

声悬浮液滴的表面毛细波及八阶扇谐振荡*

鄢振麟 解文军 沈昌乐 魏炳波[†]

(西北工业大学应用物理系, 西安 710072)

(2010年7月9日收到; 2010年8月1日收到修改稿)

采用声悬浮方法研究了自由液滴表面的毛细波形成机理, 并利用主动调制声场技术激发了液滴的八阶扇谐振荡. 实验结果表明, 当声场调制频率接近液滴本征频率的两倍时, 液滴将由轴对称受迫振荡向非轴对称扇谐振荡模态转变. 实验与理论分析证实, 参数共振是毛细波与扇谐振荡的形成原因. 扇谐振荡的本征频率随液滴赤道半径的增大而减小, 可通过修正的 Rayleigh 方程来描述.

关键词: 声悬浮, 液滴, 毛细波, 扇谐振荡

PACS: 43. 25. Uv, 92. 10. hd, 47. 55. D -

1. 引言

自由液滴的动力学研究在流体力学^[1,2]、材料科学^[3]乃至原子核物理^[4]等领域引起了研究者的广泛兴趣. 液滴的振荡规律研究最早可追溯至 1879 年, Rayleigh^[5]基于线性近似理论推导了无黏球形液滴的小振幅振荡的频率方程. Lamb^[6]进一步研究了悬浮于无黏流体中的低黏滞性液滴的振荡规律. 近年来, 研究者针对液滴的轴对称振荡从实验、理论和计算模拟等角度做了大量细致深入的工作^[7-11], 然而关于自由液滴的非轴对称振荡却鲜有报道^[12-14].

声悬浮是一种重要的无容器处理技术^[15,16]. 它对悬浮材料无电磁性质的要求, 因此非常适合研究自由液滴的动力学规律. 液滴在声悬浮过程中会发生变形, 当被极度压扁时液滴表面会出现毛细波纹^[17,18], 但其激发机理尚无定论. 发生高阶扇谐振荡的声悬浮液滴容易发生破碎和雾化等现象, 截止目前为止文献中未发现高于七阶扇谐振荡的相关报道. 本文采用平面声波反射端研究了极度压扁液滴表面的毛细波形成原因, 同时结合主动调制声场技术实现了悬浮水滴的八阶扇谐振荡并探索其激

发机理.

2. 实验方法

实验在压电陶瓷换能器激励的单轴式声悬浮装置上进行, 超声频率为 22 ± 1 kHz. 在 298 K 室温条件下, 超声波波长约为 15 mm, 可允许悬浮纵向尺寸为毫米量级的液滴. 为提高悬浮稳定性并防止液滴雾化, 声悬浮装置在单波节悬浮模式下工作. 调节发射端与反射端之间的距离至一定值时, 可使声场发生谐振. 在谐振状态下, 水滴可在声压波节处悬浮. 改变声场的谐振状态, 悬浮水滴在声辐射压力的作用下被不同程度地压扁.

为了驱动水滴发生非轴对称扇谐振荡, 超声换能器电压以 $V = V_0 [1 + \varepsilon \cos \omega_m t] \cos(\omega_{ac} t)$ 的形式调制, 其中 V_0 是电压幅值, ε 是调制幅度, ω_m 是电压调制角频率, ω_{ac} 是超声角频率. 实验过程中, 以 0.5 Hz 的频率增幅逐步提高调制频率直至水滴发生扇谐振荡. 为拍摄液滴的仰视图需要, 反射端用透明玻璃加工而成. 反射端正下方放置发光二极管作为照明光源, 液滴运动过程使用 Redlake HG 100K 高速电荷耦合器件 (CCD) 以 5000 fps 的帧速记录. 实验之前对声源发射端进行抛光处理以提高图像的

* 国家自然科学基金 (批准号: 50971105, 51071126) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: bbwei@nwpu.edu.cn

拍摄质量.

