Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性与守恒量

刘晓巍 李元成†

(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,青岛 266555)

(2010 年 10 月 8 日收到;2010 年 10 月 16 日收到修改稿)

研究 Rosenberg 问题的对称性与守恒量. 给出 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性的定义和判据,以及由 Noether-Lie 对称性导出 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量.

关键词: 非完整系统, Noether-Lie 对称性, 守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.-j, 45.20.Jj

1. 引 言

力学系统对称性与守恒量理论的研究是现代数学、力学、物理学等领域的重要课题. 利用对称性寻求力学系统的守恒量是分析力学的一个近代发展方向. 近代寻求守恒量的对称性方法主要有 Noether 对称性[1—3], Lie 对称性[4—8]和 Mei 对称性[9—13]. 相应地主要的守恒量有 Noether 守恒量, Hojman 守恒量[14]和 Mei 守恒量[15]. 通过几十年的研究,对称性与守恒量之间的研究在分析力学领域得到快速发展,已取得一系列的成果. 梅凤翔等研究了各种力学系统的联合对称性[16,17],拓展了对称性的研究领域. 关于 Rosenberg 问题及对称性与守恒量理论的研究具有重要的理论意义和实际价值. 1966 年 Rosenberg 在文献[18]中,为说明嵌入约束后的 Lagrange 方程(即 Lindelöf 方程)不能应用于非完整系统,给出了一个非完整力学系统的例子,可称之为 Rosenberg 问题. 目前,对 Rosenberg 问题对称性与守恒量理论的研究还很少. 文献[19]研究了 Rosenberg 问题的 Noether 对称性,本文在文献[19]的基础上,研究 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性,给出 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性的定义和判据,得到 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性导出 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量.

2. Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性

Rosenberg 问题的 Lagrange 函数和非完整约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot q_1^2+\dot q_2^2+\dot q_3^2),\tag{1}$$

$$f=\dot q_3-q_2\dot q_1=0.\tag{2}$$

系统的运动满足方程

$$\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot q_s}\quad(s=1,\cdots,n),\tag{3}$$

其中 m 为质点的质量,而非势广义力为零. 在运动微分方程积分之前,可求出约束乘子 $\lambda=\lambda(t,\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q})$ 的函数,记作

$$\Lambda_s=\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot q_s}=\Lambda_s(t,\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q}),\tag{4}$$

它为非完整约束反力.

由文献[19]可知

$$\lambda=\frac{m\dot q_1\dot q_2}{1+q_2^2},\ \ddot q_1=-\frac{q_2\dot q_1\dot q_2}{1+q_2^2}=\alpha_1,$$

$$\ddot q_2=0=\alpha_2,\ \ddot q_3=-\frac{\dot q_1\dot q_2}{1+q_2^2}=\alpha_3.\tag{5}$$

取无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q}),$$

$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q}).\tag{6}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0,ξ_s 为无限小生成元.

对 Rosenberg 问题,如果存在规范函数 $G_{\mathrm N}=G_{\mathrm N}(t,\boldsymbol q,\dot{\boldsymbol q})$, Noether 等式为

$$L\dot\xi_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot q_s\xi_0)+\dot G_{\mathrm N}=0,\tag{7}$$

Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}[E_s(L)]=X^{(1)}(\Lambda_s),\tag{8}$$

† 通讯联系人. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s},$$

$$X^{(2)}=X^{(1)}+[\ddot{\xi}_s-2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}.$$

定义 如果 Rosenberg 问题的对称性既是 Noether 对称性又是 Lie 对称性,这样的对称性称为 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性.

判据 对于 Rosenberg 问题,如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足如下等式:

$$\{L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_N\}^2 + \{X^{(2)}[E_s(L)]-X^{(1)}(\Lambda_s)\}^2=0, \tag{9}$$

则相应对称性为 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性.

3. 系统的 Noether-Lie 对称性导致的守恒量

Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性在一定的条件下可导出 Noether 守恒量,也可导出 Hojman 守恒量.

