

时滞位移反馈对 Helmholtz 振子系统的分形侵蚀安全域的控制*

尚慧琳[†]

(上海应用技术学院机械工程学院, 上海 200235)

(2011年2月20日收到; 2011年3月16日收到修改稿)

对一个 Helmholtz 振子系统引入线性时滞位移反馈, 研究时滞位移反馈对系统的安全盆侵蚀的控制作用. 将 Melnikov 函数法推广到时滞系统, 从而给出时滞受控系统的安全盆的边界分形条件, 在此基础上得出了安全盆分形的激励振幅阈值. 再以时滞量为变参数, 运用四阶 Rung-Kutta 方法和点映射方法从定量上研究了时滞对受控系统安全盆的影响规律. 结果表明在弱反馈下, 时滞量的增大能够提高安全盆边界分形的阈值, 进而有效地抑制安全盆的分形侵蚀. 说明时滞位移反馈是控制系统的安全盆侵蚀的良好方法.

关键词: 安全盆, 分形侵蚀, 时滞, 反馈

PACS: 05.45. - a, 05.45. Gg, 05.45. Df, 02.30. Ks

1. 引言

系统振荡的有界性问题一直受到非线性动力学研究领域的关注, 因为质点的运动振幅超过一定限度, 往往会导致工程结构的破坏. 也因此引发了对安全盆的研究^[1]. 其中安全盆常被定义为系统有界解吸引域的集合. 而安全盆侵蚀 (erosion of safe basins), 又称安全池破损^[2], 常常被用来刻画和解释工程结构的振动对初始条件的敏感性. 对于一个系统, 如果其安全盆具有分形边界^[3], 系统的长期行为对初始条件将非常敏感: 初始条件稍有改变, 从原无侵蚀的安全盆的内部出发的轨线就可能逃逸出此安全盆, 导致相应初始条件引起的系统的运动无界而造成系统崩溃, 这种现象就被称为安全盆的侵蚀. 从工程应用的观点出发, 应该对安全盆侵蚀现象及其控制展开研究. 周期激励下的非线性系统的安全盆侵蚀问题是最早被研究的. 如 Thompson 等考虑了单势阱软弹簧 Duffing 振子^[1], Soliman 考虑了周期激励下两自由度船舶运动方程^[3], Senjanovic 等^[4]采用理想的波浪扰动谱, 研究了规则激励下单势阱系统安全域的问题, Xu 等^[5]通

过数值方法研究了具有三次非线性单阱势能振子 Duffing-Mathieu 系统的安全域污染和控制, 均发现安全域边界的分形极其危险, 安全域的边界分形常常伴随着奇怪吸引子的出现, 而某些系统参数如参振激励振幅或阻尼系数的改变则会引起或抑制安全域的分形侵蚀. 在实际物理环境中, 往往不能忽略来自外界的随机激励的影响作用, 因此随机激励下非线性系统的安全域侵蚀问题则受到更广泛地研究^[6-17], 如对电力系统的电压崩溃^[13,14]和船舶倾覆问题^[15-17]的研究. Gan^[6]讨论了高斯白噪声对具有平方非线性的 Helmholtz 振子的安全域侵蚀的影响, 数值模拟了不同样本激励下系统的响应, 并利用 Melnikov 函数法获得了混沌运动的必要条件, 发现受高斯白噪声可加剧系统安全域的侵蚀. 龚璞林等^[12]讨论了弱参数周期扰动对 Helmholtz 振子安全域的影响, 发现通过调整外激励频率可以有效降低安全域的侵蚀, 并利用 Melnikov 方法进行了证实. 通过对系统外加高斯白噪声, 验证了该控制方法对安全域控制的良好鲁棒性.

在应用中常常可以通过调整系统参数如增大阻尼^[2-5]、改变激励^[6-12]等被动控制方法来抑制安全盆的侵蚀. 但在被动式控制的应用中, 由于系统

* 国家自然科学基金青年基金 (批准号: 10902071), 上海高校选拔培养优秀青年教师科研专项基金 (批准号: YYY08004), 上海市教育委员会重点学科建设项目 (批准号: J51501) 和上海应用技术学院科学技术发展基金 (批准号: KJ2011-06) 资助的课题.

