

# 湍流对部分相干双曲余弦高斯光束的瑞利区间的影响\*

季小玲<sup>†</sup>

(四川师范大学物理系, 成都 610068)

(2010年8月2日收到; 2010年9月13日收到修改稿)

推导出了部分相干双曲余弦高斯光束在自由空间和湍流大气中传输瑞利区间的解析公式, 并研究了湍流对光束瑞利区间的影响. 研究表明, 部分相干双曲余弦高斯光束的瑞利区间由湍流强度和光束参数等因数共同确定. 湍流使得光束的瑞利区间缩短, 并且湍流越强瑞利区间越短. 在自由空间中, 瑞利区间随光束相干参数  $\alpha$ 、光束参数  $\beta$  和高斯束宽  $w_0$  的增大以及波长  $\lambda$  的减小而增大. 但是,  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  越小以及  $\lambda$  越大, 瑞利区间受湍流的影响越小. 并且, 当  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  足够小以及  $\lambda$  足够大时湍流对瑞利区间的影响可以忽略.

**关键词:** 瑞利区间, 部分相干双曲余弦高斯光束, 大气湍流, 自由空间

**PACS:** 42. 68. Bz, 42. 25. Dd, 42. 25. Kb

## 1. 引言

在激光理论中, 瑞利区间用来描述激光束无明显扩展的传输距离, 即准直范围<sup>[1]</sup>. 最初, 瑞利区间概念仅限于描述完全相干光的准直范围<sup>[1]</sup>. 2001年, Wolf 等把这一概念的描述对象从完全相干光拓展到了部分相干光<sup>[2]</sup>. 研究表明, 若部分相干光与完全相干光在束腰处有相同的光强分布, 则部分相干光较完全相干光的瑞利区间短<sup>[2]</sup>. 最近, 我们还研究了完全相干和部分相干列阵光束的瑞利区间<sup>[3, 4]</sup>. 研究表明, 子光束的叠加方式会影响列阵光束的瑞利区间; 列阵光束的瑞利区间随子光束数目的增加而增大<sup>[3, 4]</sup>. 然而, 以上研究仅限于激光束在自由空间中传输的瑞利区间. 激光束的大气传输对遥感、跟踪和远距离光通信, 以及某些军事应用都有十分重要的意义<sup>[5]</sup>. 近年来, 国内外学者就湍流对激光传输特性的影响做了大量的研究<sup>[6-20]</sup>. 另一方面, 厄米正弦类高斯(HSG)光束是傍轴近似下波动方程的新解<sup>[21]</sup>. HSG在理论上代表了较为广泛的一大类光束, 如正(余)弦高斯光束和双曲正(余)弦高斯光束的存在, 他们携带有限能量, 并且可以在

实验室用特殊的切趾光阑或光腔产生. 此外, 实际激光束存在部分空间相干的情况. 因此, 研究湍流对部分相干双曲余弦高斯光束瑞利区间的影响是十分重要的. 本文推导出了部分相干双曲余弦高斯光束在自由空间和湍流大气中传输光束瑞利区间的解析公式, 并研究了湍流对光束瑞利区间的影响, 得到了一些有意义的结果.

## 2. 理论公式

在  $z=0$  平面处部分相干双曲余弦高斯光束的交叉谱密度函数可表示为<sup>[21, 22]</sup>

$$W(x'_1, x'_2, z=0) = \exp\left(-\frac{x_1'^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0 x'_1) \times \exp\left(-\frac{x_2'^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0 x'_2) \times \exp\left[-\frac{(x'_1 - x'_2)^2}{2\sigma_0^2}\right], \quad (1)$$

其中,  $w_0$  为对应基模高斯光束在  $z=0$  处的束腰宽度,  $\Omega_0$  为与双曲余弦有关的光束参数.

根据广义惠更斯-菲涅耳原理, (1) 式所表征的部分相干双曲余弦高斯光束通过自由空间传输的

\* 国家自然科学基金(批准号:60778048)和中国科学院大气成分与光学重点实验室开放课题基金(批准号:JJ-10-08)资助的课题.

