

基于二阶矢量位的矩形截面回折线圈阻抗和脉冲磁场的解析建模与计算^{*}

郝宽胜 黄松岭[†] 赵伟 王珅

(清华大学电机系电力系统及发电设备国家重点实验室,北京 100084)

(2010年8月28日收到;2010年9月15日收到修改稿)

本文基于二阶矢量位建立了回折线圈的阻抗和磁场计算的解析模型,并提出了计算磁场脉冲响应的方法。根据回折线圈用于涡流检测和电磁超声检测时的通用模型,将回折线圈的阻抗和磁场计算问题转化为多个单匝矩形线圈阻抗和磁场的叠加问题。基于二阶矢量位和时谐电磁场方程,推导了回折线圈的频域标势表达式;利用标势与矢量磁位和磁通密度间的关系,推导了计算区域的磁通密度和式样表面涡流的频域解析计算公式;通过计算线圈的感应电势和阻抗变化表达式,得到了线圈阻抗的频域解析表达式;采用 FFT-IFFT 方法计算了脉冲磁场的时域响应。以一双层双分裂线圈和铝板试样为例进行计算,计算结果与实验结果以及时步有限元法计算结果相一致,验证了解析模型和计算方法的有效性和准确性,与时步有限元法相比,基于解析模型的计算很大程度上缩短了计算时间。

关键词: 无损检测,回折线圈,二阶矢量位,解析建模

PACS: 81.70. Cv, 81.70. Ex, 41.20.-q

1. 引言

涡流检测(eddy current testing, ECT)和电磁超声(electromagnetic acoustic, EMA)检测技术是针对金属性材料试件进行无损检测的重要技术,广泛应用于设备制造、航空、石油化工以及电力等多个工业领域^[1-4]。在 ECT 和 EMA 检测设备中,线圈是其主要组成元件。回折线圈作为一种可控制线圈间距的线圈结构在 ECT 和 EMA 检测中有着广泛应用^[5-8]。特别是在 EMA 检测中,配以静态偏置磁场,回折线圈可用以在待测试样中激发和接收 Lamb 波、SH 波、Rayleigh 波等多种模式的超声波。

对 ECT 而言,线圈的阻抗变化是评估缺陷有无以及对缺陷定量量化的标准^[9-11];当线圈施加脉冲激励时,线圈产生的脉冲磁场也是评价缺陷的有用信息^[12,13]。在 EMA 检测中,线圈阻抗需要准确获知以选择合适的匹配电路来提高能量传输,进而增大超声信号的幅值^[14]。线圈产生的脉冲磁场以及在试

样中产生的涡流是激发电磁超声的必要条件^[15,16]。ECT 和 EMA 检测时回折线圈的阻抗和脉冲磁场的计算问题对应于同样的物理模型,即载以正弦稳态电流或脉冲电流的回折线圈水平放置于与其有一定距离的待测导体试样上方。

线圈阻抗和脉冲磁场的计算方法主要有数值法和解析法两种。数值计算方法主要为有限元法(finite element method, FEM),其中线圈阻抗的计算基于时谐场的稳态有限元计算^[17],脉冲磁场的计算采用针对瞬态场的时步有限元进行(time step FEM, TSFEM)^[13,15,16]。数值计算方法具有一定通用性,可针对不同结构的线圈进行建模及分析计算。然而,对于涡流计算问题,特别是在频率较高的情况下,试样的集肤深度较小,采用有限元方法计算时网格剖分必须做到足够细密方能得到较为准确的计算结果,否则会造成大的计算误差,而网格密分的代价是会大大增加计算时间。数值计算的另一劣势是数值模型物理意义不清晰。因此,物理意义清晰且计算速度快的解析建模和计算方法一直以来受到重

* 国家自然科学基金(批准号:10974115)资助的课题。

† 通讯联系人。E-mail: huangsling@tsinghua.edu.cn

视. 针对螺旋线圈以及平面线圈, 有学者已经基于格林函数、分离变量法等建立了阻抗解析计算模型^[9-12, 18, 19], 并采用 Fourier 变换 (FT) 或 Laplace 变换 (LT) 及逆变换技术实现了脉冲磁场的计算. 但是, 由于回折线圈结构复杂, 目前尚未发现有针对回折线圈的阻抗解析模型以及脉冲磁场计算的文献报道.

本文根据回折线圈的结构特点, 将回折线圈的阻抗和脉冲磁场计算问题转化为多个单匝矩形线圈阻抗和脉冲磁场的叠加问题. 基于二阶矢量位和频域电磁场方程, 推导回折线圈的阻抗、磁通密度和式样表面的涡流分布的解析表达式, 并提出采用快速 Fourier 变换 (fast fourier transform, FFT)-快速 Fourier 逆变换 (inverse fast fourier Transform, IFFT) 方法计算脉冲磁场的时域响应. 最后以一个双层双分裂线圈为例进行计算, 并与实验结果和有限元计算结果相比较来验证解析模型和计算方法的有效性.

2. 线圈结构及等效模型

用于 ECT 和 EMA 检测的回折线圈主要采用印刷电路板 (printed circuit board, PCB) 或柔性板 (flexible printed circuit board, FPC) 工艺制作, 用以

提高线圈尺寸的制作精度并方便实际应用. 其典型结构如图 1 所示.