[†] E-mail: suliner60@hotmail.com

参数不易灵活调节,当外部条件有明显变化时则有可能无法对安全盆侵蚀进行有效控制. Lewis 等^[18]研究时滞对系统动力学行为的影响时,通过数值模拟发现时间滞后能够引起系统安全盆的变化,于是提出了利用时滞反馈控制安全盆侵蚀这种新的控制策略. 此后张强等^[13]在分析了准单机无穷大电力系统的安全盆侵蚀的现象时,也提出了利用时滞速度反馈对安全盆进行控制的方法,通过数值模拟给出一定负荷扰动下安全盆及其受侵蚀情况,发现该方法能够提高系统安全盆边界分形的系统参数阈值. 而 Nbandjo 等^[19]在单势阱 Duffing 系统中也运用了线性时滞状态反馈对系统的安全盆侵蚀和混沌运动实施控制,利用能量法和 Melnikov 函数法研究了系统安全盆的分形条件,与无控制状态相比,发现时滞状态反馈对控制系统的安全盆侵蚀很有效. 笔者^[20]对一类参振激励系统中安全盆侵蚀问题的研究也表明,在一定的反馈增益和时滞量下,时滞位移反馈,速度反馈和状态反馈这三种反馈控制均能够对安全盆的侵蚀起到良好的控制作用. 对于利用时滞反馈对安全盆侵蚀实施控制这个新的控制方法的研究和应用,就目前的研究现状来看,不管是在定性分析还是在数值仿真和实验验证等方面均进展不大. 这是因为一方面出现安全盆侵蚀问题的系统往往表现较强的非线性,而对一个时滞反馈控制的时滞强非线性系统,不管是分析其周期解、混沌运动和安全盆范围和分形侵蚀条件都并不简单;另一方面由于时滞系统中系统的初始条件空间是无限维的,而多数研究由于没有给出时滞系统零时刻以前的初始状态,因此数值模拟所描述的“安全盆”只是时滞系统安全盆在零时刻的投影截面.

本文以一类典型的规则激励下的非线性系统为例,即 Helmholtz 振子系统

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon\mu\dot{x}(t) + x(t) - x^2(t) = \varepsilon f \cos \Omega t, \quad (1)$$

研究时滞位移反馈控制对确定系统的安全盆侵蚀的控制作用. 模型最初是由 Helmholtz 提出来解释拉膜的振动问题,在物理与实际工程中有着广泛应用^[21],并且在突变理论中也有着重要的应用^[6-9]. 其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, μ 对应阻尼项系数,且 f 和 $\Omega > 0$ 分别对应外激励项的振幅和频率. 对系统(1)施加线性时滞位移反馈,得到如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t), \\ \dot{y}(t) &= -x(t) + x^2(t) - \varepsilon\mu y(t) \\ &\quad + \varepsilon f \cos \Omega t + \varepsilon K(x(t - \tau) - x(t)). \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $x_\tau = x(t - \tau)$, τ 是时滞量, $K > 0$ 是反馈增益系数. 容易看出,当 $\tau = 0$ 时,系统(2)可以退化为系统(1). 方程(2)可以看成是一个单通道反馈控制系统的数学模型. 本文将应用 Melnikov 函数法分析 Helmholtz 振子系统的安全盆边界分形条件,在此基础上应用时滞位移反馈方法提高安全盆边界分形的阈值;并给出时滞反馈控制系统安全盆的定义后,进而通过数值仿真验证理论预测的有效性,研究时滞位移反馈对系统安全盆侵蚀的控制效果.

2. 安全盆的分形条件

对于系统(1),当 $\varepsilon = 0$ 时,其无扰动系统可写成

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + x^2, \quad (3)$$

为 Hamilton 系统,系统奇点有两个,其中点 $C(0,0)$ 为中心,而 $S(1,0)$ 为鞍点. 经过鞍点的同宿轨道为

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 1 - \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2}, \\ y_0(t) &= \frac{3}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{t}{2} \tanh \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

将激励和阻尼看成摄动项,则系统(1)相应的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) (-\mu y_0(t) + f \cos \Omega(t + t_0)) dt \\ &= -\frac{6}{5} \varepsilon \mu - 6 \pi \varepsilon f \Omega^2 \operatorname{csch}(\Omega \pi) \sin \Omega t_0. \end{aligned} \quad (5)$$

当

$$f > \frac{\mu}{5 \pi \Omega^2 \operatorname{csch}(\Omega \pi)}, \quad (6)$$

根据(5)式,存在 t_0 使得 $M(t_0) = 0$, 且 $M'(t_0) \neq 0$, 由此可知(5)式存在简单零点. 这就意味着稳定流形和不稳定流形在 Poincaré 截面上横截相交,出现同宿分岔. 由于同宿轨线断裂会引起安全盆的边界分形,因此如果系统(1)的参数取值满足(6)式,将会引起系统(1)的安全盆侵蚀. 因此

$$f_0 = \frac{\mu}{5 \pi \Omega^2 \operatorname{csch}(\Omega \pi)}, \quad (7)$$

即为系统(1)安全盆边界分形的激励振幅阈值(即门槛值). 系统(1)的激励振幅小于 f_0 , 则其相应的安全域边界不受侵蚀.

