

变系数非线性 Schrödinger 方程的 孤子解及其相互作用*

钱存 王亮亮 张解放†

(浙江师范大学非线性物理研究所, 金华 321004)

(2010年3月29日收到; 2010年9月14日收到修改稿)

在光孤子通信和 Bose-Einstein 凝聚体动力学研究中, 求解广义非线性 Schrödinger 方程是一个重要的研究方向. 稳定的孤子模式具有潜在的应用, 可为实验技术的实现提供依据. 本文引进一种相似变换, 将变系数非线性 Schrödinger 方程转化成非线性 Schrödinger 方程, 并利用已知解深入研究变系数非线性 Schrödinger 方程解的单孤子解、两孤子解和连续波背景下的孤子解. 同时通过选择不同的具体参数, 给出它们的图像分析和相应的讨论.

关键词: 非线性 Schrödinger 方程, 相似变换, 变系数, 孤子解

PACS: 42. 81. Dp, 05. 45. Yv, 42. 65. - k

1. 引言

20 世纪 80 年代以来, 非线性 Schrödinger 方程 (NLSE) 成为了非线性科学中一个重要的基本方程, 它出现在很多领域中, 如 Bose-Einstein 凝聚 (BEC)、非线性量子场论、等离子体物理、非线性光学、流体动力学等^[1]. 几十年来不同学科的研究者用不同方法对 NLSE 的求解及其动力学行为进行了系统而全面的研究. 在非线性光学中, 非线性 Schrödinger 方程可以很好地描述单模光纤中光孤子的传播行为, 而且可以传播无限长的距离而不会有信息失真和波形畸变, 具有很高的传输码率, 这在理论和实验上都取得十分成功的结论. 但自从 Bogatyrev 等^[2]在实验室实现了光纤中双曲型衰减的群速度色散, 并进一步在孤子通信中实现了可控光孤子和孤子脉冲串^[3], 对变系数 NLSE 的研究引起了人们的充分注意. 在实际光纤中由于损耗使光脉冲功率沿光纤指数衰减, 使非线性和色散效应之间的平衡遭到破坏, 影响了光孤子的传输, 因此人们通常采取使光纤参数 (色散和非线性) 沿纵向缓慢变化^[4-8]或利用绝热放大^[9,10]的方法来维持光孤子在实际通信系统中的传输. 这样光纤通信中孤子的传输遵循如下形式:

$$i\Psi_z + \beta(z)\Psi_{\tau\tau} + \gamma(z)|\Psi|^2\Psi + ig(z)\Psi = 0, \quad (1)$$

其中, $\Psi(z, \tau)$ 代表在光学介质中传播的电场复波包, 它是波包 (光脉冲) 的传播距离 z 和迟滞时间 τ 的函数; $\beta(z)$ 是色散系数, $\gamma(z)$ 为三次非线性系数, $g(z)$ 是增益或吸收系数, 它们都由系统本身确定, 这是个非均质系统.

研究变系数 NLSE (1) 主要采用数值求解或近似微扰求解^[5,9,11], 近年来对变系数非线性偏微分方程的求解也提出了多种有效的方法^[12-14]. 最近, 人们通过分离变量法^[15]、基于 Lax 对的 Darboux 变换法^[16]、推广的 Riccati 方程展开法^[17]对变系数 NLSE 进行了较为深入的探讨. 文献[18]采用自相似技术对方程(1)给出了一大类自相似解, 获得了一些具有啁啾情形的有价值结论. 文献[19]基于推广的立方非线性 Klein-Gordon 方程对一般形式的变系数 NLSE 进行研究, 讨论了无啁啾情形的孤子解, 发现了包括亮、暗孤子解和类孤子解在内的一些新的精确解. 最近 Belmonte-Beitia 等^[20]引进一种相似变换将变系数 NLSE 转化为定态的 NLSE, 从而得到变系数 NLSE 亮暗孤子解. 本文基于文献[20]的思想, 进一步将变系数 NLSE 转化为 NLSE, 不仅可以求出变系数 NLSE 的亮、暗孤子解, 而且可以深入讨论它们的相互作用行为.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10672147, 11072219) 和浙江师范大学创新团队计划资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jf_zhang@zjnu.cn

