))] = \exp(t\{ik\gamma - D|k|^\alpha[1 - i\beta k\omega(k, \alpha)/|k|]\}) + o(t). \quad (2)$$

其中, 当 $\alpha \neq 1$ 时, $\omega(k, \alpha) = \tan \frac{\pi\alpha}{2}$; 当 $\alpha = 1$ 时,

$\omega(k, \alpha) = -\frac{2}{\pi} \ln |k|$. $E[\cdot]$ 代表 Lévy 噪声 $\zeta(t)$ 的均值. 这里参数 $\alpha (0 < \alpha \leq 2)$ 表示稳定指数, 描述 Lévy 稳定分布 $f(\zeta; a, \beta, \gamma, D)$ 的渐进拖尾, 当 $\alpha < 2$ 时, $f(\zeta; a, \beta, \gamma, D) \sim |\zeta|^{-\alpha-1}$, 其中 $|\zeta| \gg 1$. $\beta (-1 \leq \beta \leq 1)$ 是偏斜参数, 描述分布的偏离程度, $\gamma (-\infty \leq \gamma \leq \infty)$ 是中心或者是位置参数, 代表当 $\alpha > 1$ 时分布的均值, D 为广义的扩散系数, 也可以称作噪声强度. 函数 $\omega(k, \alpha)$ 在 $\alpha = 1$ 时是间断的. 图 1(a) 为概率密度函数的一个例子, 按照 McCuUoch 算法产生 Lévy 稳定白噪声^[19], 图 1(b) 是 Lévy 白噪声的时域图其中 $\alpha = 1.75, \beta = 0.0, \gamma = 0.0, D = 1.0$.

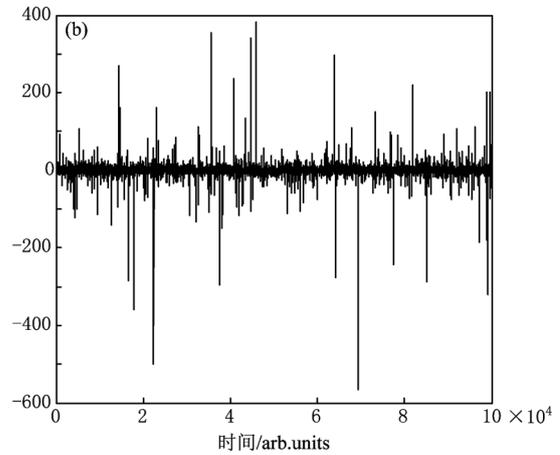
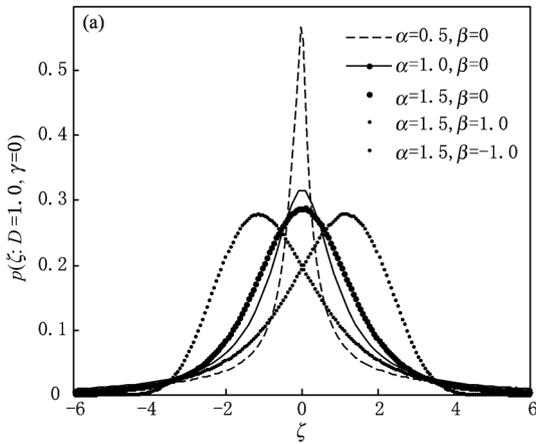


图 1 Lévy 稳定噪声 (a) 不同参数下的概率密度函数; (b) 噪声的样本

在 $D = 0$ 的确定情形时, 当 $-1/8 < \varepsilon < 0$, 系统 (1) 呈现出双稳行为: 相平面上有两个吸引子——在原点处的稳定焦点和一个稳定的极限环, 如图 2 所示. 双稳性区域位于鞍结分岔 ($\varepsilon = -1/8$) 与次临界 Andronov-Hopf 分岔 ($\varepsilon = 0$) 之间. 进一步, 参数 β_0 描述振子的反同步行为, 而当 $\beta_0 = 0$ 时系统 (1) 是同步的, 即振子的频率并不取决于其振幅.