对于施加时滞位移反馈后的系统(2),仍可利用 Melnikov 函数法得到系统的安全盆边界分形条件. 但由于应用 Melnikov 函数法判断安全盆边界分形的前提是将时滞反馈项当成扰动项,即时滞反馈

不改变原系统(1)平衡点的稳定性.而在系统(2)中随时滞的增大,系统的平衡点可能发生稳定性切换^[22-24],因此在研究中时滞量的取值必须小于系统(2)的平衡点的第一次稳定性切换的时滞临界值.对于无激励系统(1),当 $\mu > 0$ 时,系统的两个平衡点中奇点 $C(0,0)$ 为稳定的焦点,而 $S(1,0)$ 不稳定.而对于系统(2),不稳定平衡点 $S(1,0)$ 的稳定性始终不随时滞量而改变.而同时,系统(2)的平衡点 $C(0,0)$,即 $x = 0$ 发生Hopf分岔的必要条件为

$$\begin{aligned} -\omega^2 + 1 + \varepsilon K &= \varepsilon K \cos \omega \tau, \\ -\varepsilon \mu \omega &= \varepsilon K \sin \omega \tau. \end{aligned} \quad (8)$$

假设 I 为 $(\varepsilon \mu, \varepsilon K)$ 的集合

$$I = \left\{ (\varepsilon \mu, \varepsilon K) \left| \begin{aligned} 2 + 2\varepsilon K - \varepsilon^2 \mu^2 &> 0, \\ (\varepsilon^2 \mu^2 - 2\varepsilon K - 2\varepsilon \mu)(\varepsilon^2 \mu^2) &> 0, \\ -2\varepsilon K + 2\varepsilon \mu &> 0 \end{aligned} \right. \right\}, \quad (9)$$

则当 $(\varepsilon \mu, \varepsilon K) \in I$ 时,(8)式有两不相等的正根 $\omega_+ > \omega_- > 0$.根据Hopf分岔定理,此时系统(2)发生Hopf分岔的时滞的临界值为

$$\tau_+(0) = \frac{1}{\omega_+} \left(2\pi - \arccos \left(1 + \frac{1 - \omega_+^2}{\varepsilon K} \right) \right). \quad (10)$$

当 $0 \leq \tau < \tau_+(0)$ 时,无激励系统(2)的平衡点的稳定性不发生改变.可以将时滞反馈项看成是扰动项.以下研究中取 $\tau \in [0, \tau_+(0))$.系统(2)的无扰动系统和经过鞍点的同宿轨道与无时滞控制系统(1)的相同,分别为(3)和(4)式.将阻尼项,外激励项以及时滞反馈项均当成扰动项,则系统(2)的Melnikov函数为

$$\begin{aligned} M(t_0) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) (-\mu y_0(t) \\ &\quad + K(x_0(t - \tau) - x_0(t)) \\ &\quad + f \cos \Omega(t + t_0)) dt, \end{aligned} \quad (11)$$

根据留数定理,得到

$$\begin{aligned} M(t_0) &= -\frac{6}{5} \varepsilon \mu - \frac{9}{2} \varepsilon K \operatorname{csch}^4 \frac{\tau}{2} (\tau(2 + \cosh \tau) \\ &\quad - 3 \sinh \tau) - 6\pi \varepsilon f \Omega^2 \operatorname{csch}(\Omega \pi) \sin \Omega t_0. \end{aligned} \quad (12)$$

设

$$\begin{aligned} T(\tau) &= \left| \frac{2}{5} \mu + \frac{3}{2} K \operatorname{csch}^4 \frac{\tau}{2} (\tau(2 + \cosh \tau) - 3 \sinh \tau) \right| \\ &\quad - 2\pi f \Omega^2 \operatorname{csch} \pi \Omega, \end{aligned} \quad (13)$$

则当 $T(\tau) < 0$ 时,存在 t_0 使得 $M(t_0) = 0$,且 $M'(t_0) \neq 0$,由此可知(13)式存在简单零点.这就意味着稳定流形和不稳定流形在Poincaré截面上横截相交,出现同宿分岔.由于同宿轨线断裂会引起安全盆的边界分形,因此如果系统(2)的参数取值

满足 $T(\tau) < 0$,将会引起系统(1)的安全盆侵蚀.反之,当 $T(\tau) > 0$ 安全盆不分形.而 $T(\tau) = 0$ 对应系统(2)安全盆边界分形的激励振幅阈值

$$f_0 = \frac{\left| 4\mu + 15K(\tau(2 + \cosh \tau) - 3 \sinh \tau) \operatorname{csch}^4 \frac{\tau}{2} \right|}{20\pi \Omega^2 \operatorname{csch} \pi \Omega}. \quad (14)$$

当激励振幅小于 f_0 时,系统(2)的安全盆边界光滑不分形.由此可知,与常微分非线性方程系统类似,在时滞系统(2)中外激励振幅的增大也会加剧安全盆的侵蚀.