2. 一般理论

为了将变系数 NLSE 转换成 NLSE, 我们采用如下变换:

$$\Psi(z, \tau) = \rho(z) e^{i\varphi(z, \tau)} \Phi[Z(z), T(z, \tau)]. \quad (2)$$

这里 $\rho(z)$ 和 $\varphi(z, \tau)$ 是实函数, 而 $\Phi(Z, T)$ 是复函数, 满足标准 NLSE,

$$i\Phi_Z + \varepsilon\Phi_{\tau\tau} + \delta|\Phi|^2\Phi = 0, \quad (3)$$

其中 ε, δ 是实常数. 将方程(3)代入方程(1)中并考虑(2)式, 可得到

$$\delta = \frac{\rho^2 \gamma}{Z_z}, \quad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{\beta T_\tau^2}{Z_z}, \quad (5)$$

$$\rho\beta\varphi_{\tau\tau} + \rho g + \rho_z = 0, \quad (6)$$

$$T_z + 2\beta\varphi_\tau T_\tau = 0, \quad (7)$$

$$\beta\varphi_\tau^2 + \varphi_z = 0, \quad (8)$$

$$T_{\tau\tau} = 0. \quad (9)$$

由(9)式可得

$$T = k(z)\tau + \omega(z), \quad (10)$$

其中, 实函数 $k(z)$ 和 $\omega(z)$ 的具体形式之后可以确定. 由(4), (5), (10)式可以解出

$$\rho = \sqrt{\frac{\beta\delta}{\gamma\varepsilon}} k. \quad (11)$$

将(10)式分别代入(5)和(7)式中, 有

$$Z = \int \frac{\beta k^2}{\varepsilon} dz + Z_0, \quad (12)$$

$$\varphi = -\frac{k_z}{4\beta k} \tau^2 - \frac{\omega_z}{2\beta k} + \varphi_0. \quad (13)$$

将(13)式代入(8)式, 归并同类项并令变量 τ 的各幂次项系数为零, 可得到

$$\frac{\beta_z k_z}{4\beta} + \frac{k_z^2}{2k} - \frac{k_{zz}}{4} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\beta_z \omega_z}{2\beta} + \frac{\omega_z k_z}{k} - \frac{\omega_{zz}}{2} = 0, \quad (15)$$

$$\beta k \varphi_{0z} + \frac{\omega_z^2}{4k} = 0. \quad (16)$$

解方程(14)—(16)可得

$$k = -\frac{1}{a \int \beta dz + b}, \quad (17)$$

$$\omega = c_1 + c_2 \int \frac{\beta}{(a \int \beta dz + b)^2} dz, \quad (18)$$

$$\varphi_0 = c_3 - \frac{1}{4} c_2^2 \int \frac{\beta}{(a \int \beta dz + b)^2} dz, \quad (19)$$

其中 a, b, c_1, c_2, c_3 为任意实常数.

如果将(11)和(13)式代入(6)式, 可得到 $\beta(z), \gamma(z)$ 和 $g(z)$ 之间的限制关系, 这表明它们是不可随意选取的函数. 其限制关系为

$$\frac{\beta_z}{\beta} - \frac{\gamma_z}{\gamma} + 2g - \frac{a\beta}{a \int \beta dz + b} = 0 \quad (20)$$

或写成

$$\frac{\beta_z}{\beta} - \frac{\gamma_z}{\gamma} + 2g + \frac{k_z}{k} = 0. \quad (21)$$

进一步发现, 如果将上述限制关系(20)式中的任意常数 a 取为零, 那么可以直接得出文献[16]给出的变系数 NLSE 可积性条件 $\frac{\beta_z}{\beta} - \frac{\gamma_z}{\gamma} + 2g = 0$. 由此可见, 变系数 NLSE 可积性条件可以推广为表达式(20).

3. 几类严格解

对于 NLSE, $i\Phi_Z + \varepsilon\Phi_{\tau\tau} + \delta|\Phi|^2\Phi = 0$, 在文献[21—24]中, 都可找到它的解. 当 $\varepsilon\delta > 0$, 它有亮孤子解; 当 $\varepsilon\delta < 0$, 它有暗孤子解. 下面主要以亮孤子(取 $\varepsilon = 1, \delta = 2$ 情况下)为例展开的讨论.