3. 结果与讨论

3.1. 悬浮液滴的毛细波

声悬浮液滴会在声辐射压力的作用下发生不同程度的变形. 当声场谐振较为剧烈时, 由于声辐射压力在液滴表面分布不均致使液滴形成中心部位薄, 边缘厚的烧饼形状^[19]. 强烈的声场不仅使悬浮液滴被极度压扁, 而且导致液滴表面产生由中心向边缘扩展的涟漪状波纹, 结果如图 1 所示. 图 1(a) 是悬浮水滴表面形成的毛细波, 其波长为 $98 \mu\text{m}$. 图 1(b) 是图 1(a) 白色矩形区域的放大, 可以更为清晰地看出毛细波形貌的细节, 其频率可由毛细波色散关系给出^[20],

$$f_c^2 = 2\pi\sigma/(\rho_L\lambda^3), \quad (1)$$

其中, f_c 为毛细波频率, λ 为毛细波波长, 水滴的表面张力 σ 和密度 ρ_L 的取值分别为 0.0729 N/m 和 $0.998 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 由该关系式计算得到的毛细波频率为 21.9 kHz , 恰好与超声频率一致. 为验证这一结果并非偶然性所致, 随机选取实验中 60 个不同赤道半径水滴所对应的毛细波波长数据, 结果如图 1(c) 所示. 图 1(c) 给出不同赤道半径的水滴毛细波波长, 发现波长数值分布非常集中, 介于 $85\text{--}112 \mu\text{m}$, 平均波长 $\bar{\lambda}$ 为 $96.1 \mu\text{m}$. 由图 1(c) 也可以看出, 毛细波波长并不依赖于液滴的赤道半径, 只与超声频率及液滴的物性参数有关. 若以毛细波的平均波长代入 (1) 式, 即可得到毛细波频率为 22.6 kHz , 仍与声场频率符合很好.

根据 Danilov 等^[21] 提出的参数不稳定模型可以揭示声悬浮液滴表面的毛细波形成机理. 假设在极度压扁的液滴表面上存在两种被声场激发的毛细波模式, 分别为对称和反对称模式. 为简化分析, 假定悬浮液滴是赤道半径为 R_e , 厚度为 H 的柱状薄饼形状. 考虑到在本文实验中液滴具有轴对称性并且 $kH/2 \approx 5$ (其中 k 为毛细波波数), 所以对称与反对称模式的毛细波频率和振幅均相同. 毛细波的法向位移扰动可以表示为

$$\zeta = B(t) \sinh(kz) J_0(kr), \quad (2)$$

其中, ζ 为毛细波的法向位移扰动, $B(t)$ 为扰动的振幅, z 为液滴中某一点的垂直坐标 ($z=0$ 的位置是液滴的赤道面), r 为液滴表面上的某一点的径向位

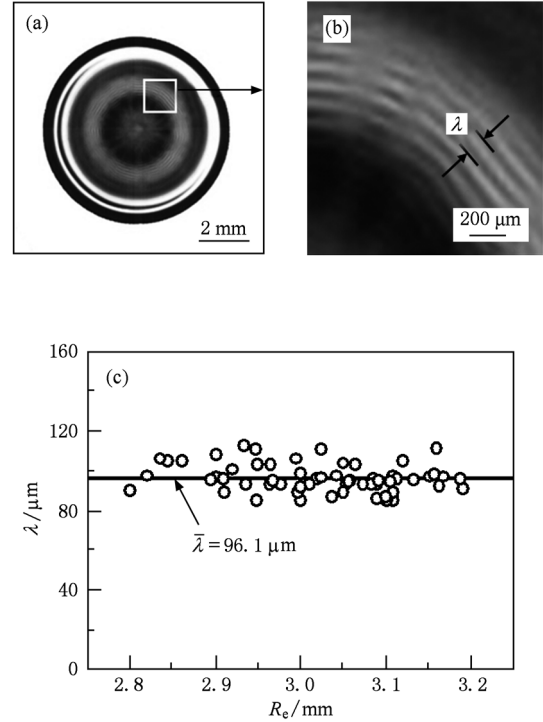


图 1 声场激发水滴形成的毛细波 (a) 整体形貌, (b) 局部细节, (c) 不同赤道半径水滴的毛细波波长

置, J_0 是零阶 Bessel 函数. 扰动振幅 $B(t)$ 满足以下方程:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \omega^2 \left(1 - \frac{2kp_0}{\rho_L H \omega^2} \cos(\omega_{ac} t) \right) B = 0, \quad (3)$$