<sup>†</sup>E-mail: jixl100@163.com

光强为<sup>[23]</sup>

$$I(x, z) = \frac{k}{2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx'_1 dx'_2 W(x'_1, x'_2, z=0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(x'^2_1 - x'^2_2) - 2(x'_1 - x'_2)x]\right\}, \quad (2)$$

其中波数  $k = 2\pi/\lambda$  ( $\lambda$  为波长).

二阶矩束宽定义为<sup>[24]</sup>

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 I(x, z) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} I(x, z) dx}. \quad (3)$$

将(2)式代入(3)式,采用积分变量代换  $u = (x'_2 + x'_1)/2$  和  $v = x'_2 - x'_1$ , 并利用积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi xs) dx = \delta(s) \quad (4)$$

和

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-i2\pi xs) dx = -\frac{1}{(2\pi)^2} \delta''(s), \quad (5)$$

其中,  $\delta$  表示 Dirac 函数,  $\delta''$  为其二阶导数, 经过复杂的运算得到部分相干双曲余弦高斯光束通过自由空间传输的二阶矩束宽为

$$\langle x^2 \rangle = A + Bz^2, \quad (6)$$

式中

$$A = \frac{w_0^2}{4} \left[ 1 + \frac{\beta^2 \exp(\beta^2/2)}{\exp(\beta^2/2) + 1} \right], \quad (7)$$

$$B = \frac{1}{k^2 w_0^2} \left[ 1 - \frac{\beta^2}{\exp(\beta^2/2) + 1} + \frac{1}{\alpha^2} \right], \quad (8)$$

其中, 光束参数  $\beta = \Omega_0 w_0$ , 光束相干参数  $\alpha = \sigma_0/w_0$ .

在自由空间中, 瑞利区间  $z_{R \text{ free}}$  定义为光束横截面积扩展到源场处的两倍时光束所传输的距离<sup>[1]</sup>. 由(6)式可知

$$Bz_{R \text{ free}}^2 - A = 0. \quad (9)$$

解方程(9) 得到部分相干双曲余弦高斯光束通过自由空间传输的瑞利区间为

$$z_{R \text{ free}} = \sqrt{A/B}. \quad (10)$$

另一方面, 部分相干光的二阶矩  $\langle x^2 \rangle$  在湍流大气中的传输公式为<sup>[12, 25]</sup>

$$\langle x^2 \rangle = A + Bz^2 + \frac{2}{3} Tz^3, \quad (11)$$

式中

$$T = \pi^2 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (12)$$

$\Phi_n$  为湍流大气介质的折射率起伏空间谱密度函数.

在湍流大气中, 与自由空间类似, 光束的瑞利区间  $z_R$  仍然可定义为光束横截面积扩展到源场处的两倍时光束所传输的距离. 由(11)式可知

$$\frac{2}{3} Tz_R^3 + Bz_R^2 - A = 0. \quad (13)$$

解方程(13) 得到部分相干双曲余弦高斯光束通过湍流大气传输的瑞利区间为

$$z_R = \frac{1}{2T} \left( -B + \frac{B^2}{C} + C \right), \quad (14)$$

其中

$$C = \{6AT^2 - B^3 + [12A(3AT^2 - B^3)]^{1/2} T\}^{1/3}. \quad (15)$$

值得指出, (14) 式仅在湍流大气中适用, 而在自由空间中 ( $T=0$ ) 中(14)式失效, 此时(10)式有效. 并且, 直接比较(9)式和(13)式可知

$$z_R < z_{R \text{ free}}. \quad (16)$$

(16)式表明, 湍流使得部分相干双曲余弦高斯光束的瑞利区间缩短. 其物理原因是, 湍流使得光束扩展, 因此光束瑞利区间缩短.

### 3. 数值计算结果及分析

本文数值计算中, 采用 Von Karman 谱, 即<sup>[5]</sup>

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left( \kappa^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-11/6} \times \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (17)$$

其中,  $C_n^2$  为折射率结构常数, 它表征湍流的强弱.