3.1. 单孤子解

方程(1)有如下的单孤子解:

$$\Psi = \eta k \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}} \operatorname{sech}[\eta(T + 2\nu Z)] \times \exp[i\varphi + i(\eta^2 - \nu^2)Z - i\nu T], \quad (22)$$

其中 η, ν 为任意常数, β, γ 为原方程系数, 而 T, Z, φ 和 k 分别由(10), (12), (13)和(17)式表示.

在方程(1)中, 选取色散系数 $\beta = \exp(0.08z)$, 非线性系数 $\gamma = 2$, 假设系统无增益或吸收系数 $g = 0$, 此三者满足限制关系(20)式, 选择恰当的参数可以得自相似解^[25], 如图 1 所示. 它在传播过程中波的大致形状保持不变, 但波幅和波的宽度随着传播距离在不断变化.

再考虑一个周期性系统, 此时色散系数 $\beta = \sin(z) \exp(-0.2z)$, 非线性系数 $\gamma = 2\sin(z)$, 增益和吸收系数 $g = 0.1$, 此三者满足限制关系(20)式. 将它们都代入(22)式中, 可得到一个周期性的单孤

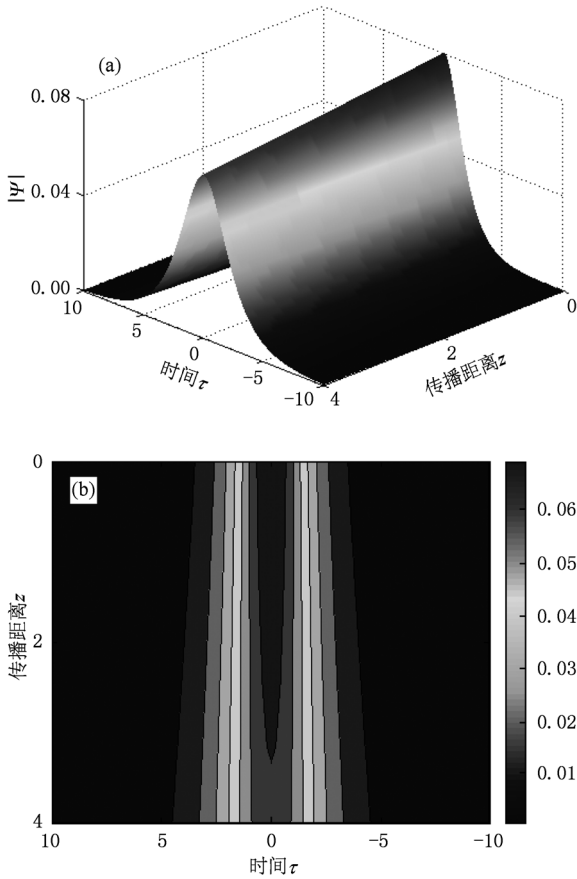


图1 方程(1)自相似解的演化和等值线分布 $\beta = \exp(0.08z)$, $\gamma = 2$, $g = 0$, $c_1 = c_3 = Z_0 = 0$, $\eta = 1$, $\nu = -0.5$, $c_2 = 1$ (a)演化,(b)等值线分布

子解,如图2所示. 尽管波包在传播过程中其色散和非线性系数都随传播距离而改变,然而波的大致形状保持不变,由于有吸收效应,波幅会逐渐减小.

同样,可以找到暗孤子解(取 $\varepsilon = -1$, $\delta = 2$ 的情况下)

$$\Psi = \eta k \sqrt{-\frac{2\beta}{\gamma} \tanh(\eta T)} \exp(i\varphi + 2i\eta^2 Z), \quad (23)$$

其中 η 为任意常数, β, γ 为原方程系数,而 T, Z, k 和 φ 分别由(10), (12), (13)和(17)式表示.

考虑一个周期性系统,此时色散系数 $\beta = \sin(z)$, 非线性系数 $\gamma = -2\sin(z)$, 无增益或吸收 $g = 0$, 此三者满足限制关系(20)式. 将它们都代入(23)式中,得到如图3所示的暗孤子解.