3. 随机分岔

下面通过分析稳态概率密度的变化, 讨论噪声振子的随机分岔现象. 本文考虑对称 Lévy 噪声 ($\beta = 0$) 的情形.

对于 $\alpha = 2.0$, 则 Lévy 稳定噪声退化为高斯白噪声. 假设噪声强度 D 足够小, 引入变换:

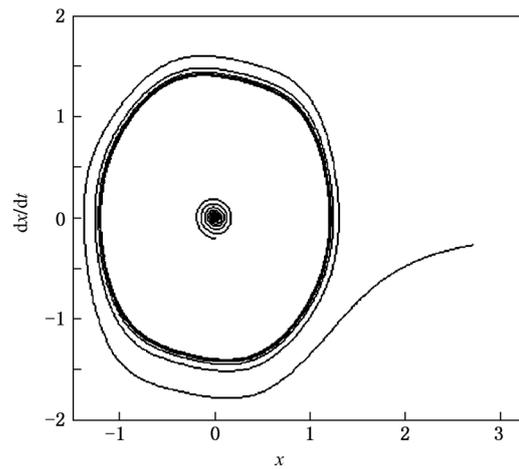


图 2 当 $D = 0, \varepsilon = -0.11$ 时, 系统的两个吸引子

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \theta, \\ \dot{x}(t) &= -a \sin \theta, \\ \theta &= t + \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入到(1)式中,可得

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a\sin^2\theta(\varepsilon + a^2\cos^2\theta - a^4\cos^4\theta) \\ &\quad + \beta_0 a^3 \cos^3\theta \sin\theta - \sin\theta \zeta(t), \\ \dot{\varphi} &= \sin\theta \cos\theta(\varepsilon + a^2\cos^2\theta - a^4\cos^4\theta) \\ &\quad + \beta_0 a^2 \cos^4\theta - \frac{\cos\theta}{a} \zeta(t), \end{aligned} \quad (4)$$

利用随机平均法^[20]可以得到如下形式的随机微分方程

$$\begin{aligned} da &= \left[\frac{\varepsilon a}{2} + \frac{a^3}{8} - \frac{a^5}{16} + \frac{D}{2a} \right] dt + \sqrt{D} dW_1(t), \\ d\varphi &= \frac{3\beta_0 a^2}{8} dt + \frac{1}{a} \sqrt{D} dW_2(t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 代表独立的单位维纳过程. 显然, da 不依赖于 φ , 因此可得振幅 $a(t)$ 的稳态概率密度函数为

$$p_s(a) = N a e^{\left[\frac{a^2(24\varepsilon + 3a^2 - a^4)}{48D} \right]}, \quad (6)$$

其中 N 为归一化常数. 讨论概率密度函数(6)式的极值情况, 可得系统(1)在参数平面 (ε, D) 上的分岔图, 见图3. 概率密度函数 $p_s(a)$ 在着色区域处为双峰结构, 在空白区域处为单峰结构, 曲线 l_1 和 l_2 为有色区域的边界线, 参数从边界线的一边变化到另一边, 则系统发生一次随机 P 分岔. 此外, 当 $D > D_0 \approx 0.036$ 或 $\varepsilon < \varepsilon_0 \approx -0.165$ 时, 双峰区域将不复存在, 也就不能观察到 P 分岔现象.

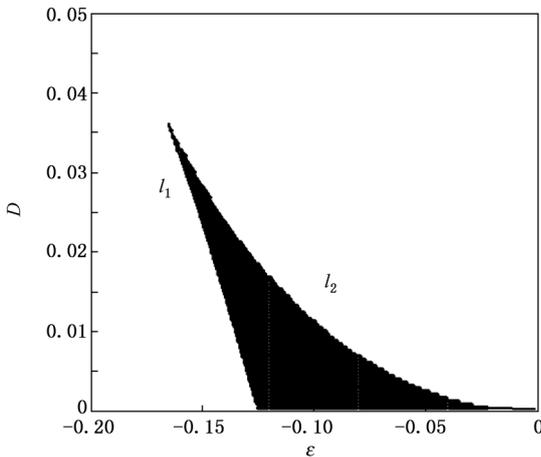


图3 $\alpha = 2.0$ 时, 系统(1)在参数平面 (ε, D) 上的分岔图

若 $\alpha \neq 2$, 则方程(1)所对应的 Fokker-Planck 方程是空间分数阶的, 目前无法求得其精确平稳解. 本文采用 Monte Carlo 方法求取振幅的稳态概率密度. 其中, 利用文献[21]中介绍的数值方法对方程(1)进行求解, 积分时间步长 $\Delta t = 0.01$, 计算次

数 $p = 10^7$, 初始条件 $x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 0.1$.