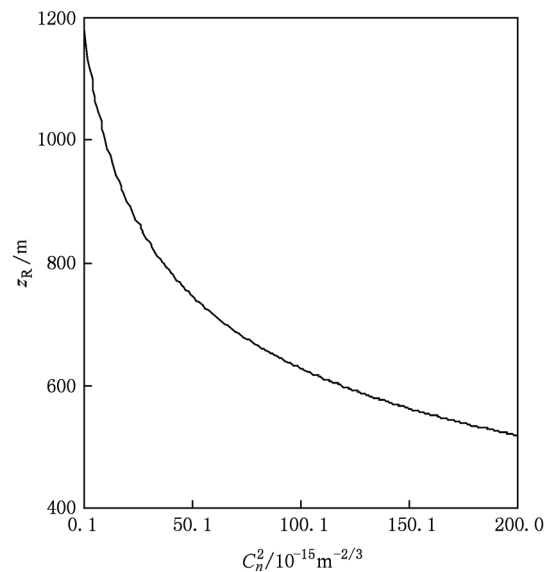


图1  $z_R$  随  $C_n^2$  变化曲线  $w_0 = 2 \text{ cm}, \beta = 1, \alpha = 1, \lambda = 1.06 \text{ }\mu\text{m}$

$\kappa_m = 5.92/l_0$ ,  $l_0$  和  $L_0$  分别为湍流的内尺度和外尺度. 若采用  $l_0$  和  $L_0$  的典型值  $l_0 = 0.01 \text{ m}$ ,  $L_0 = 10 \text{ m}$ , 并将(17)式代入(12)式积分得到

$$T = 7.067C_n^2. \quad (18)$$

图1—5分别为部分相干双曲余弦高斯光束的瑞利区间  $z_R$  随折射率结构常数  $C_n^2$ 、光束相干参数  $\alpha$ 、光束参数  $\beta$ 、波长  $\lambda$  和基模高斯光束束腰宽度  $w_0$  的变化曲线, 其中虚线和实线分别对应于自由空间和湍流大气中的情况. 图1—5表明, 湍流使得瑞利

区间缩短, 即  $z_R < z_{R \text{ free}}$ . 并且, 湍流越强,  $z_R$  越小 (见图1). 由图2—5可知, 在自由空间中,  $z_{R \text{ free}}$  随  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  的增大以及  $\lambda$  的减小而增大. 但是,  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  越大以及  $\lambda$  越小,  $z_R$  受湍流的影响越大. 特别地, 当  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  足够小时 (例如, 图2中  $\alpha < 0.4$ , 图3中  $\beta < 0.1$ , 图5中  $w_0 < 0.011 \text{ m}$  时) 以及  $\lambda$  足够大时 (图2中  $\lambda > 2.5 \mu\text{m}$  时), 实线与虚线几乎重合, 即  $z_R \approx z_{R \text{ free}}$ .

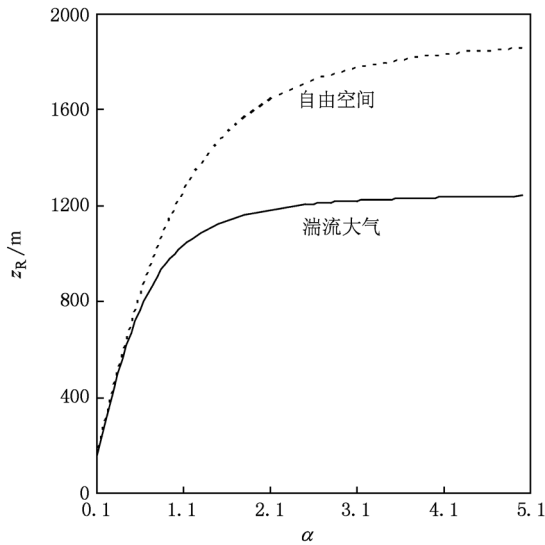


图2  $z_R$  随  $\alpha$  变化曲线  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