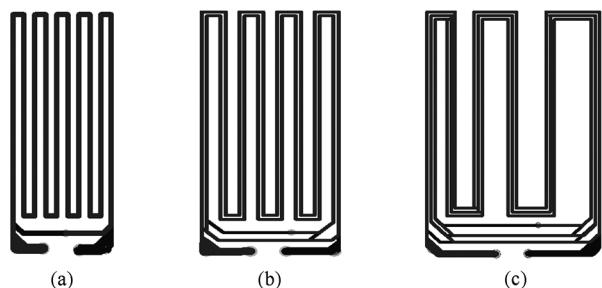


图 1 回折线圈结构: (a) 等距单分裂线圈; (b) 等距多分裂线圈; (c) 不等距多分裂线圈

线圈采用多分裂的目的是为了增加线圈每折的匝数, 为了实现同一目的, 线圈有时还要设计成多层结构. 采用等距或非等距的结构是为了对线圈间距的控制实现对所激发超声波的模式的控制.

将回折线圈应用于检测时, 须将线圈平放于待检测试样的上方. 忽略线圈的端部接线, 考虑多层、多分裂以及不等距结构的回折线圈置于试样上方时的截面模型如图 2 所示, 线圈为 M 层 N 分裂线圈, 线圈总折数为 $2Q$, 该模型为回折线圈的通用模型, 等距结构线圈为该模型的特例.

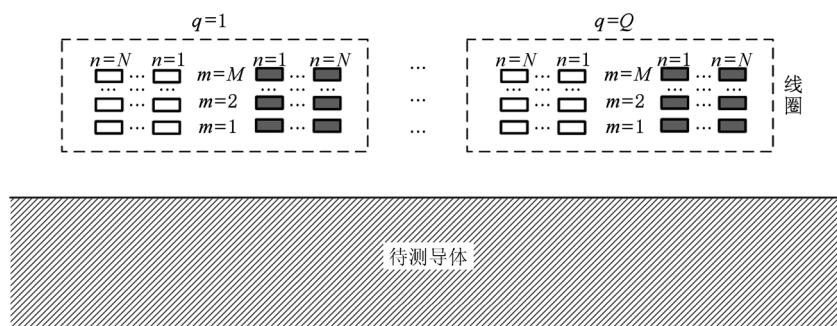


图 2 回折线圈通用模型

如图 2 所示, 根据线圈回折结构的特点, 相邻两折线圈的电流方向相反, 因此, 可以把相邻两折线圈中处于同一层同一分裂上的两根导线以及与二者相连的一段短导线近似等效为一个闭合线圈回路, 这样在每一层中会有 Q 个类似的线圈回路. 由于整个回折线圈为串联结构, 在给线圈施加激励后, 每个线圈回路的电流相等. 于是, 回折线圈的阻抗和脉冲磁场的计算问题就等效为 $M \times N \times Q$ 个矩形截面的单匝矩形线圈的阻抗和脉冲磁场的计算

问题.

3. 线圈阻抗与磁场的频域计算

3.1. 矩形 δ 线圈的标势

载有电流 I 的矩形 δ 线圈置于无穷区域传导媒质上方的示意图如图 3 所示. 求解空间分为三个区域: 线圈上方区域 R_a , 线圈与导体间区域 R_b , 导体区

域 R_c 。图中 x_0 和 y_0 分别表示线圈宽、长的一半。

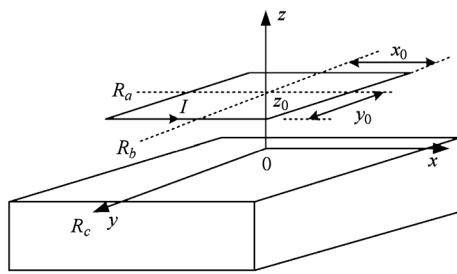


图 3 矩形 δ 线圈置于无穷区域传导媒质上方

在 ECT 及 EMA 检测中频率一般小于 10 MHz, 可忽略位移电流和速度效应, 时谐电磁场的控制方程采用二阶矢量表示为^[19,20]

$$\nabla \times [\hat{z} \nabla^2 W_1 + \hat{z} \times \nabla (\nabla^2 W_2) + \gamma^2 (W_1 \hat{z} + \hat{z} \times \nabla W_2)] = -\mu \mathbf{J}_s \quad (1)$$

式中, W_1 和 W_2 为标势; \mathbf{J}_s 为源电流密度; $\gamma^2 = -j\omega\mu\sigma$; ω 为角频率; μ 为媒质磁导率; σ 为媒质电导率; ∇^2 为拉普拉斯算子。

δ 线圈的磁场可通过标势 W_1 进行求解, 即 $\mathbf{B} = \nabla(\partial W_1 / \partial z)$, 而 W_1 的通解可以表示成双重傅里叶变换的形式^[20], 即

$$W_{1(b)s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha, \beta) e^{kz} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (2)$$

$$W_{1(b)e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha, \beta) \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} e^{-kz} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (3)$$

$$W_{1(c)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha, \beta) \frac{2k\mu_r}{k\mu_r + \lambda} e^{\lambda z} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (4)$$