3.2. 两孤子解

方程(1)有如下的两孤子解:

$$\Psi = 4\eta k \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma} (8\eta^2 Z - i) \cosh(A) + 2i\eta T \sinh(A)} \times \exp(i\varphi + 4i\eta^2 Z - i\nu), \quad (24)$$

其中 $A = 2\eta(T - \mu)$, $B = 4\eta^2(T^2 + 16\eta^2 Z^2)$, η, ν, μ 为任意常数, β 和 γ 为原方程系数,而 T, Z, φ 和 k 分别由(10), (12), (13)和(17)式表示.

选取色散系数 $\beta = \sin(z)$, 非线性系数 $\gamma = 2\sin(z)$, 不考虑系统的增益或吸收 $g = 0$, 三者满足限制关系(20)式. 将它们代入(24)式,可得到相互作用两孤子解,如图4所示.

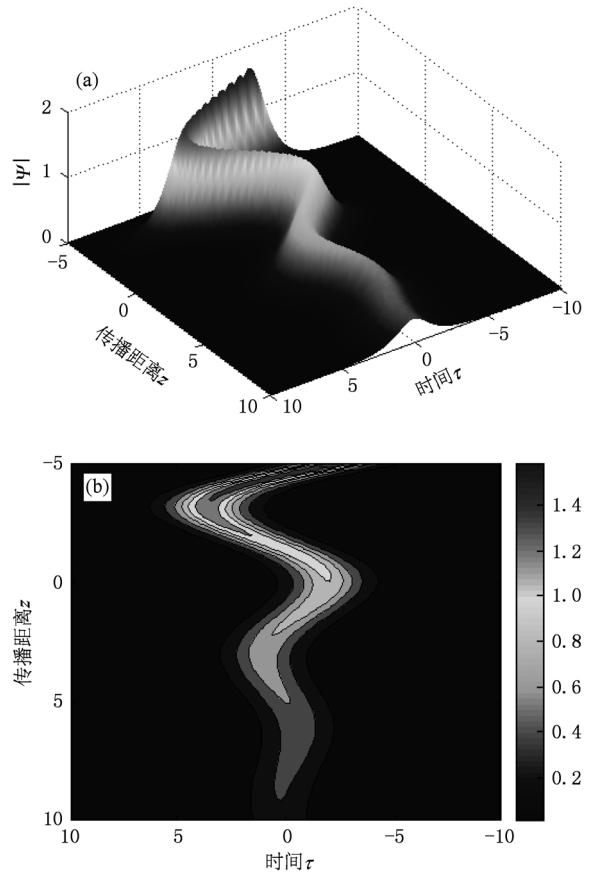


图2 方程(1)的周期分布系统解的演化和等值高线分布 $\beta = \sin(z) \exp(-0.2z)$, $\gamma = 2\sin(z)$, $g = 0.1$, $c_1 = c_3 = Z_0 = 0$, $\eta = 1$, $\nu = 0.5$, $c_2 = 1$ (a)演化,(b)等值线分布

选取色散系数 $\beta = 1$, 非线性系数 $\gamma = 8\exp(0.4z)$, 考虑系统的增益或吸收 $g = 0.2$, 三者满足限制关系(20)式. 将它们代入(24)式,可得到相互作用两孤子解,如图5所示.

3.3. 连续波背景下的孤子解

连续波背景下,方程(1)有如下的孤子解:

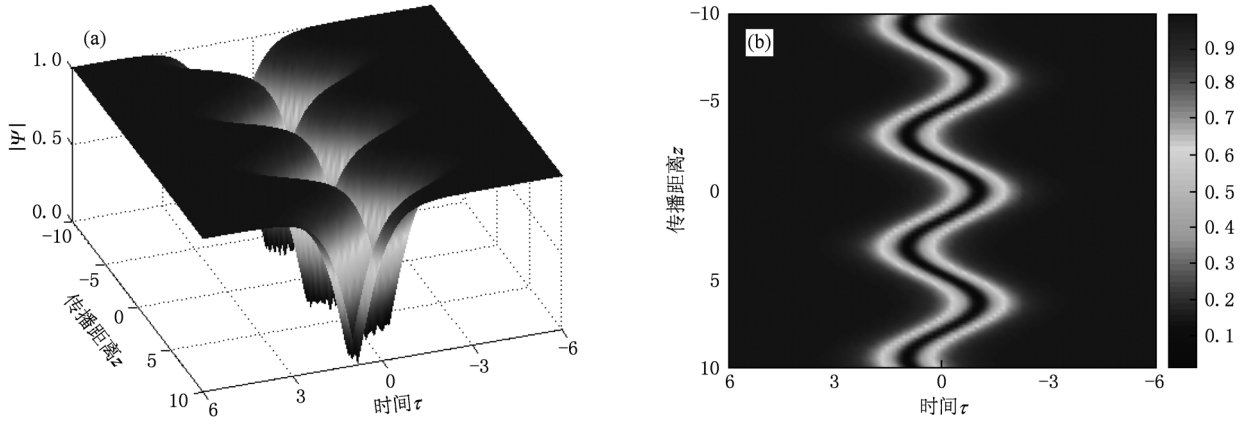


图3 方程(1)的暗孤子解的演化和等值线分布 $\beta = \sin(z), \gamma = -2\sin(z), g = 0, c_1 = c_3 = Z_0 = 0, \eta = c_2 = 1$ (a)演化, (b)等值线分布

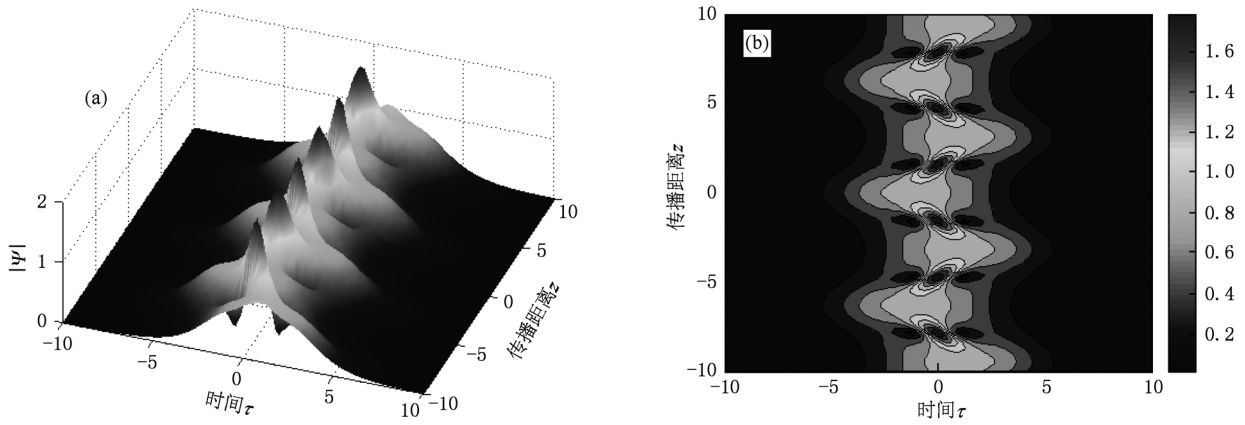


图4 当 $\beta = \sin(z), \gamma = 2\sin(z), g = 0, c_1 = c_3 = Z_0 = 0, \eta = \frac{1}{2}, c_2 = 1, \mu = 0$ 时, 方程(1)的两孤子解的演化和等值线分布 (a)演化, (b)等值线分布