其中, ω 和 ω_{ac} 分别为毛细波和超声的角频率, p_0 为声压幅值. 根据参数共振^[22] 理论, 当 ω_{ac} 趋近 ω 时, 扰动振幅 $B(t)$ 将随着时间的增长而以指数形式迅速增大, 发生 1 倍频的共振, 形成毛细波. 这正是本文实验中发现毛细波频率与超声频率一致的缘由所在. 激发毛细波存在一个声压阈值 p_c ,

$$p_c = 4\eta k H \omega. \quad (4)$$

计算时, 液滴的动力学黏度 η 的取值为 $1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, 毛细波波数 k 为 $6.53 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, 液滴纵向厚度 H 为 0.15 mm , 毛细波角频率 ω 为 $1.41 \times 10^5 \text{ rad/s}$. 由该方程计算可得临界声压为 5530 Pa , 而在本实验中声压级 (SPL) 约为 170 dB , 对应声压为 6325 Pa . 因此, 声场能量可以克服水滴黏性造成的阻尼, 激发毛细波不断增长.

3.2. 液滴的八阶扇谐振荡

在本文实验中, 采用平面反射端替代凹面反射端, 这样虽然在悬浮能力方面有所衰减, 却在水平

方向上减弱了声场对液滴的横向束缚,从而有利于更大程度地压扁液滴,更易于激发高阶扇谐振荡模态.对某一模态的振荡液滴而言,扁平程度越大,其振荡频率越低.随着振荡阶数的升高,液滴的变形程度对振荡频率的影响更加显著.

拍摄液滴运动的仰视图可以方便地确认液滴扇谐振荡的阶次.图2(a)–(i)给出了一个周期内水滴的八阶扇谐振荡的运动花样,相邻图片的时间间隔均为0.6 ms,对应的相位差为 $\pi/4$,振荡频率为208.3 Hz,相应的电压调制频率为422.5 Hz.这说明液滴振荡频率与电压调制频率的一半符合很好,该结果与Noblin等^[12]采用机械振动的方法研究座滴的非轴对称振荡的实验结果相似.需要指出的是,图2中的液滴未振荡时的赤道半径为2.92 mm,振幅为0.21 mm,液滴赤道半径与极半径的比值约为

6,液滴非常扁平.从图2(a),(b),(d),(e),(f),(h)和(i)中还可以看出,液滴表面均匀分布着16个亮度较高的区域,分别对应着液滴边缘轮廓的波峰和波谷.

$$r(\theta, \varphi, t) = r_0(\theta) \{ 1 + \xi_0 \sin^8 \theta \cos 8(\varphi + \varphi_0) \times \cos \omega t \}, \quad (5)$$

其中, θ 和 φ 分别是极角和方位角, $r_0(\theta)$ 是液滴的初始形状, ξ_0 是归一化振幅, ω 是液滴振荡角频率, φ_0 为初相位.将(5)式转换到柱坐标系下,则极半径 ρ 和纵坐标 z 可表示为

$$\rho = r(\theta, \varphi, t) \sin \theta, \quad (6)$$

$$z = r(\theta, \varphi, t) \cos \theta. \quad (7)$$

为便于分析,假设 $\varphi_0 = 0$.如果令 $\partial z / \partial \varphi = 0$,便可发现当 $\varphi = 0, \pi/8, 2\pi/8, \dots, 2\pi$ 时,液滴表面为水平