取 $\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0, K = 2.0$,由(10)式,得到 $\tau_+(0) = 3.2254$.取 $\tau \in [0, 1.5] \subset [0, \tau_+(0))$,则由(13)式,当 $\Omega = 1.0$ 时不同激励振幅下,函数 $T(\tau)$ 随时滞的变化如图1所示.在图1中, $f = 0.7$ 所在曲线始终位于 $T = 0$ 轴上方,说明 $f = 0.7$ 时在 $K > 0$ 的情况下,无论时滞如何变动,系统(2)的安全盆始终不分形. $f = 0.9, f = 1.2$ 和 $f = 1.6$ 曲线与 $T = 0$ 轴的交点上时滞量分别为

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0.112234, \tau_2 = 0.319959, \\ \tau_3 &= 0.615103. \end{aligned} \quad (15)$$

因此对应系统(2)的 $f = 0.9, f = 1.2$ 和 $f = 1.6$ 时,分别当

$$\tau > \tau_1, \tau > \tau_2, \tau > \tau_3 \quad (16)$$

时,对应的激励振幅下系统(2)的安全盆边界将不再分形.因此这三个点分别为相应参数取值下的系统(2)的安全盆分岔点.由此可知,给定 $\Omega = 1.0$,则当 $f = 0.9, f = 1.2$ 或 $f = 1.6$ 时,时滞位移反馈均能够有效地控制系统的安全盆分形侵蚀.而根据(7)式和(14)式,激励频率 Ω 取不同值时系统(2)的安全盆边界侵蚀的激励振幅阈值 f_0 随时滞的变化如图2所示.由图2中实线可知,根据理论预测,随着时滞量的增大,激励振幅阈值将越来越大,最终可以使得原本无控制状态下的受到侵蚀的安全盆的边界均变光滑.同时,在激励频率 Ω 接近共振频率的一个邻域内,激励频率越小,安全盆边界分形的阈值越大.而对于时滞量的变化下,时滞位移反馈对系统(1)的安全盆侵蚀的具体控制效果,将在下一节通过数值仿真来研究.

3. 安全盆侵蚀的控制效果分析

在时滞微分方程中,由于系统的解往往由初始条件 $z(t) = z_0 (t=0)$ 和 $z(t) = \phi(t) (-\tau \leq t < 0)$

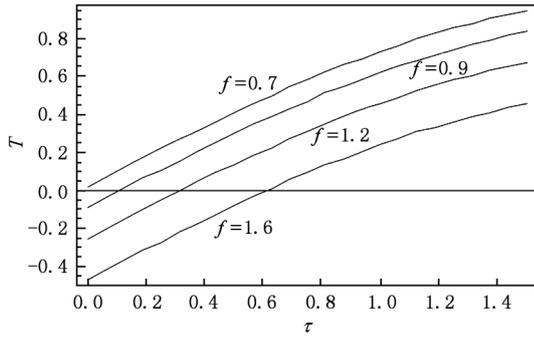


图1 当 $\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0, K = 2.0$ 和 $\Omega = 1.0$ 时,不同 f 取值下函数 $T(\tau)$ 随时滞的变化图

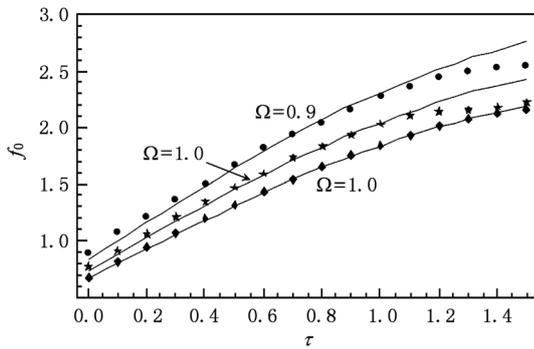


图2 当 $\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0$ 和 $K = 2.0$ 时,不同 Ω 下系统(2)中 f_0 随时滞的变化图,其中实线代表理论值,符号“●”,“★”和“◆”代表相应的数值结果

所共同决定,其中 $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t))^T$, 为系统的状态变量. 因此这样的初值吸引域难以直观地刻画与评价. 然而,对于时滞反馈控制系统,由于在时滞反馈控制系统零时刻以前没有信号返回到系统,可以给定初始条件为 $z(t) = z_0 (t = 0)$ 和 $z(t) = 0 (-\tau \leq t < 0)$. 因此,可以定义时滞反馈控制系统的安全盆为零时刻状态空间 $z(0)$ 上所有的有界解吸引域的集合^[20]. 对于所研究的时滞速度反馈控制系统(2),根据以上定义,系统安全盆应为位于零时刻状态平 $x(0) - y(0)$ 的所有有界

解吸引域的集合.