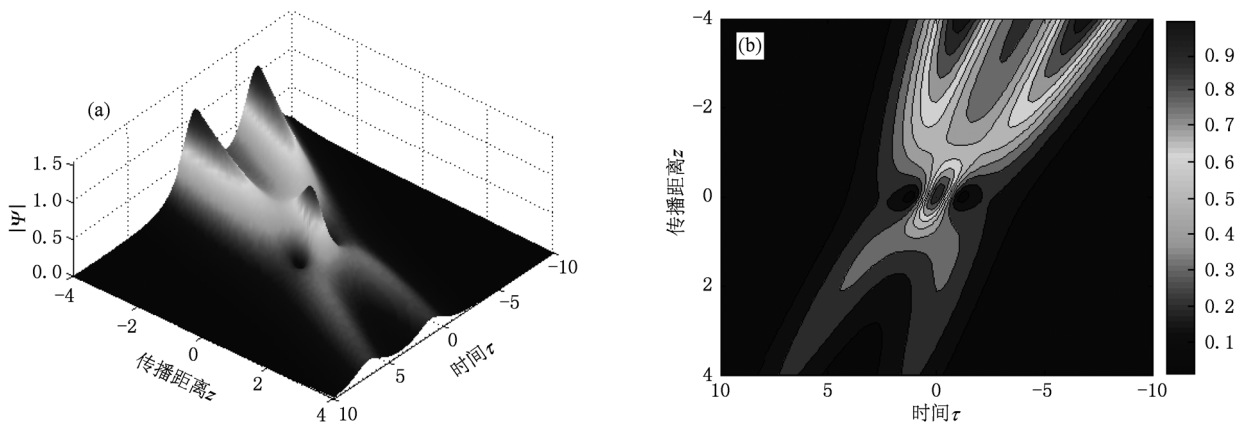


图5 当 $\beta = 1, \gamma = 8\exp(0.4z), g = 0.2, \mu = c_1 = c_3 = Z_0 = 0, \eta = \frac{1}{2}, c_2 = 1$ 时, 方程(1)的两孤子解的演化和等值线分布 (a)演化, (b)等值线分布

$$\Psi = k \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}} \left[\eta + \frac{\nu^2 \cos(\nu SZ) + i\nu S \sin(\nu SZ)}{\text{Scosh}(\nu T) + 2\eta \cos(\nu SZ)} \right] \times \exp(i\varphi + 2i\eta^2 Z), \quad (25)$$

其中 $S = \sqrt{4\eta^2 + \nu^2}$, η, ν 为任意常数, β 和 γ 为原方程系数, T, Z, φ 和 k 分别由 (10), (12), (13) 和

(17) 式表示, 而 η 是指连续波背景.

选取色散系数 $\beta = \exp(-0.2z)$, 非线性系数 $\gamma = 2$, 考虑系统的增益或吸收 $g = 0.1$, 三者满足限制关系 (20) 式. 将它们代入 (25) 式, 可得到方程 (1) 在连续波背景下的孤子解, 如图 6 所示.

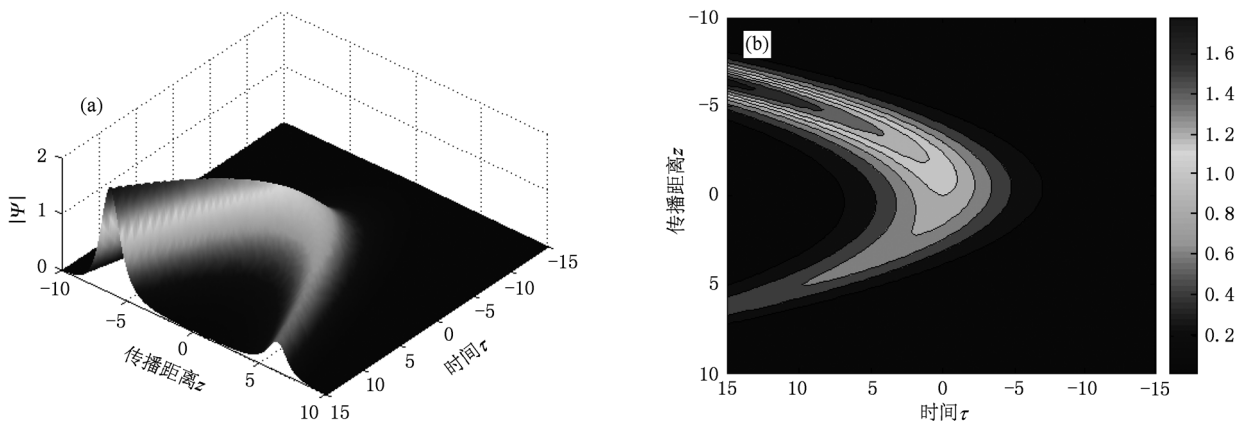


图 6 方程(1)在连续波背景下的孤子解演化和等值线分布 $\beta = \exp(-0.2z)$, $\gamma = 2$, $g = 0.1$, $\nu = 1$, $\eta = c_1 = c_3 = Z_0 = 0$, $c_2 = 1$ (a)演化, (b)等值线分布

4. 结 论

本文借助相似变换对变系数 NLSE (1) 进行研究, 发现了新的精确解, 包括单孤子解、双孤子解和连续波背景下的孤子解. 值得指出的是, 文献 [19]

相关结论都可从本文结果导出. 鉴于文献 [19] 只能给出单孤子解, 而本文通过一类相似变换可将变系数 NLSE 转化成 NLSE 形式, 进而能讨论它们的相互作用, 这为求变系数 NLSE 提供了一条有效的途径. 有关应用值得进一步讨论.