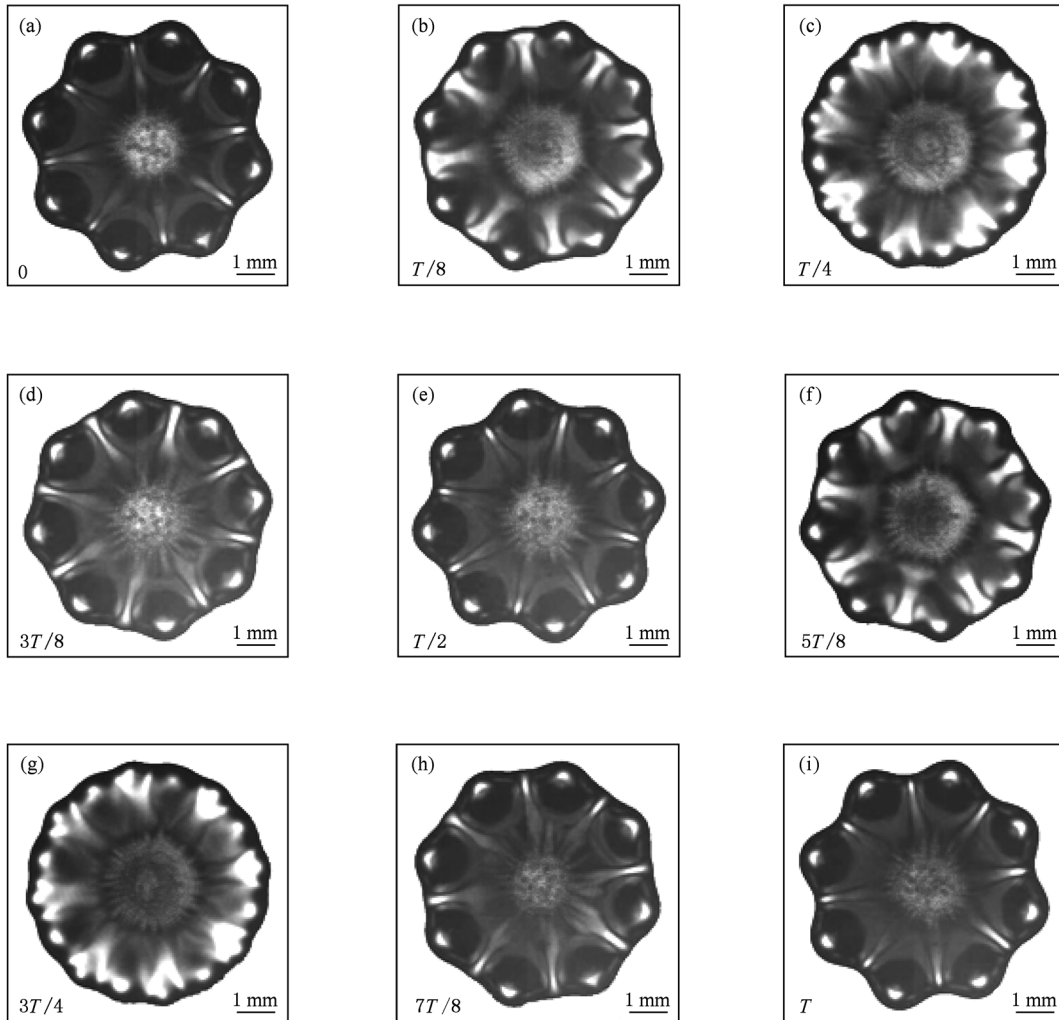


图2 一个周期内水滴的八阶扇谐振荡花样 (a) $t = 0$, (b) $t = T/8$, (c) $t = T/4$, (d) $t = 3T/8$, (e) $t = T/2$, (f) $t = 5T/8$, (g) $t = 3T/4$, (h) $t = 7T/8$, (i) $t = T$

平坦区域, 反光较强, 而这些角度正是出现亮度较高的波峰和波谷位置, 这证实了实验中观测到的结果.

将 $\theta = \pi/2$ 代入(5)式中, 便可得到八阶扇谐振荡的赤道面轮廓形状表达式

$$r(\varphi, t) = R_e \{1 + \xi \cos[8(\varphi + \varphi_0)]\}, \quad (8)$$

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t). \quad (9)$$

为了验证液滴的八阶扇谐振荡模态, 选取相位 ωt 分别为 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 及 2π 时的实验图片. 利用图像处理

方法提取液滴轮廓边缘, 结果分别如图 3(a)—(e) 所示. 选取的拟合参数如下: 赤道半径 $R_e = 2.92 \text{ mm}$, 归一化振幅 $\xi_0 = 0.072$, 初相位 $\varphi_0 = \pi/21$. 在图 3(a)—(e) 中, 实心圆点为从实验图片提取的数据, 实线为利用(8)式计算得到的预测值, 发现两者能够较好符合. 这验证了液滴发生八阶扇谐振荡的正确性. 关闭换能器电压调制后, 液滴振荡频率并未发生改变, 这说明液滴是以本征频率发生振荡. 声场的能量与液滴振荡过程中的黏性耗散相平衡.