其中, $W_{1(b)s}$, $W_{1(b)e}$ 分别为源电流和涡流在区域 R_b 内产生的标势; $W_{1(c)}$ 为区域 R_c 内的标势; α 和 β 为积分变量; $C(\alpha, \beta)$ 为待定系数; $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $\lambda = \sqrt{k^2 + \gamma^2}$ 。

根据 Biot-Savart 定律, 应用 Stokes 定理并经整理可得

$$W_{1(a)s} = \frac{\mu I}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-k(z-z_0)}}{k} \frac{\sin(\alpha y_0)}{\alpha} d\alpha d\beta$$

$$\times \frac{\sin(\beta y_0)}{\beta} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (6)$$

$$W_{1(b)s} = \frac{\mu I}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{k(z-z_0)}}{k} \frac{\sin(\alpha y_0)}{\alpha} d\alpha d\beta \times \frac{\sin(\beta y_0)}{\beta} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta. \quad (7)$$

3.2. 矩形截面单匝线圈的标势

首先考虑单匝线圈情况, 其结构如图 4 所示。图中, x_0 , y_0 分别代表线圈长、宽两个方向的内边缘到 z 轴的距离; w 代表线圈导线的宽度; h_1 , h_2 分别代表线圈下、上边缘到 xoy 平面的距离。

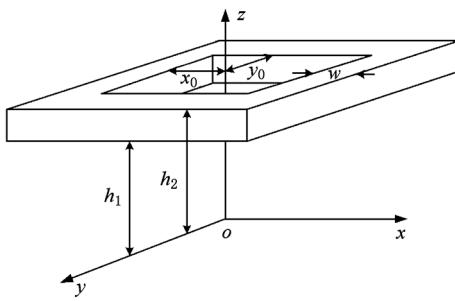


图 4 矩形截面单匝线圈

单匝矩形截面线圈的标势可视为 δ 线圈标势的叠加, 设导体截面电流密度连续分布, 则有

$$W_{1(a,b)s}^S = \int_0^w \int_{h_1}^{h_2} W_{1(a,b)s} dz_0 dw, \quad (8)$$

式中, 上标 S 代表单匝线圈, 下同。

将方程式(6)和(7)代入方程(8), 求取积分得

$$W_{1(a)s}^S = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-kz}}{k^2} (e^{kh_2} - e^{kh_1}) \frac{P}{\alpha\beta} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (9)$$

$$W_{1(b)s}^S = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kz}}{-k^2} (e^{-kh_2} - e^{-kh_1}) \frac{P}{\alpha\beta} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (10)$$

式中

$$P = \begin{cases} \frac{\sin[(\alpha - \beta)w + \alpha x_0 - \beta y_0] - \sin(\alpha x_0 - \beta y_0)}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin[(\alpha + \beta)w + \alpha x_0 + \beta y_0] - \sin(\alpha x_0 + \beta y_0)}{2(\alpha + \beta)}, & \alpha \neq \beta, \\ \frac{w}{2} \cos[\alpha(x_0 - y_0)] - \frac{\sin[\alpha(2w + x_0 + y_0)] - \sin[\alpha(x_0 + y_0)]}{4\alpha}, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

方程(9)和(10)给出的是线圈上方和下方的区域的标势,对于线圈截面所在区域可做如下处理^[21],对于该区域的任一点(x, y, z)的标势,可视为该点上方线圈与下方线圈产生标势的叠加,则将 $h_2 = z$ 和 $h_1 = z$ 分别代入(9)和(10)式的两个表达式并相加,得

$$W_{1\text{coilsection}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2} [2 - e^{-k(z-h_1)} - e^{k(z-h_2)}] \frac{P}{\alpha\beta} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta. \quad (11)$$

当矩形单匝线圈的中心坐标为(x', y', z_0)时,采用坐标变换,在方程(9),(10)和(11)中增加 $e^{-j\alpha x'} e^{-j\beta y'}$ 项即可.

3.3. 回折线圈的标势

在已知单个矩形截面线圈标势的前提下,通过坐标变换和叠加的方式计算回折线圈产生的标势.

针对图2所示的回折线圈的结构,设 $q=1$ 的线圈组的中心坐标为($0, 0, z_m$), $q=2-Q$ 线圈组中心坐标为($x'_q, 0, z_m$).分层计算回折线圈的标势,在第 m 层中包含 $N \times Q$ 个独立的单匝矩形线圈,则

$$P_n = \begin{cases} \frac{\sin[(\alpha - \beta)w + \alpha x_{0n} - \beta y_{0n}] - \sin(\alpha x_{0n} - \beta y_{0n})}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\sin[(\alpha + \beta)w + \alpha x_{0n} + \beta y_{0n}] - \sin(\alpha x_{0n} + \beta y_{0n})}{2(\alpha + \beta)}, & \alpha \neq \beta, \\ \frac{w}{2} \cos[\alpha(x_{0n} - y_{0n})] - \frac{\sin[\alpha(2w + x_{0n} + y_{0n})] - \sin[\alpha(x_{0n} + y_{0n})]}{4\alpha}, & \alpha = \beta, \end{cases}$$

式中的上标 m 代表第 m 层.