本节选取一个充分大的有界区域

$$D = \{ (x(t), y(t)) \mid -1.6 \leq x(t) \leq 2.4, -2 \leq y(t) \leq 2 \}, \quad (17)$$

该区域包含了系统(1)和(2)的所有奇点和两条同宿轨线. 当 $t = 0$ 时,本文在 $-1.6 \leq x(0) \leq 2.4, -2 \leq y(0) \leq 2$ 这样一个初始值范围内运用龙格-库塔法和点映射方法来刻画安全盆,其中初始点的个数为 640×240 . 即在初始轴 $x(0)$ 方向将 $[-2, 2]$ 划分为 639 等份,由此产生 640 条平行于 $y(0)$ 轴的格线;而在对应的 $y(0)$ 方向将 $[-2, 2]$ 划分为 239 等份,产生 240 条相应的格线;平行 $x(0)$ 轴和平行于 $y(0)$ 轴的格线相交,将产生 640×240 个格点,这些格点就是系统解的初始值. 由于研究的是系统的长期动力学行为,则当系统响应在 10000 个参数激励周期内如果仍未逃逸出有界区域 D , 认为此解是安全有界的,否则是不安全的. 在安全盆图形中,白色区域对应有界解的吸引域,即安全盆,而黑色区域则对应逸出的无界解吸引域. 对系统(2),给定 $\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0$ 和 $K = 2.0$. 通过盒子维方法^[25]计算系统(2)在不同的 f 取值下安全盆的边界的分数维,从而得到不同激励频率和时滞量下安全盆边界分形侵蚀的阈值 f_0 , 如图2所示. 由图2可知,理论预测和数值结果基本符合. 这些结果都表明时滞位移反馈控制对于控制提高安全盆边界分形的阈值,进而有效控制安全盆侵蚀有着积极的作用. 以下给定 $\Omega = 1.0$, 研究共振频率下,激励振幅 f 取不同值时,系统(2)的安全盆随时滞的变化规律. 图3对应 $f = 0.7, 0.9, 1.2$ 和 1.6 时无控制状态的系统(1)的安全盆. 而图4则对应当 $K = 2.0$ 时相同的激励振幅取值下系统(2)的安全盆随时滞量的演变图.

由图3可知,当 $f = 0.7$ 时,系统(1)的安全盆边界光滑;而当 $f = 0.9, 1.2$ 和 1.6 时,其安全盆均受到侵蚀. 特别是当 $f = 1.6$ 时,系统的安全盆几乎

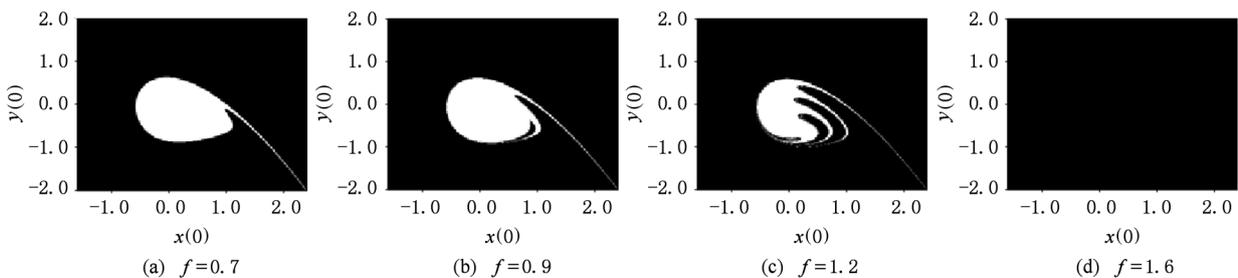


图3 当 $\varepsilon = 0.1, \mu = 1.0$ 和 $\Omega = 1.0$ 时系统(1)的安全盆随激励振幅 f 的演变图 (a) $f=0.7$; (b) $f=0.9$; (c) $f=1.2$; (d) $f=1.6$