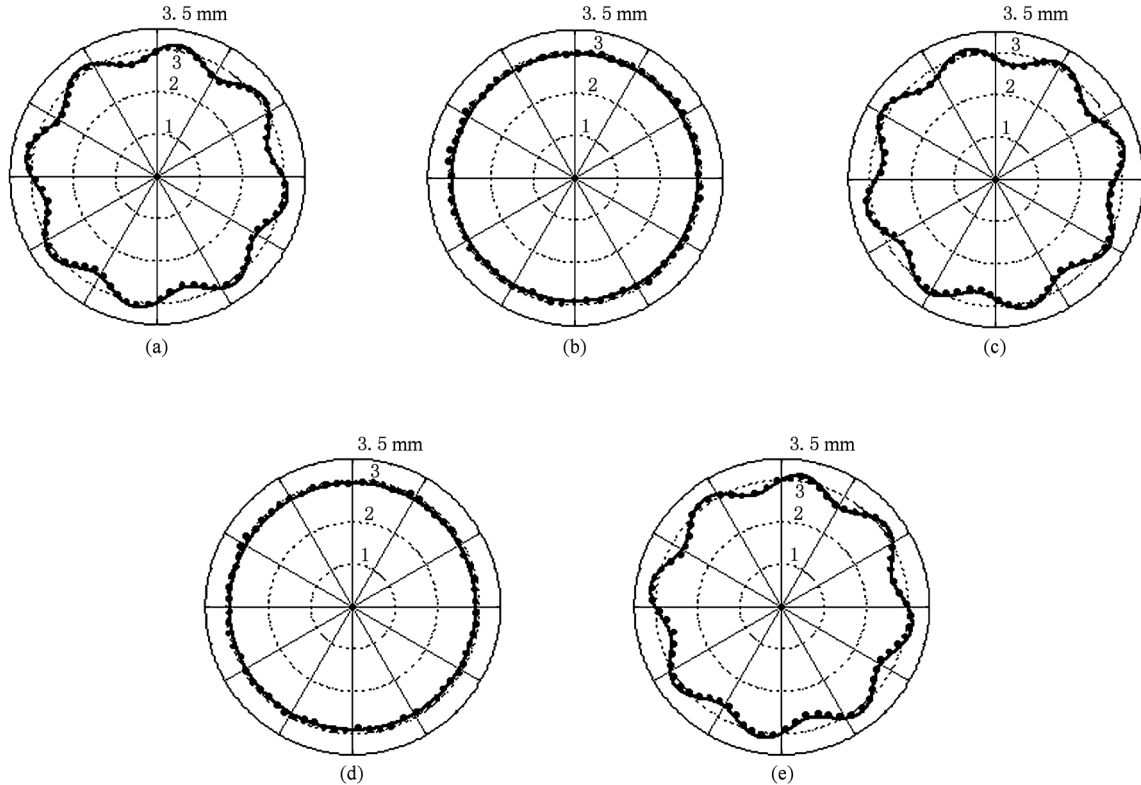


图3 液滴赤道面轮廓的演化 (a) $\omega t = 0$, (b) $\omega t = \pi/2$, (c) $\omega t = \pi$, (d) $\omega t = 3\pi/2$, (e) $\omega t = 2\pi$

在本实验中, 高速 CCD 以 5000 fps 的帧速对液滴运动过程进行拍摄, 这为获取液滴特殊点的速度提供了可能. 利用数字图像处理技术提取相邻图片中液滴边缘点的径向坐标, 便可以得到边缘点的瞬时径向速度. 将(8)式对时间 t 求导后, 可得到任一时刻的液滴边缘点的理论速度分布. 图 4(a) 中给出了 $t = 1.2 \text{ ms}$ 时液滴边缘点的径向速度 V 随方位角 φ 的变化关系. 在图 4(a) 中, 实心圆点为实验值, 实线为理论计算值, 可以看出两者符合较好. 在液滴振荡过程中, 当液滴恢复至平衡状态时, 液滴瓣部顶点处的速度将达到最大, 为 270 mm/s .