那么区域 R_b 中的标势为各层线圈该区域标势的叠加,有

$$W_{1(b)s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kz}}{-k^2} \sum_{m=1}^M (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \times \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{n=1}^N P_n \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta. \quad (15)$$

对比上式与(2)式,得系数 $C(\alpha, \beta)$ 为

$$C(\alpha, \beta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w k^2 \alpha\beta} \sum_{m=1}^M (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \sum_{n=1}^N P_n \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q}. \quad (16)$$

将方程(16)分别代入方程(3)和(4)即可求得

$W_{1(b)s}$ 和 $W_{1(c)s}$.

第 m 层的线圈自身产生的标势为

$$W_{1(a)s}^m = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-kz}}{k^2} (e^{kh_{2m}} - e^{kh_{1m}}) \frac{\sum_{n=1}^N P_n}{\alpha\beta} \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} \times d\alpha d\beta, \quad (12)$$

$$W_{1(b)s}^m = -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kz}}{k^2} (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \frac{\sum_{n=1}^N P_n}{\alpha\beta} \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} \times d\alpha d\beta, \quad (13)$$

$$W_{1\text{coilsection}}^m = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2} [2 - e^{-k(z-h_{2m})} - e^{-k(z-h_{1m})}] \frac{\sum_{n=1}^N P_n}{\alpha\beta} \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} \times d\alpha d\beta, \quad (14)$$

其中

对于回折线圈,每层导体线圈区域的磁场也值得关注,对于每层线圈而言,导体区域的标势等于该层自身产生的标势与其他层线圈在该区域产生的标势之和,则对于第 m' 层的线圈区域有

$$W_{1\text{coilsection}}^{m'} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 (h_2 - h_1) w} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{k^2} [2 - e^{-k(z-h_{1m'})} - e^{k(z-h_{2m'})}] + \sum_{m=1}^{m'-1} \frac{e^{-kz}}{k^2} (e^{kh_{2m}} - e^{kh_{1m}}) - \sum_{m=m'+1}^M \frac{e^{kz}}{k^2} (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \right\} \times \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{n=1}^N P_n \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \quad (17)$$

式中,上标 m' 代表第 m' 层.

3.4. 涡流、磁通密度和线圈阻抗

待测导体内感应涡流是实现 ECT 和 EMA 检测的必要条件, 根据电磁场理论, 回折线圈在待测导体试样表面产生的涡流可表示为

$$\mathbf{J}_e = -j\omega\sigma A_{(e)}, \quad (18)$$

式中, \mathbf{J}_e 表示导体内感应的涡流.

则

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_e = & \frac{j\omega\sigma\mu_0 I}{\pi^2(h_2 - h_1)w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\lambda z}}{k} \times \frac{\mu_r}{k\mu_r + \lambda} \\ & \times (j\beta\hat{x} - j\alpha\hat{y}) \sum_{m=1}^M (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \\ & \times \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{n=1}^N P_n \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (19)$$

式中, \hat{x} 和 \hat{y} 为方向向量.

根据 $\mathbf{B} = \nabla(\partial W_1/\partial z)$, 区域 R_b 和 R_c 内的磁通密度分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(b)} = & \frac{\mu_0 I}{2\pi^2(h_2 - h_1)w} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{-k} \left(e^{kz} - \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} e^{-kz} \right) \right. \\ & \times (j\alpha\hat{x} + j\beta\hat{y}) - \left(e^{kz} + \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} e^{-kz} \right) \hat{z} \Big] \\ & \times \sum_{m=1}^M (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \\ & \times \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{n=1}^N P_n \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(c)} = & \frac{\mu_0 I}{2\pi^2(h_2 - h_1)w} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{\lambda z}}{-k^2} \times \frac{2k\mu_r\lambda}{k\mu_r + \lambda} \right. \\ & \times (j\alpha\hat{x} + j\beta\hat{y} + \lambda\hat{z}) \Big] \sum_{m=1}^M (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \\ & \times \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{n=1}^N P_n \sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} e^{j\alpha x} e^{j\beta y} d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (21)$$

线圈的阻抗可表示为线圈的直流阻抗, 线圈在自由空间的阻抗和导体感生涡流而产生的阻抗变化之和. 即

$$Z = Z_d + Z_0 + \Delta Z, \quad (22)$$

式中, Z_d 为直流阻抗; Z_0 为自由空间的阻抗; ΔZ 为涡流引起的阻抗变化.

阻抗 Z_0 可通过计算线圈上的感应电势除以线圈的电流来计算. 即

$$Z_0 = \frac{V}{I}, \quad (23)$$

因此, 要计算阻抗 Z_0 需先计算线圈的感应电势. 根据前面计算标势的思路, 首先计算单匝线圈的感应电势, 其可以表示为^[21]

$$V^s = \frac{j\omega}{(h_2 - h_1)w} \int_{coil cross section} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \right) \times dArea. \quad (24)$$

回折线圈的感应电势为所有等效矩形线圈电势的叠加, 则有

$$\begin{aligned} V = & \frac{2j\omega\mu_0 I}{\pi^2(h_2 - h_1)^2 w^2} \sum_{m'=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ 2(h_{2m'} - h_{1m'}) \\ & + \frac{2}{k} [e^{-k(h_{2m'} - h_{1m'})} - 1] \\ & + \sum_{m=1}^{m'-1} \frac{1}{k} (e^{kh_{2m}} - e^{kh_{1m}}) (e^{-kh_{1m'}} - e^{-kh_{2m'}}) \\ & + \sum_{m=m'+1}^M \frac{1}{k} (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) \\ & \times (e^{kh_{1m'}} - e^{kh_{2m'}}) \} \\ & \times \frac{1}{(\alpha\beta)^2} \left(\sum_{n=1}^N P_n \right)^2 \left(\sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^Q e^{j\alpha x'_q} \right) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (25)$$