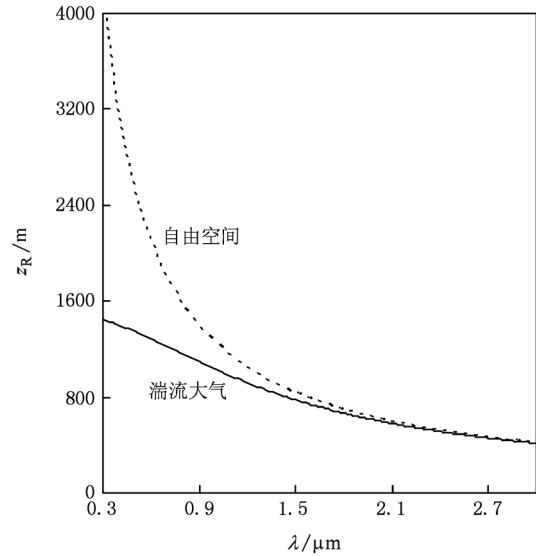


图4  $z_R$  随  $\lambda$  变化曲线  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

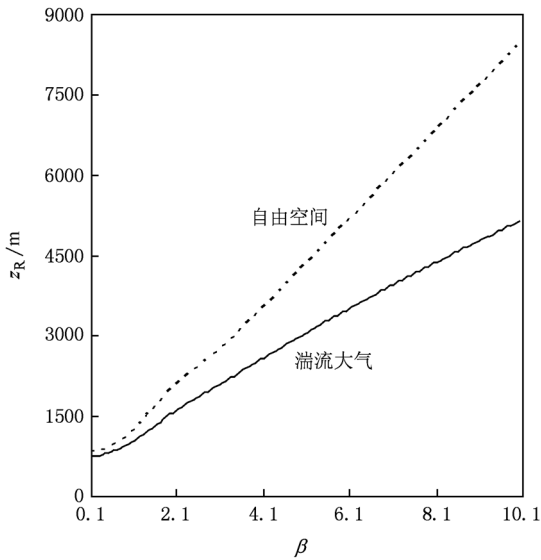


图3  $z_R$  随  $\beta$  变化曲线  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

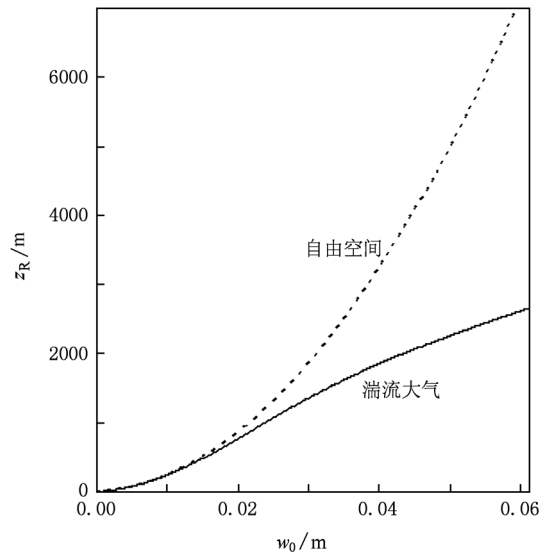


图5  $z_R$  随  $w_0$  变化曲线  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$

## 4. 结 论

推导出了部分相干双曲余弦高斯光束在自由空间和湍流大气中传输瑞利区间的解析公式,并研究了湍流对光束瑞利区间的影响. 研究表明,部分相干双曲余弦高斯光束的瑞利区间  $z_R$  由湍流强度和光束参数等因数共同确定. 湍流使得光束的

瑞利区间缩短. 并且,湍流越强,瑞利区间缩短越厉害. 在自由空间中,  $z_{R \text{ free}}$  随  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  的增大以及  $\lambda$  的减小而增大. 但是,  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  越小以及  $\lambda$  越大,  $z_R$  受湍流的影响越小. 当  $\alpha, \beta$  和  $w_0$  足够小以及  $\lambda$  足够大时湍流对瑞利区间的影响可以忽略. 所得结果对部分相干光在湍流大气传输的应用具有重要意义.