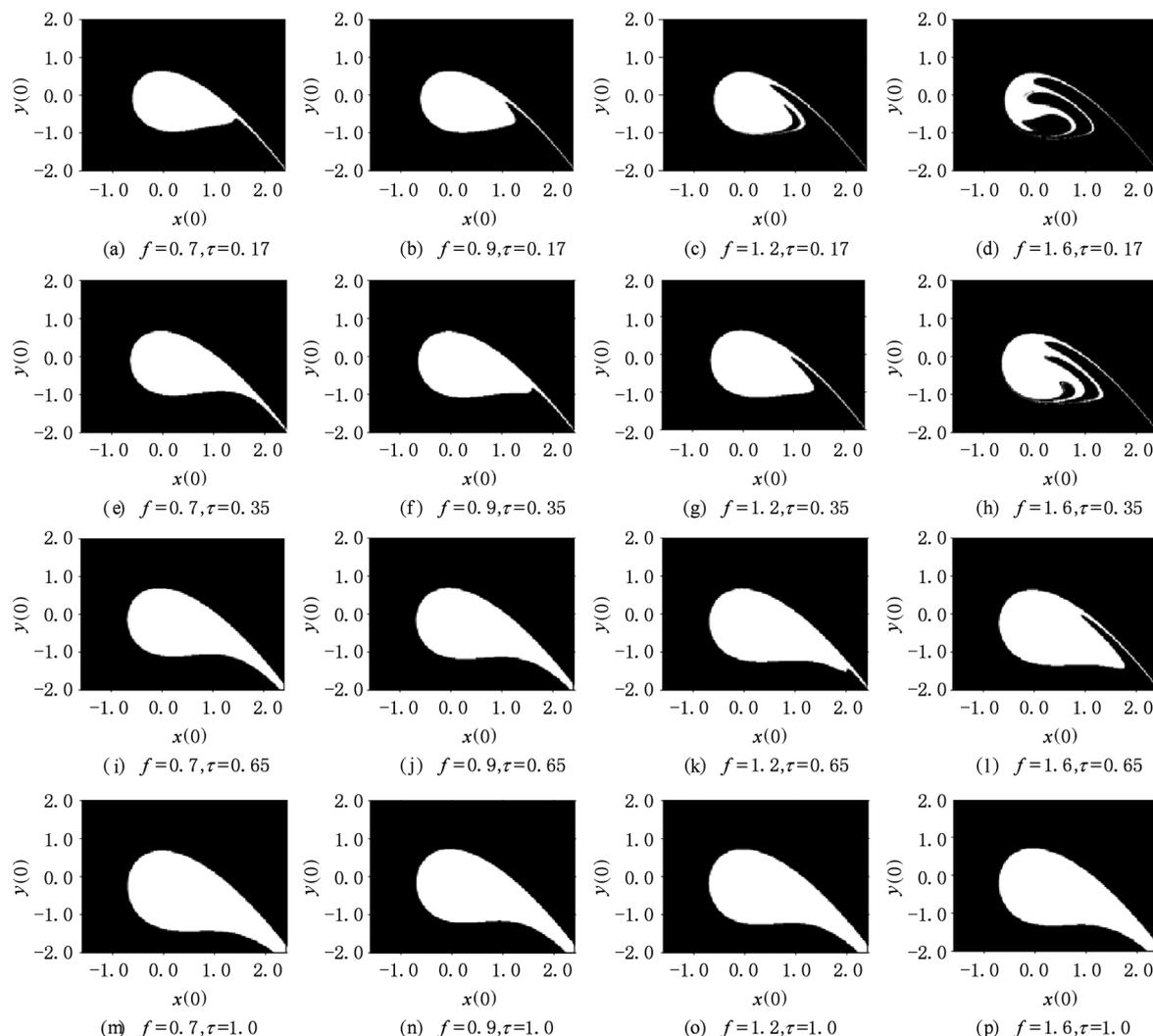


图4 $\varepsilon = 0.1, \mu = 1, K = 2.0$ 和 $\Omega = 1.0$ 时不同 f 取值下系统(2)的安全盆随 τ 的演变图 (a) $f=0.7, \tau=0.17$; (b) $f=0.9, \tau=0.17$; (c) $f=1.2, \tau=0.17$; (d) $f=1.6, \tau=0.17$; (e) $f=0.7, \tau=0.35$; (f) $f=0.9, \tau=0.35$; (g) $f=1.2, \tau=0.35$; (h) $f=1.6, \tau=0.35$; (i) $f=0.7, \tau=0.65$; (j) $f=0.9, \tau=0.65$; (k) $f=1.2, \tau=0.65$; (l) $f=1.6, \tau=0.65$; (m) $f=0.7, \tau=1.0$; (n) $f=0.9, \tau=1.0$; (o) $f=1.2, \tau=1.0$; (p) $f=1.6, \tau=1.0$