因此, 根据方程(22)得

$$\begin{aligned} Z_0 = & \frac{2j\omega\mu_0}{\pi^2(h_2 - h_1)^2 w^2} \sum_{m'=1}^M \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{ 2(h_{2m'} - h_{1m'}) \\ & + \frac{2}{k} [e^{-k(h_{2m'} - h_{1m'})} - 1] \\ & + \sum_{m=1}^{m'-1} \frac{1}{k} (e^{kh_{2m}} - e^{kh_{1m}}) (e^{-kh_{1m'}} - e^{-kh_{2m'}}) \\ & + \sum_{m=m'+1}^M \frac{1}{k} (e^{-kh_{2m}} - e^{-kh_{1m}}) (e^{kh_{1m'}} - e^{kh_{2m'}}) \} \\ & \times \frac{1}{(\alpha\beta)^2} \left(\sum_{n=1}^N P_n \right)^2 \left(\sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^Q e^{j\alpha x'_q} \right) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (26)$$

对于导体感应涡流而引起的阻抗变化 ΔZ , 根据文献[10], 可采用以下公式计算:

$$\begin{aligned} \Delta Z = \Delta R + j\Delta X = & \frac{j8\pi^2\omega}{\mu_0 I^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k^3 C(\alpha, \beta) \\ & \times C(-\alpha, -\beta) \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (27)$$

将 $C(\alpha, \beta)$ 代入上式, 得

$$\Delta Z = \frac{j2\omega\mu_0}{\pi^2(h_2 - h_1)^2 w^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k(\alpha\beta)^2} \left[\sum_{m=1}^M (e^{-kh_{2m}} \right.$$

$$- e^{-kh_1 m})]^2 \left(\sum_{n=1}^N P_n \right)^2 \left(\sum_{q=1}^Q e^{-j\alpha x'_q} \times \sum_{q=1}^Q e^{j\alpha x'_q} \right) \times \frac{k\mu_r - \lambda}{k\mu_r + \lambda} d\alpha d\beta. \quad (28)$$

回折线圈的直流阻抗 Z_d 实为直流电阻, 可根据线圈尺寸和电导率计算得到, 即

$$Z_d = \frac{L}{\sigma_c (h_2 - h_1) w}, \quad (29)$$

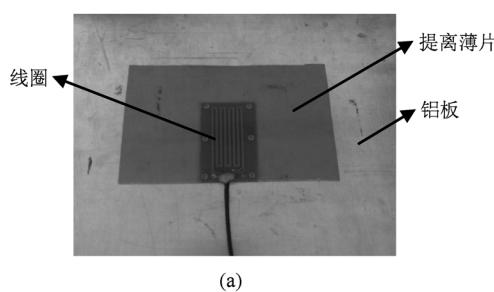
式中, L 为回折线圈导体的总长度; σ_c 为线圈导体的电导率.

4. 脉冲磁场的时域计算

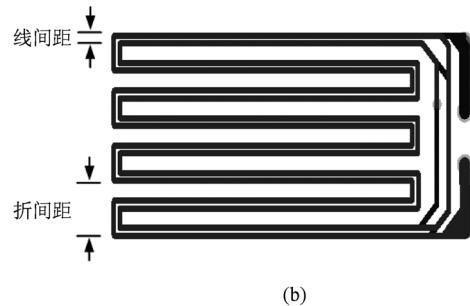
在稳态涡流检测中, 线圈阻抗以及阻抗的变化量可通过方程(40), (43)和(42)求解得出. 而在脉冲涡流和电磁超声检测中, 施加激励为脉冲信号, 需要计算线圈产生的脉冲磁场以及试样内的脉冲涡流, 即需要求解脉冲响应.

脉冲激励和响应可以表示为一系列不同频率正弦信号的叠加, 在磁通密度和脉冲涡流的频域表达式已知的条件下, 可以采用傅里叶逆变换(IFT)求得磁通密度和脉冲涡流的时域响应. 即

$$\mathbf{J}_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}_e e^{j\omega t} d\omega, \quad (30)$$



(a)



(b)

图 5 实验设置图 (a)实验布置;(b)线圈结构

表 1 线圈尺寸与材料参数

回折线圈	铝板		
基片厚度/mm	0.500	厚度/mm	30
铜箔宽度/mm	0.72	铝磁导率/(H/m)	$4\pi \times 10^{-7}$
铜箔厚度/mm	0.035	铝电导率/(S/m)	3.5×10^7
线间距/mm	0.905		
折间距/mm	6.5		
铜箔磁导率/(H/m)	$4\pi \times 10^{-7}$		
铜箔电导率/(S/m)	2.667×10^7		

图中线圈尺寸和材料参数如表 1 所示. 实验时, 线圈由大功率射频功率放大器(AG1024)提供激励信号, 该功率放大器既可产生频率和幅值连续可调的连续正弦信号, 也可产生频率、幅值和周期个数可调的 tone burst 信号. 实验中采用可以记录波形数据的示波器测量线圈端口的电压信号; 通过测量与线圈串联的 1Ω 的采样电阻上的电压信号测得线圈的电流信号. 线圈的阻抗幅值和相角可以根据所测

得的连续正弦信号的电压和电流波形计算得到.