当液滴未发生非轴对称振荡时, 液滴的赤道面轮廓经历着均匀的扩张与收缩. 通过对液滴边缘数

据分析发现, 液滴的赤道半径 R_e 也呈现周期性的起伏. 这是由于调制换能器电压将致使声辐射压力以相同的频率被调制, 这将驱动液滴的赤道半径也随声辐射压力同步变化. 假设液滴赤道半径 R_e 及其变分形式可用以下两式表达:

$$R_e = R_{e0} [1 + A_0 \cos(\omega_m t)], \quad (10)$$

$$\delta R_e / R_{e0} = A_0 \cos(\omega_m t). \quad (11)$$

计算时, 液滴未振荡时的赤道半径 R_{e0} 取为 2.92 mm , 赤道半径扰动的归一化振幅 A_0 取为 0.017 , 声场调制角频率 ω_m 取为 2655 rad/s . 图 4(b) 给出了液滴在 3 个周期内 ξ 和 $\delta R_e / R_{e0}$ 随时间 t 的变化关系. 在图 4(b) 中, 实心圆点和空心圆圈是由液滴图片边缘提取的实验值, 实线和虚线是由方程(9)和(11)计

算所得的预测值,可以看出理论预测值与实验数据符合很好.需要说明的是,图 4(b)中字母 a—i 所指示的数据相应地取自于图 2(a)—(i).从图 4(b)可以看出, ξ 的振荡频率等于 $\delta R_e/R_{e0}$ 的变化频率的两倍.这也证实了液滴的赤道半径受到声辐射压力的驱动而发生了小幅振荡.

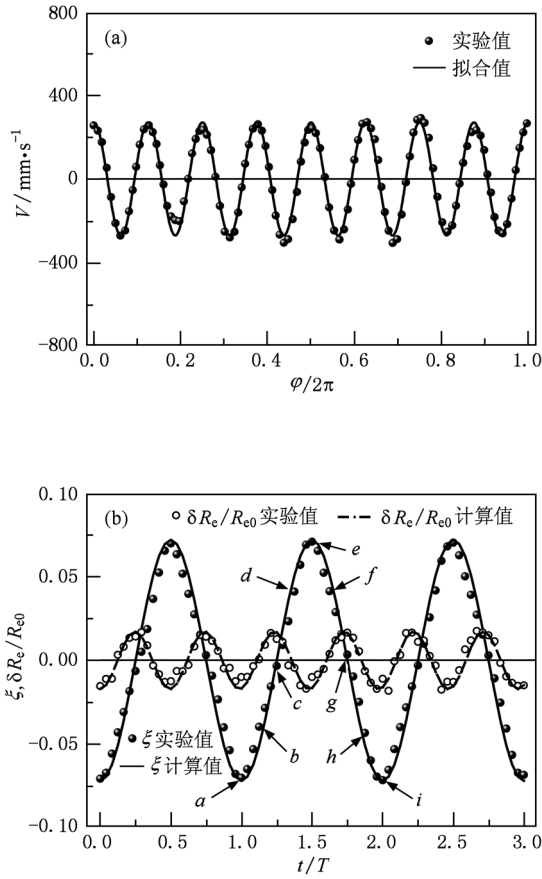


图 4 振荡液滴的平衡状态速度分布及其演化过程 (a)速度 V 随方位角 φ 的变化, (b) ξ 和 $\delta R_e/R_{e0}$ 随时间的变化

3.3. 八阶扇谐振荡的频率

液滴的变形将导致本征频率发生频移.理论推导变形液滴的本征频率表达式异常困难.为了揭示扇谐振荡的本征频率与液滴几何参数之间的依赖关系,实验测定了不同水滴赤道半径与振荡频率的关系曲线,结果如图 5 所示.从图 5 可以看出,振荡频率随赤道半径的增大而减小.本文实验中悬浮液滴均发生严重的变形,其振荡频率不能用 Rayleigh 方程^[5]描述.采用赤道半径 R_e 代替 Rayleigh 方程中的等体积球半径 R ,并增加特定的修正系数 α ,可得修正的 Rayleigh 方程

$$f_l = \frac{\alpha}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_L R_e^3} l(l-1)(l+2)}, \quad (12)$$