- [1] Thacker H B 1981 *Rev. Mod. Phys.* **53** 253
- [2] Bogatyrev V A, Bubnov M M, Dianov E M, Kurkov A S, Mamyshev P V, Prokhorov A M, Rumyantsev S D, Semenov V A, Semenov S L, Sysoliatin A A, Chernikov S V, Guryanov A N, Devyatykh G G, Miroschnichenko S I 1991 *J. Lightwave Technol.* **9** 561
- [3] Mamyshev P V, Chers V, Dianov M 1991 *IEEE J. Quantum Electron.* **7** 2347
- [4] Taijima K 1987 *Opt. Lett.* **12** 54
- [5] Bordon E E, Anderson W L 1989 *J. Lightwave Technol.* **7** 353
- [6] Wabnitz S 1996 *Opt. Lett.* **21** 638
- [7] Kuehl H H 1988 *J. Opt. Soc. Am. B* **5** 709
- [8] Smith N J, Doran N J 1996 *Opt. Lett.* **21** 570
- [9] Kivshar Y S, Konotop V V 1989 *Sov. J. Quantum Electron.* **19** 566
- [10] Quiroga-Teixeiro M L, Andrekson P A 1996 *J. Opt. Soc. Am. B* **13** 687
- [11] Gabitov I R, Turitsyn S K 1996 *Opt. Lett.* **21** 37
- [12] Zhang J F, Cheng F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放, 陈飞跃 2001 物理学报 **50** 1648]
- [13] Lou S Y, Ruan H Y 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 182 (in Chinese) [楼森岳, 阮航宇 1992 物理学报 **41** 182]
- [14] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强 2002 物理学报 **51** 1923]
- [15] Xu C Z, Zhang J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3652 (in Chinese) [徐昌智, 张解放 2004 物理学报 **53** 3652]
- [16] Hao R Y, Lu L, Li Z H 2004 *Opt. Commun.* **79** 236
- [17] Li B, Chen Y 2004 *Chaos Soliton Fract.* **21** 241
- [18] Kruglov V I, Peacock A C, Harvey J D 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 11392
- [19] Zong F D, Dai C Q, Yang Q, Zhang J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3805 [宗丰德, 戴朝卿, 杨琴, 张解放 2006 物理学报 **55** 3805]
- [20] Belmonte-Beitia J, Pérez-García V M, Vekslerchik V, Konotop V V 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 164102

- [21] Belmonte-Beitia J, Cuevas J 2009 *J. Phys. A* **42** 165201
[22] Yan J R 1996 *Chin. Sci. Bull.* **41** 17
[23] Bélanger N, Bélanger P A 1996 *Opt. Commun.* **124** 301

- [24] He J S, Ji M, Li Y S 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 8
[25] Sergey A P, Govind P A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 013901

Solitons of nonlinear Schrödinger equation with variable-coefficients and interaction *

Qian Cun Wang Liang-Liang Zhang Jie-Fang[†]

(*Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

(Received 29 March 2010; revised manuscript received 14 September 2010)

Abstract

Search for exact solutions to the generalized nonlinear Schrödinger equation is one of the essential directions in studies of the nonlinear dynamics in optical soliton and Bose-Einstein condensates. Stable soliton modes are of great significance for the experimental realization and potential application. In this paper, based on the introduction of a similarity transformation, the variable-coefficient nonlinear Schrödinger equation is transformed into the nonlinear Schrödinger equation, and then the single soliton solution, two-soliton solution and soliton solution in continuous-wave background for the variable coefficient nonlinear Schrödinger equation are obtained by using the known solutions. Meanwhile, their image analysis and relative discussion are given by selecting the different parameters in detail.

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, similarity transformation, variable-coefficients, soliton solutions

PACS: 42. 81. Dp, 05. 45. Yv, 42. 65. - k

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10672147, 11072219) and the Program of Innovative Research Team in Zhejiang Normal University, China.

[†] Corresponding author. E-mail: jf_zhang@zjnu.cn