在计算线圈的脉冲磁场时,需要给线圈施加脉冲激励.在线圈偏离 1 mm 的情况下,给线圈施加频率为 500 kHz、周期个数为 4 的 tone burst 信号,经测量得到的采样电阻的电压信号即线圈的电流信号如图 6 所示.

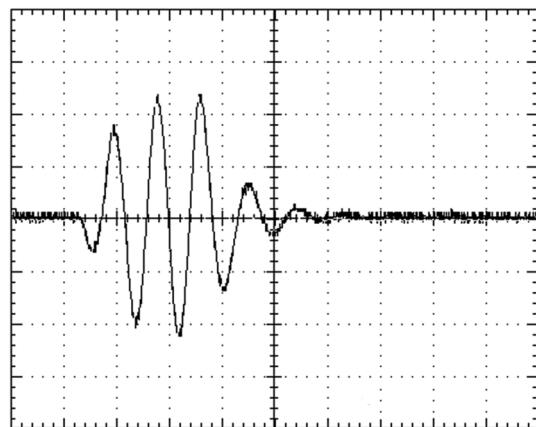


图 6 1Ω 采样电阻电压波形

5.2. TSFEM 仿真计算

为与数值计算方法相比较,采用 TSFEM 方法针对上述计算模型进行计算.考虑到三维模型的计算量过大,这里忽略线圈的端部效应并假设线圈在长度和导体在长度方向无限长,建立线圈的二维模型进行计算,在二维模型中,计算仅可得到涡流的 y 分量、磁通密度的 x 分量和 z 分量.计算采用通用的有

限元分析软件 Comsol Multiphysics^[22] 进行.

仿真采用图 5 中的电流信号作为线圈的激励,由于激励信号的频率较高,导体的集肤深度较小,同时线圈导体的尺寸也很小,为了保证计算结果的准确性,必须在导体的集肤深度内和线圈导体上划分较密的网格.针对图 7 的 TSFEM 计算模型所划分的网格单元总数为 15348.

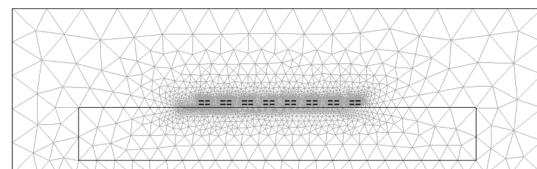


图 7 TSFEM 仿真模型

5.3. 结果比较

首先计算线圈在不同偏离时的阻抗,根据方程(40),(42)和(43),采用计算精度高的递推自适应 Simpson 法来计算数值积分.由于计算公式仅包含三角函数而没有像螺旋线圈计算公式中的 Bessel 函数^[18,19],且具有很好的收敛性,使得计算较为简单.

根据线圈尺寸和材料参数分别计算偏离距离为 0.1 mm, 0.2 mm, 0.3 mm, 0.4 mm, 0.5 mm, 1 mm, 2 mm 和没有待测试样时的线圈阻抗值,得到线圈阻抗的幅值和相角,并与实测结果进行对比,如表 2 所示.

表 2 阻抗计算值与实测值

偏离距离/mm	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	2	无试样
幅值计算值/ Ω	3.20	3.58	3.92	4.21	4.46	5.26	5.81	6.49
幅值测量值/ Ω	3.48	3.80	4.09	4.34	4.57	5.28	5.76	6.38
误差/%	8.05	5.79	4.16	3.00	1.97	0.38	0.87	1.72
相角计算值/($^\circ$)	49.20	55.87	60.06	62.99	65.66	70.28	72.81	74.80
相角测量值/($^\circ$)	44.86	52.11	57.45	59.56	62.86	68.52	69.86	72.33
误差/%	9.67	7.22	4.54	5.76	4.45	2.57	4.22	3.41

从表中可以看出,在不同的偏离距离下,阻抗的幅值和相角的计算值与实测值间的最大误差小于 10%,验证了计算公式的有效性和计算方法的准确性.

采用 FFT-IFFT 方法计算线圈的脉冲磁场和待测试样内的感应涡流.对图 6 中的电流信号取 1024

个数据点进行 FFT 变换,将每个频率对应的幅值代入方程(33),(34)和(35)并采用递推自适应 Simpson 法来计算对应频率的涡流和磁通密度数值,最后通过 IFFT 得到涡流和磁通密度的时域信号.