完全被侵蚀. 这些结果与图 1 中 $\tau = 0$ 时的理论预测相符合. 另外, 随激励振幅的增大, 系统(1)的安全盆边界出现分形, 尺寸也越来越小. 而在同样的激励振幅取值下, 当 τ 增大到 0.17 (见图 4(a) — (d)), 各安全盆的尺寸与无时滞系统(1)的安全盆相比均有所增大, 特别是 $f = 1.6$ 时, 安全盆的面积比起无时滞状态有了明显扩大 (见图 4(d)). 由于此时 $\tau_2 > \tau > \tau_1$, 按理论预测, 当 $f = 0.9$ 时, 系统(2)的安全盆边界应光滑不分形, 这与图 4(b) 相符合. 而当 $\tau = 0.35$, 由于 $\tau_2 < \tau < \tau_3$, 不仅 $f = 0.7$ 和 0.9 时安全盆边界光滑 (如图 4(e), (f)), $f = 1.2$ 时系统安全盆边界上的分形“手指”消失了 (见图 4(g)), 面积也有进一步增大. 而 $f = 1.6$ 时安全

盆边界虽然依旧分形, 但与无时滞及时滞较小的情况相比, 分形程度有所减轻, 而尺寸也有所扩大 (见图 4(h)). 当 $\tau = 0.65$ 时 (见图 4(i) — (l)), 由于 $\tau > \tau_3$, 各安全盆的面积继续增大, 同时边界均已光滑不分形. 当 τ 达到 1.0 (见图 4(m) — (p)), 各安全盆边界光滑的同时, 面积进一步随着时滞量而增大.

纵观图 3 和 4, 可以看出, 无论 f 取何值, 系统(2)的安全盆尺寸始终会随着时滞量的增大而扩大, 同时时滞的增大还使得原本受到侵蚀的安全盆边界逐渐变得光滑. 特别是 $f = 1.6$ 时, 系统的安全盆从原来的几乎全部被侵蚀而转变到边界完全不分形. 由此可见时滞位移反应用于控制系统(1)的

安全盆侵蚀有良好的控制效果. 不仅如此, 对比图 3 和图 4 中相同系统参数、不同时滞量下的安全盆时不难发现, 安全盆的尺寸会随着时滞量的增大而单调递增; 时滞量越大, 时滞位移反馈对系统的安全盆侵蚀的控制效果越好.

4. 结 论

本文对一个典型的平方非线性系统——Helmholtz 振子系统引入线性时滞位移反馈, 通过调节时滞量的大小控制系统的安全盆侵蚀. 研究了线性时滞位移反馈控制系统安全盆侵蚀的机理与控制效果. 研究发现: 时滞位移反馈对于控制系统安全盆侵蚀是一种好的控制方法. 在小的反馈增益下, 时滞位移反馈能够被用来控制安全盆的侵蚀. 当时滞较小时 (不超过时滞反馈系统的平衡点的第一次稳定性切换的临界值), 随着时滞的增大, 时滞位移反馈控制能够增大系统的安全盆面积, 降低安全盆的分形程度, 很好地抑制安全盆的侵蚀; 与无控制的原系统类似, 时滞受控系统的安全盆侵蚀程度也会随着外激励幅值的增大而加剧, 通过适当地选取时滞量和反馈增益系数, 能够提高安全盆边界分形的阈值. 本文的研究结果也为在时滞系统控制混沌提供了潜在的应用价值. 由于稳定和不稳定流

形的同宿轨道破裂常常会导致混沌运动的出现, 那么选择适当的时滞量和正反馈增益, 时滞线性位移反馈就可以通过防止同宿轨道的破裂, 不仅能够控制安全盆的分形侵蚀, 而且对抑制混沌振荡也起到积极的作用.

时滞位移反馈控制作为一个单通道控制, 在设计上简单而容易理解, 其中反馈增益和时滞量都是可以独立调节和控制的物理参数, 有着较广阔的设计和调节空间. 研究结果表明时滞位移反馈是控制系统的安全盆侵蚀的有效策略. 然而, 还有一些问题有待于进一步解决. 如在本文中我们利用了 Melnikov 函数法来预测时滞反馈控制系统安全盆边界分形的条件, 但该方法的使用有着一定的局限性, 即时滞量的取值不可以超过无激励系统的平衡点稳定性切换的临界值. 因此, 利用时滞位移反馈控制系统的安全盆侵蚀时, 必须研究时滞量的调节所带来的系统的稳定性, 这也正是本文研究的一个意义所在. 然而一旦时滞量超过了这个临界值, 时滞反馈系统的动力学行为发生了定性改变, 那么如何理论预测时滞位移反馈对系统安全盆的控制效果, 以及系统出现多个频率的扰动, 甚至是随机扰动, 时滞位移反馈对安全盆侵蚀的控制效果及其控制的鲁棒性又将如何, 这些构成了我们进一步工作的方向.