对于 Rosenberg 问题,由(9)式可找到生成元和规范函数

$$\xi_0=0,\ \xi_1=0,\ \xi_2=1,$$
$$\xi_3=0,\ G_N=0. \tag{10}$$

命题 1 对于 Rosenberg 问题,Noether-Lie 对称性可导致 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}}=\mathrm{const.} \tag{11}$$

由(10),(11)式可得 Noether-Lie 对称性对应的 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}}=m\dot{q}_2=\mathrm{const.} \tag{12}$$

命题 2 对于 Rosenberg 问题,在无限小变换下,如果存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,满足

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{13}$$

则 Noether-Lie 对称性可导致如下广义 Hojman 守恒量:

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\mu\xi_0)}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\mu\xi_s)}{\partial q_s} +\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\Big[\mu\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\Big)\Big] -\dot{\xi}_0=\mathrm{const.} \tag{14}$$

方程由(13)式可得出

$$\mu=(1+q_2^2)^{1/2}. \tag{15}$$

由(14),(15)式可得 Noether-Lie 对称性对应的广义 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=-\frac{q_2}{1+q_2^2}=\mathrm{const.} \tag{16}$$

4. 结 论

研究力学系统的联合对称性的目的之一是寻找更多的守恒量. 本文研究了 Rosenberg 问题的 Noether-Lie 对称性,给出了定义和判据,由 Noether-Lie 对称性,在一定条件下可以找到 Noether 守恒量和 Hojman 守恒量. 本文的结果有普遍的意义,有可能推广到其他类型的约束系统.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* KI II 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **12** 973

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[5] Li Z P 1993 *Classical and quantal dynamics of constrained systems and Their symmetrical properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京:北京工业大学出社)]

[6] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京:科学出版社)]

[7] Bahar L Y, Kwatny H G 1987 *Int. J. Non-Linear Mech.* **22** 125

[8] Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **32** 466 (in Chinese) [梅凤翔 2000 力学学报 **32** 466]

[9] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese) [梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[10] Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1832 (in Chinese) [张 毅 2003 物理学报 **52** 1832]

[11] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[12] Lou Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2046 (in Chinese) [楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[13] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2413 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413]

[14] Hojman S A 1992 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **25** L291

[15] Xu X J, Mei F X, Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999
[16] Mei F X 2005 *Transactions of Beijing Institute of Technology* **25** 283 (in Chinese) [梅凤翔 2005 北京理工大学学报 **25** 283]
[17] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成、夏丽莉、王小明、刘晓巍 2010 物理学报 **59** 3639]
[18] Rosenberg R M 1977 *Analytical Dynamics of Discrete Systems* (New York: Plenum Press)
[19] Ge W H, Zhang Y, Xue Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4434 (in Chinese) [葛伟宽、张 毅、薛 纭 2010 物理学报 **59** 4434]
[20] Novoselov V S 1966 *Variational Priciples in Mechanics* (Leningrad: LGV Press) (in Russian)
[21] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整力学基础 (北京:北京工业学院出版社)]

Noether-Lie symmetry and conserved quantities of the Rosenberg problem

Liu Xiao-Wei　Li Yuan-Cheng†
(*College of Physics Science and Technology, China University of Petroleum (East China) Qingdao* 266555, *China*)
(Received 8 October 2010; revised manuscript received 16 October 2010)

Abstract

The Noether-Lie symmetry and conserved quantities of the Rosenberg problem are studied. From the study of the Rosenberg problem, the Noether symmetry and the Lie symmetry for the equation are obtained, thereby the conserved quantities are deduced. Then the definition and the criterion for Noether-Lie symmetry of the Rosenberg problem are derived. Finally, the Noether conserved quantity and the Hojman conserved quantity are deduced from the Noether-Lie symmetry.

Keywords: nonholonomic systems, Noether-Lie symmetry, conserved quantity
PACS: 02.20.Sv, 11.30.-j, 45.20.Jj

† Corresponding author. E-mail: liyuanch@upc.edu.cn