其中 f_l 为 l 阶振荡频率,液滴的表面张力 σ 和密度 ρ_L 的取值分别为 0.0729 N/m 和 $0.998 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,液滴振荡阶数 l 取值为 8.采用 (12) 式对液滴的振荡频率进行最小二乘法拟合,所得结果如图 5 中实线所示,其中 α 为 1.05.图 5 给出了八阶扇谐振荡频率随液滴赤道半径的变化关系.在图 5 中实心圆点为实验值,实线为修正的 Rayleigh 方程计算的预测值,两者能够很好地符合.

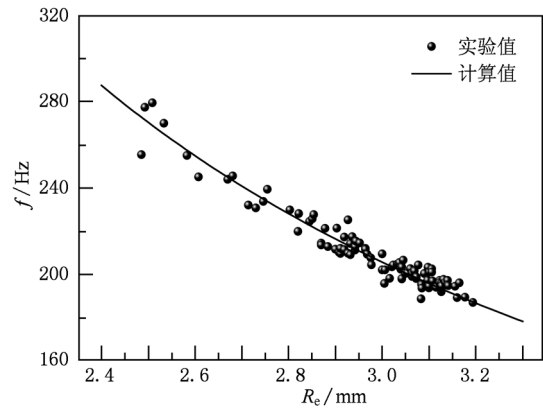


图 5 液滴振荡频率随赤道半径的变化

3.4. 参数激发液滴的扇谐振荡

声悬浮液滴的静态平衡形状可由下列 Young-Laplace 方程确定:

$$P_{\text{rad}} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{n} + \rho_L g \Delta z, \quad (13)$$

其中, P_{rad} 为液滴表面的声辐射压力, σ 和 ρ_L 分别为液滴的表面张力和密度, \mathbf{n} 为液滴表面的法向向量, g 为重力加速度, Δz 为液滴内某一点与重力势能参考点的高度差.由于调制超声换能器电压而导致的过剩声辐射压力 $\Delta P_{\text{rad}} \propto \eta \cos(\omega_m t)$, 说明液滴的过剩声辐射压力 ΔP_{rad} 是以 ω_m 的角频率被调制,这将引起液滴的赤道半径发生周期性起伏,由方程 (9) 可推知 ξ 满足

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0, \quad (14)$$

$$\omega^2 = 560\sigma / (\rho_L R_e^3). \quad (15)$$

将方程 (10) 和 (12) 式代入 (14) 式中,省略二次高阶项并在线性近似下即可得到

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 (1 + 3A_0 \cos \omega_m t) \xi = 0. \quad (16)$$

这里, ω_0 为液滴赤道半径为 R_{e0} 时的本征频率.由参数共振理论^[22]可知,当声场调制频率 ω_m 趋近 $2\omega_0$

时, ξ 将随时间的增长而呈指数增大, 致使液滴发生参数共振, 形成八阶扇谐振荡.

4. 结 论

1) 调节声场的谐振状态, 可使悬浮水滴发生不同程度的变形. 当水滴被极度压扁时, 其表面形成涟漪状毛细波, 并且毛细波的频率与超声频率一致.

2) 改变声悬浮反射端的形状并采用主动调制声场技术, 成功实现了水滴的八阶扇谐振荡. 实验

发现, 超声换能器电压的调制频率恰好等于悬浮液滴振荡频率的两倍.

3) 参数共振是液滴产生毛细波和发生八阶扇谐振荡的共同原因. 液滴的八阶扇谐振荡频率随赤道半径的增大而减小. 采用本文修正的 Rayleigh 方程对液滴的扇谐振荡进行预测, 发现计算结果与实验结果符合相当好.