图4为 Duffing-van der Pol 振子在参数平面 (ε, D) 上的随机分岔图, 此时 Lévy 噪声稳定指数 $\alpha = 1.75$. $p_s(a)$ 在着色区域处为双峰结构, 在空白区域处为单峰结构. 观察图3和图4可以发现, 图4的双峰区域包含了图3中的双峰区域. 此外, 原本在图3中对应单峰分布的某些区域在图4中转化为双峰性区域. 当 $\varepsilon = -0.13$, 两图有着类似的随机 P 分岔现象发生, 即在噪声强度增大的过程中, 稳态振幅分布都会从双峰结构转变为单峰结构, 如图5(a)所示. 同时可以看到, 图3中 $\varepsilon = -0.17$ 时, 无论噪声强度 D 取何值, $p_s(a)$ 始终为单峰结构; 而图4中 $\varepsilon = -0.17$ 时, 随着噪声强度的增大, $p_s(a)$ 将从单峰分布变为双峰分布, 再由双峰分布转化为单峰分布, 见图5(b).

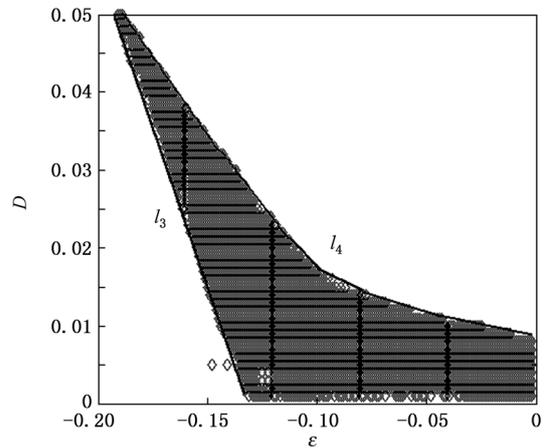


图4 $\alpha = 1.75$ 时, Duffing-van der Pol 振子在参数平面 (ε, D) 上的分岔图

取定系统参数 $\varepsilon = -0.13$, 图6给出了噪声强度 $D = 0.015$ 和 $D = 0.025$ 时不同稳定指数 α 下系统振幅的稳态概率密度 $p_s(a)$. 当 $D = 0.015$ 时, 在 α 变化的过程中, $p_s(a)$ 的峰的结构不会发生改变, 即 $p_s(a)$ 始终为双峰分布, 因此系统没有发生随机 P 分岔, 如图6(a)所示. 然而, 同时可以发现, 随着 α 的变小, 峰形会变得更加陡峭, 峰所对应的振幅也将会向较小值处移动. 由图6(b)可知, 当 $\alpha = 2.0$ 时, 振幅分布是单峰的, 当 $\alpha = 1.2$ 时, $p_s(a)$ 转变成双峰结构. 因此, 在 α 从 2.0 减小到 1.2 中, 系统发生了一次随机 P 分岔且分岔点为 $\alpha \approx 1.7$.