图 8、图 9 和图 10 分别给出的是坐标为

(1.1725 mm, 11.665 mm, -0.1 mm) 处的涡流密度 y 分量、磁通密度的 x 分量和 z 分量的解析模型计算值以及 TSFEM 计算值. 图 11 和图 12 给出的是坐标为 (1.1725 mm, 11.665 mm, 0.1 mm) 处的磁通密度的 x 分量和 z 分量的解析模型计算值以及 TSFEM 计算值. 图 8 到图 12 中的横坐标为时间 t . 从图中可以看出, 虽然解析模型的计算值和 TSFEM 计算值在时间和幅值上存在一定误差, 但二者基本符合, 证明了本文给出的涡流和磁通密度的解析模型的正确性和 FFT-IFFT 计算方法的有效性

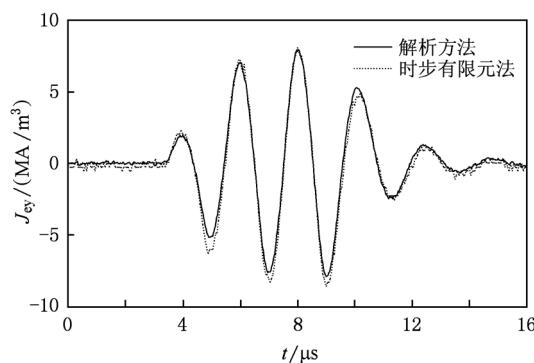


图 8 坐标 (1.1725, 11.665, -0.1) 处涡流密度的 y 分量

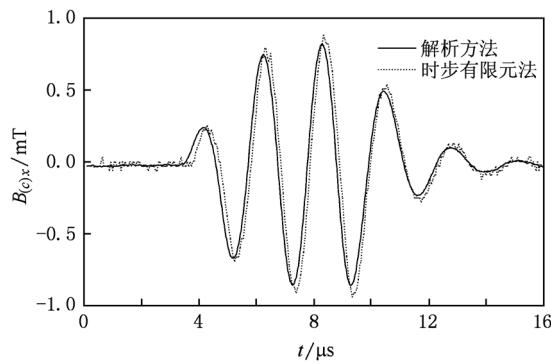


图 9 坐标 (1.1725, 11.665, -0.1) 处磁通密度的 x 分量

5.4. 分析讨论

由于在解析公式的推导过程中忽略了线圈导体的集肤效应和邻近效应, 假设导体内电流密度处处相等, 这势必造成与实际物理模型产生偏差. 表 2 中, 阻抗计算值与实验值之间的误差随着偏离距离的增大而减小的现象可做如下解释: 当线圈与待测导体间的偏离距离较小时, 集肤效应和邻近效应较为显著, 解析模型的计算误差较大; 而当偏离距离较大时, 集肤效应和邻近效应较弱, 解析模型的计

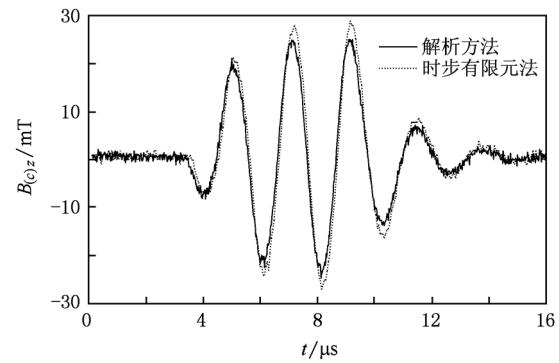


图 10 坐标 (1.1725, 11.665, -0.1) 处磁通密度的 z 分量

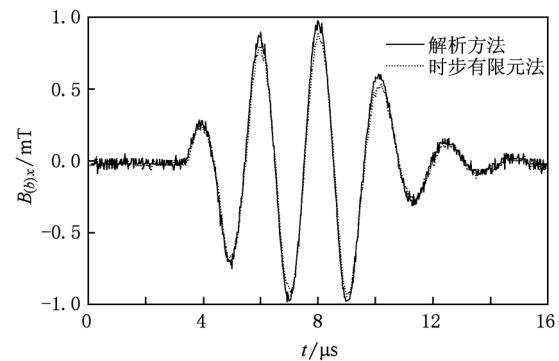


图 11 坐标 (1.1725, 11.665, 0.1) 处磁通密度的 x 分量

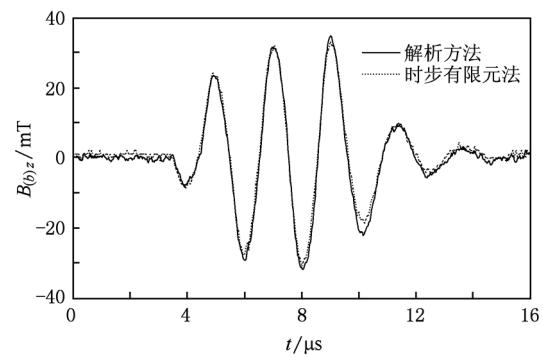


图 12 坐标 (1.1725, 11.665, 0.1) 处磁通密度的 z 分量

算误差较小. 由于在线圈的解析模型中难以考虑集肤效应和邻近效应, 因此忽略其影响是推导线圈解析模型时的通用做法^[18,19], 由此造成的计算误差在实际工程应用的接受范围内. 此外, 将回折线圈等效为单匝闭合线圈的叠加这一思想的本身也会带来一定的计算误差.

解析计算相比于数值计算而言, 其优点在于解析公式的物理意义清晰, 计算速度快. 采用配置为 Intel(R) Pentium(R) D 2.8GHz CPU, 3GB RAM 的

计算机进行计算,基于解析模型的 FFT-IFFT 方法的耗时约为 0.5 h,而 TSFEM 方法的计算耗时超过 24 h. 本文用于 TSFEM 计算的模型仅为二维模型,若采用三维模型,计算耗时会更长. 可见,采用本文给出回折线圈的解析模型和计算方法进行计算可很大程度上缩短计算时间,提高计算效率. 而且,采用本文的解析模型可计算涡流和磁场的三维分布.