- [1] Thompson J M T, Rainey F C T, Soliman M S 1995 *Philosophical Transactions of the Royal Society* **332** 149
- [2] Wang D J, Yu L 2004 *Journal of Ship Mechanics* **8** 25 (in Chinese) [王冬姣、于玲 2004 船舶力学 **8** 25]
- [3] Soliman M S 1995 *Journal of Sound and Vibration* **182** 618
- [4] Senjanovic I, Parunov J, Cipric G 1997 *Chaos, Solitons and Fractals* **4** 659
- [5] Xu J, Lu Q S, Huang K L 1996 *Acta Mechanica Sinica* **12** 281
- [6] Gan C B 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 920
- [7] Rega G, Lenci S 2005 *Nonlinear Analysis* **63** 902
- [8] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2008 *Journal of Sound and Vibration* **313** 46
- [9] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2005 (in Chinese) [戎海武、王向东、徐伟、方同 2007 物理学报 **56** 2005]
- [10] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1506 (in Chinese) [戎海武、王向东、徐伟、方同 2008 物理学报 **57** 1506]
- [11] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4610 (in Chinese) [戎海武、王向东、徐伟、方同 2005 物理学报 **54** 4610]
- [12] Gong P L, Xu J X, Sun Z C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 841 (in Chinese) [龚璞林、徐健学、孙政策 2001 物理学报 **50** 841]
- [13] Zhang Q, Wang B H, Yang C W 2005 *Power System Technology* **29** 63 (in Chinese) [张强、王宝华、杨成梧 2005 电网技术 **29** 63]
- [14] Marcos S H C, Lopes S R, Viana R L 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **15** 417
- [15] Long Z J, Lee S K, Kim J Y 2010 *Ocean Engineering* **37** 418
- [16] Gu J Y, Miao Z H 2005 *Journal of Jiangsu University of Science and Technology (Nature Science Edition)* **19** 6 (in Chinese) [谷家扬、缪振华 2005 江苏科技大学学报(自然科学版) **19** 6]
- [17] Ji G, Zhang W K 2002 *Ship Building of China* **43** 25 (in Chinese) [纪刚、张纬康 2002 中国造船 **43** 25]
- [18] Lewis C P, Uçar A, Bishop S R 1998 *Transactions of the Institute of Measurement and Control* **20** 29
- [19] Nbenjo B R N, Salissou Y, Wofo P 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **23** 809
- [20] Shang H L, Xu J 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **41** 1880

- [21] Soliman M S, Thompson J M T 1989 *Journal of Sound and Vibration* **35** 453
- [22] Shang H L, Xu J 2008 *Journal of Tongji University (Natural Science)* **36** 962 (in Chinese) [尚慧琳、徐 鉴 2008 同济大学学报 **36** 962]
- [23] Qian Q, Wang L, Ni Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 569
- [24] Zou S C, Xu W, Jin Y F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7527 (in Chinese) [邹少存、徐 伟、靳艳飞 2008 物理学报 **57** 7527]
- [25] Tatlier M, Çenatalar A E 2001 *Chaos, Solitons and Fractals* **12** 1145

Controlling fractal erosion of safe basins in a Helmholtz oscillator by delayed position feedback*

Shang Hui-Lin[†]

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

(Received 20 February 2011; revised manuscript received 16 March 2011)

Abstract

A linear delayed position feedback is introduced into a Helmholtz oscillator system, and its effects on controlling the erosion of safe basins are investigated. The condition of fractal erosion of the basin boundary of the delayed feedback controlled system is acquired, there by the threshold of the excitation of the fractal erosion is obtained. Then considering time delay as a variable parameter and employing the 4th-order Runge-Kutta method and the point-to-point mapping method, evolutions of safe basins with time delay are presented. It is found that the increasing of time delay can enhance the threshold of the fractal erosion and reduce the erosion of safe basin effectively under a weak feedback gain. All the results imply that delayed position feedback can be used as a good strategy to control the erosion of safe basins.

Keywords: safe basin, fractal erosion, time delay, feedback

PACS: 05.45. - a, 05.45. Gg, 05.45. Df, 02.30. Ks

* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10902071), the Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. YYY08004), the Shanghai Leading Academic Discipline Project (Grant No. J51501), and the Fund of Development on Science and Technology of Shanghai Institute of Technology (Grant No. KJ2011-06).

[†] E-mail: suliner60@hotmail.com, suliner@sina.com.cn