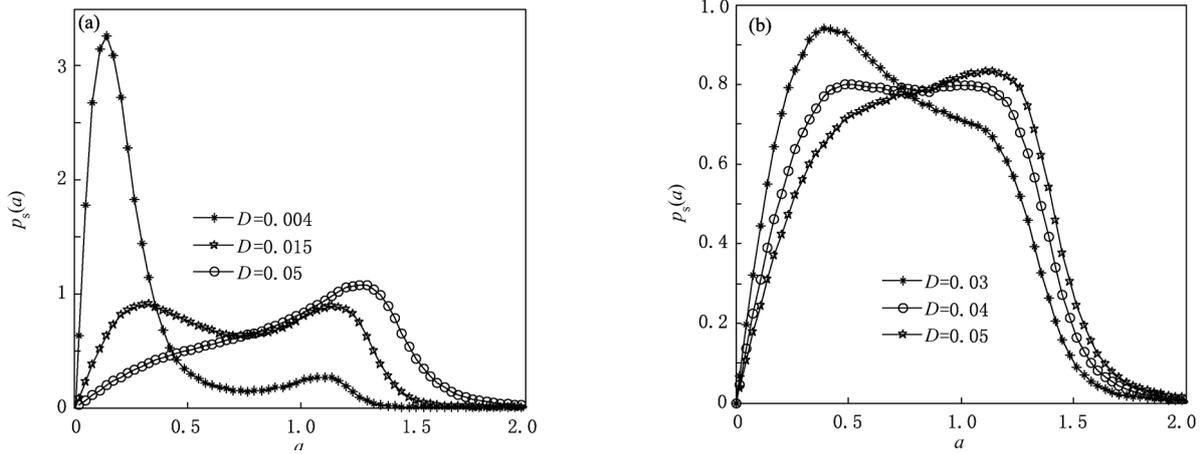


图5 $\alpha = 1.75$ 时,不同噪声强度下系统振幅的稳态概率密度 (a) $\varepsilon = -0.13$; (b) $\varepsilon = -0.17$

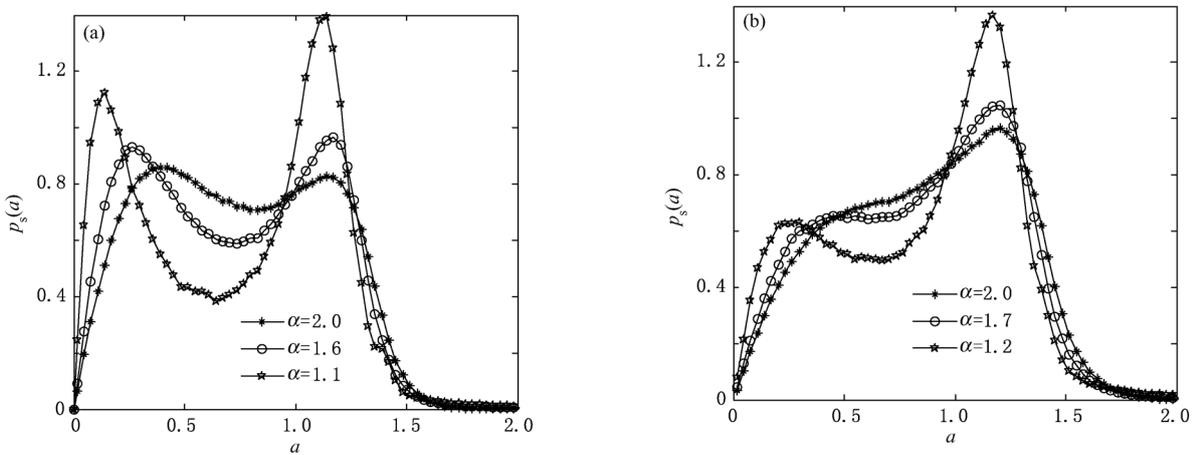


图6 $\varepsilon = -0.13$ 时,不同稳定指数下系统振幅的稳态概率密度 (a) $D = 0.015$; (b) $D = 0.025$

4. 结 论

研究了 Lévy 稳定噪声激励下双稳 Duffing-van der Pol 振子的随机分岔问题. 对于 $\alpha = 2.0$ 时,利用随机平均方法,得到了振幅稳态概率密度的理论解,研究了系统的随机分岔行为. 对于 $\alpha \neq 2.0$ 的情形,采用 Monte Carlo 方法,得到了系统振幅的稳态概率密度函数,并讨论了系统参数 ε 和噪声强度 D , 稳定指数 α 对稳态概率密度 $p_s(a)$ 的影响. 研究