- [1] Siegman A E 1986 *Lasers* (Mill Valley, CA: University Science Books)
- [2] Gbur G, Wolf E 2001 *Opt. Commun.* **199** 295
- [3] Ji X L 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 1242010
- [4] Li X Q, Ji X L, Yang F 2010 *Opt. Laser Technol.* **42** 604
- [5] Andrews L C, Phillips R L 2005 *Laser Beam Propagation through Random Media* (2nd Ed.) (Bellingham, Washington: SPIE Press)
- [6] Shirai T, Dogariu A, Wolf E 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1094
- [7] Salem M, Korotkova O, Dogariu A, Wolf E 2004 *Waves Random Media* **14** 513
- [8] Cai Y J, He S 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 041117
- [9] Lu W, Liu L, Sun J, Yang Q, Zhu Y 2007 *Opt. Commun.* **271** 1
- [10] Wang T, Pu J X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6754 (in Chinese) [王涛、蒲继雄 2007 物理学报 **56** 6754]
- [11] Korotkova O, Wolf E 2007 *Opt. Lett.* **32** 2137
- [12] Dan Y, Zhang B 2009 *Opt. Lett.* **34** 563
- [13] Mao H, Zhao D M 2010 *Opt. Express* **18** 1741
- [14] Ji X L, Pu Z C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 029201
- [15] Zhou P, Liu Z J, Xu X J and Chu X X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 024205
- [16] Chen X W, Tang M Y, Ji X L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2607 (in Chinese) [陈晓文、汤明玥、季小玲 2008 物理学报 **57** 2607]
- [17] Chen X W, Ji X L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2435 (in Chinese) [陈晓文、季小玲 2009 物理学报 **58** 2435]
- [18] Zheng W W, Wang L Q, Xu J P, Wang L G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5098 (in Chinese) [郑巍巍、王丽琴、许静平、王立刚 2009 物理学报 **58** 5098]
- [19] Chen X W, Ji X L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 024203
- [20] Ji X L, Eyyuboglu H T, Baykal Y 2010 *Opt. Express* **18** 6922
- [21] Casperson L W, Hall D G, Tovar A A 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 954
- [22] Zahid M, Zubairy M S 1989 *Opt. Commun.* **70** 361
- [23] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [24] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [25] Ji X L, Li X Q 2010 *J. Opt.* **12** 035403

# Influence of turbulence on the Rayleigh range of partially coherent cosh-Gaussian beams<sup>\*</sup>

Ji Xiao-Ling<sup>†</sup>

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

(Received 2 August 2010; revised manuscript received 13 September 2010)

## Abstract

The analytical expressions for the Rayleigh range of partially coherent cosh-Gaussian beams both in free space and in atmospheric turbulence are derived. The influence of turbulence on the Rayleigh range of partially coherent cosh-Gaussian beams is studied. It is shown that the Rayleigh range of partially coherent cosh-Gaussian beams depends on the strength of turbulence and the beam parameters. The Rayleigh range decreases due to turbulence. The stronger the turbulence, the shorter the Rayleigh range is. In free space, the Rayleigh range increases with the increase of beam coherence parameter  $\alpha$ , beam parameter  $\beta$  and Gaussian waist width  $w_0$ , and the decrease of wave length  $\lambda$ . However, the Rayleigh range is less sensitive to turbulence with  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $w_0$  decreasing and  $\lambda$  increasing. Furthermore, the influence of turbulence can be ignored when  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $w_0$  are small enough and  $\lambda$  is large enough.

**Keywords:** Rayleigh range, partially coherent cosh-Gaussian beam, atmospheric turbulence, free space

**PACS:** 42. 68. Bz, 42. 25. Dd, 42. 25. Kb

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60778048) and the Open Resevrcb Fund of Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation, Chinese Academy of Sciences (Grant No. JJ-10-08).

<sup>†</sup> E-mail: jixl100@163.com