在实验和分析过程中得到西北工业大学物理系耿德路和胡亮的有益帮助, 谨致谢意.

-
- [1] Yarin A L, Weiss D A, Brenn G, Rensink D 2002 *Int. J. Multiphase Flow* **28** 887
- [2] Sun Z H, Han R J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3185
- [3] Fujii H, Matsumoto T, Nogi K 2000 *Acta Mater.* **48** 2933
- [4] Bastrukov S, Chang H K, Misicu S, Molodtsova I, Podgainy D 2007 *Int. J. Mod. Phys. A* **22** 3261
- [5] Rayleigh L 1879 *Proc. Roy. Soc. London* **29** 71
- [6] Lamb H 1932 *Hydrodynamics* (Cambridge: Cambridge University Press) p606
- [7] Courty S, Lagubeau G, Tixier T 2006 *Phys. Rev. E* **73** 045301
- [8] Lai M F, Lee C P, Liao C N, Wei Z H 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 154102
- [9] Lopez H, Sigalotti L D G 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051201
- [10] Chang J Z, Liu M B, Liu H T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3954 (in Chinese) [常建忠、刘谋斌、刘汉涛 2008 物理学报 **57** 3954]
- [11] Wang H, Zhang Z Y, Yang Y M, Hu Y, Zhang H S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3847
- [12] Noblin X, Buguin A, Brochard-Wyart F 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 166102
- [13] Shen C L, Xie W J, Wei B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 046305
- [14] Shen C L, Xie W J, Wei B 2010 *Phys. Lett. A* **374** 2301
- [15] Xie W J, Cao C D, Wei B B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 250 (in Chinese) [解文军、曹崇德、魏炳波 1999 物理学报 **48** 250]
- [16] Zhang L, Li E P, Feng W, Hong Z Y, Xie W J, Ma Y H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2038 (in Chinese) [张琳、李恩普、冯伟、洪振宇、解文军、马仰华 2005 物理学报 **54** 2038]
- [17] Lee C P, Anilkumar A V, Wang T G 1991 *Phys. Fluids A* **3** 2497
- [18] Peng H W, Li R Q, Chen S Z, Li C B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 637
- [19] Xie W J, Wei B 2004 *Phys. Rev. E* **70** 046611
- [20] Landau L D, Lifshitz E M 1987 *Fluid Mechanics* (New York: Pergamon Press) p244
- [21] Danilov S D, Mironov M A 1992 *J. Acoust. Soc. Am.* **92** 2747
- [22] Landau L D, Lifshitz E M 1987 *Mechanics* (New York: Pergamon Press) p80

Surface capillary wave and the eighth mode sectorial oscillation of acoustically levitated drop*

Yan Zhen-Lin Xie Wen-Jun Shen Chang-Le Wei Bing-Bo[†]

(Department of Applied Physics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 9 July 2010; revised manuscript received 1 August 2010)

Abstract

The suspension of liquid drops provides a preferable boundary condition for investigating various free surface phenomena. Here we report the observation of concentric capillary wave formed on the surface of drastically flattened water drops levitated in ultrasound. The measured wavelength of capillary wave accords well with that from the classic dispersion relation equation. The eighth mode sectorial oscillation of acoustically levitated drop is excited by the active modulation of sound pressure. It is found that these phenomena are due to parametric excitation. The capillary wave is induced when the parametric instability arises and ultrasound pressure exceeds a threshold pressure. The sectorial oscillations take place when the equatorial radius varies at twice the natural sectorial frequency of the levitated drop. The frequency of the eighth mode sectorial oscillation decreases with the increase of equatorial radius and can be well described by modifying the Rayleigh equation. Further analysis reveals the parametric excitation mechanism for this kind of oscillations.

Keywords: acoustic levitation, drop, capillary wave, sectorial oscillation

PACS: 43. 25. Uv, 92. 10. hd, 47. 55. D –

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50971105, 51071126).

[†] Corresponding author. E-mail: bbwei@nwpu.edu.cn