发现,在合适的参数下, ε 和 D 的增大都能够使得 $p_s(a)$ 从单峰结构转化为双峰结构或者从双峰结构转化为单峰结构. 而对于稳定指数 α 而言,如果在 $\alpha = 2.0$ 时 $p_s(a)$ 为双峰结构,在稳定指数 α 的减小过程中, $p_s(a)$ 的双峰性质不会改变,但峰形会变得更加陡峭;如果在 $\alpha = 2.0$ 时 $p_s(a)$ 为单峰结构,则随着 α 的变小, $p_s(a)$ 可能会从单峰型分布变成双峰分布. 因此,不仅系统参数和噪声强度可以视为随机 P 分岔的分岔参数, Lévy 噪声稳定指数的改变也能诱导系统出现 P 分岔.

[1] Ushakov O, Wünsche H, Henneberger F, Khovanov I, Schimansky L, Zaks M A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 123903
 [2] Mankin R, Laas T, Sauga A, Ainsaar A, Reiter E 2006 *Phys. Rev. E* **74** 021101
 [3] Hao B L, Zhang S Y 1983 *Acta Phys. Sin.* **32** 198 (in Chinese)

[郝柏林, 张淑誉 1983 物理学报 **32** 198]
 [4] Zhao Y G 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 731 (in Chinese) [赵一广 1991 物理学报 **40** 731]
 [5] Masataka K, Hayato C 2009 *Chaos* **19** 043121
 [6] Tang J S, Ouyang K J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4437 (in Chinese)

- [唐驾时、欧阳克俭 2006 物理学报 **55** 4437]
- [7] Zhao D, M Zhang Q C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030518
- [8] Jiang G R, Xu B G, Yang Q G 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5235
- [9] Arnold L 1998 *Random Dynamical Systems* (Springer: New York)
- [10] Majumdar S N, Ziff R M 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 050601
- [11] Romanelli A, Siri R, Micenmacher V 2007 *Phys. Rev. E* **76** 037202
- [12] Dybiec B, Gudowska E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 021109
- [13] Ponomarev A V, Denisov S, Hanggi P 2010 *Phys. Rev. A* **81** 043615
- [14] Zeng L Z, Xu B H 2010 *Physica A* **389** 5128
- [15] Zakharova A 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011106
- [16] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1165 (in Chinese)[徐伟、贺群、戎海武、方同 2003 物理学报 **52** 1165]
- [17] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 (in Chinese)[孙晓娟、徐伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610]
- [18] Li G J, Xu W, Wang L, Feng J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2107 (in Chinese)[李高杰、徐伟、王亮、冯进铃 2008 物理学报 **57** 2107]
- [19] Leccardi M 2005 *the Fifth Euromech Nonlinear Dynamics Conference* Eindhoven, Netherland August 7—12 2005
- [20] Zhu W Q 1996 *ASME Appl. Mech. Rev.* **49** 72
- [21] Zeng L Z, Bao R H, Xu B H 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** 7175

Stochastic bifurcations in Duffing-van der Pol oscillator with Lévy stable noise*

Gu Ren-Cai Xu Yong[†] Hao Meng-Li Yang Zhi-Qiang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 23 November 2010; revised manuscript received 8 March 2011)

Abstract

This paper aims to investigate the influence of Lévy stable noise on a bistable Duffing-van der Pol oscillator. We obtain the stationary probability density function of amplitude for the Duffing-van der Pol oscillator by use of Monte Carlo method, and analyze the influences of the noise intensity and the stability index on the stationary probability density. Stochastic bifurcations are further discussed through a qualitative change of the stationary probability distribution, which indicates that not only system parameters and noise intensity can be treated as bifurcation parameters, but also the change of the stability index will induce stochastic bifurcations.

Keywords: Lévy stable noise, Duffing-van der Pol oscillator, stationary probability density function, stochastic bifurcations

PACS: 05.40. - a, 05.40. Fb, 05.45. - a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972181), and the Fundamental Research Foundation and Aoxiang Star Plan of Northwestern Polytechnical University, China.

[†] Corresponding author. E-mail: hsux3@nwpu.edu.cn