6. 结 论

矩形截面回折线圈在 ECT 和 EMA 检测中得到

广泛应用. 基于二阶矢量位,通过线圈等效和叠加的方式首次推导了矩形截面回折线圈的阻抗和磁场的通用解析表达式,并采用 FFT-IFFT 的方法计算了线圈磁场的脉冲响应. 通过实例计算以及与实验结果和数值计算结果相比较,验证了所推导解析表达式的正确性和脉冲磁场计算方法的有效性. 与 TSFEM 方法相比,所给出的解析模型和计算方法具有物理概念清晰、计算速度快等优点. 本文给出的解析模型和计算方法可方便地应用于采用矩形截面回折线圈的 ECT 和 EMA 探头的分析与优化设计,这将是作者后续的研究方向.

- [1] Wong B S, Guan, T C 2004 *J. Adv. Mater.* **36** 3
- [2] Pickett C A, Koerner D W, Deeds W E, Dodd C V 1988 *Rev. Prog. Quan. Nond. Evalu.* **7** B 1695
- [3] Al-Qahtani H, Beuker T, Damaschke J 2008 *Glob. Pipel. Mon.* **4**
- [4] Sebko V P, Suchkov G M, Malakhov A V 2004 *Defektoskopiya* **7** 17
- [5] Thompson R B 1979 *Appl. Phys. Lett.* **34** 175
- [6] Wakiwaka H, Nishizawa H, Yanase S, Maehara O 1996 *IEEE edn.* 4332
- [7] Yamada S, Fujiki H, Iwahara M, Mukhopadhyay S C Dawson F P 1997 *IEEE Trans. Magn.* **33** 3376
- [8] Mizuno S, Yamada, S, Iwahara, M 2003 *J. Magn. Soc.* **27** 397
- [9] Li Y, Theodoulidis T, Tian G Y 2007 *IEEE Trans. Magn.* **43** 4010
- [10] Theodoulidis T P, Kriegis E E 2002 *NDT & E Int.* **35** 407
- [11] Fava J O, Ruch M C 2006 *NDT & E Int.* **39** 414
- [12] Fan M B, Huang P J, Ye B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5950 (in Chinese) [范孟豹、黄平捷、叶 波 2009 物理学报 **58** 5950]
- [13] Tsuboi H, Seshima N, Sebestyén I, Pávó J, Gyimóthy S, Gasparics A 2004 *IEEE Trans. Magn.* **40** 1330
- [14] Liang Z W, Sun H L, Wang Z J, Xu J, Xu Y M. 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4292 (in Chinese) [梁志伟、孙海龙、王之江、徐杰、徐跃民 2008 物理学报 **57** 4292]
- [15] Ludwig R, Dai X W 1991 *J. Appl. Phys.* **69** 89
- [16] Dhayalan R, Balasubramaniam K, Krishnamurthy C V 2010 (*American Institute of Physics, edn.*) 972
- [17] Hussein A M 1991 *IEEE Trans. Magn.* **27** 4258
- [18] Dodd C V, Deeds W E 1968 *J. Appl. Phys.* **39** 2829
- [19] Yong L, Tian G Y, Anthony S 2008 *NDT & E Int.* **41** 477
- [20] Xie L, Lei Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4397 (in Chinese) [谢 莉、雷银照 2006 物理学报 **55** 4397]
- [21] Smythe W R 1989 *Static and dynamic electricity* (3rd ed) (New York: McGraw-Hill) p329
- [22] Comsol multiphysics 3.5 2007 *User guide and modelling library*

Analytical modelling and calculation of impedance and pulsed magnetic field for rectangular meander coil based on second order potential^{*}

Hao Kuan-Sheng Huang Song-Ling[†] Zhao Wei Wang Shen

(State Key Lab of Power Systems, Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(Received 28 August 2010; revised manuscript received 15 September 2010)

Abstract

Meander coil is an important kind of coil configuration used in eddy current testing and electromagnetic acoustic testing. Owing to lack of analytical calculation formulas of impedance and magnetic field for meander coil, the analytical modeling is performed and a method of calculating pulsed response is presented. In terms of the general model for eddy current testing and electromagnetic acoustic testing, the calculation of impedance and pulsed magnetic field is transformed into the superposition of impedance and pulsed magnetic field of single rectangular coils. Based on the second order vector potential and the time harmonic magnetic field equations, the scalar potential analytical expressions of the meander coil are derived. Then the analytical expressions of magnetic flux in all solution area and eddy current in the specimen are obtained. By calculating the induction electric potential and the impedance change, the impedance analytical expression of the rectangular meander coil is derived. An FFT-IFFT method is used to calculate the time domain response to pulsed magnetic field. A model with an 8-meander double-layer double-bundle coil above an aluminium plate is used in calculation, and the results are in good agreement with the experimental result and the TSFEM calculation result, which verifies the analytical model and the accuracy of the calculation method. The analytical calculation largely shortens the calculation time compared with that by TSFEM method.

Keywords: nondestructive testing, meander coil, second order potential, analytical modelling

PACS: 81.70. Cv, 81.70. Ex, 41.20.-q

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974115).

[†] Corresponding author. E-mail: huangsling@tsinghua.edu.cn