

# 电感电流连续模式下 Boost 变换器的 分数阶建模与仿真分析\*

王发强<sup>†</sup> 马西奎

(西安交通大学电气工程学院电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2011年3月2日收到; 2011年3月22日收到修改稿)

基于分数阶微积分理论以及实际电容和实际电感在本质上是分数阶的事实, 建立电感电流连续模式下 Boost 变换器的分数阶数学模型以及分数阶状态平均模型并进行理论分析, 给出 Boost 变换器运行于电感电流连续模式下的参数条件. 最后, 基于 Matlab/Simulink 软件建立运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的分数阶仿真模型, 并进行数值仿真分析以验证分数阶建模与理论分析的正确性.

**关键词:** Boost 变换器, 电感电流连续模式, 分数阶微积分, 数值仿真

**PACS:** 05.45.-a, 84.30.Jc, 45.10.Hj

## 1. 引言

开关功率变换器是开关电源的核心, 作为研究开关电源的关键环节, 开关功率变换器的建模与控制一直是国内外学者研究的热点问题. 特别是由于开关功率变换器建模是实现开关功率变换器控制的控制器设计的基础, 即建模的准确与否直接影响到控制器设计性能的高低. 因此, 准确的建立开关功率变换器的数学模型在开关电源设计中显的尤为重要. 截至目前为止, 人们已提出了采用状态平均法、离散映射法等建模方法实现了对开关功率变换器的建模<sup>[1,2]</sup>. 然而, 以上的建模方法主要是基于开关功率变换器用整数阶模型来描述, 即开关功率变换器中的电容是整数阶电容、电感是整数阶电感.

但是, 人们对实际电容和实际电感的数学建模研究的研究结果表明: 实际电容和实际电感在本质上均是分数阶的, 须建立相应的分数阶模型来描述实际电容和实际电感的电特性<sup>[3-8]</sup>. 例如, Jonscher 指出<sup>[3]</sup>: 整数阶电容在实际中并不存在, 这主要是由于构成电容的电介质材料展示出分数阶特性, 导致整数阶电容的容抗形式违反了因果关系<sup>[4]</sup>.

Westerlund 等人于 1994 年通过实验测定出在不同电介质情况下分数阶电容的阶数<sup>[5]</sup>. 此外, Westerlund 指出实际电感在本质上也是分数阶的<sup>[6]</sup>. 而 Petráš 采用分数阶电容和分数阶电感设计了分数阶蔡氏电路, 其电路实验结果与仿真结果一致, 从而进一步证实了实际电容和实际电感的分数阶特性<sup>[7]</sup>. 特别值得一提的是, Jesus 等通过选择具有不同分形结构的电极表面面积、不同电解液制造出了具有 0.59 阶、0.42 阶等不同阶数的分数阶电容<sup>[8]</sup>.

综上所述, 采用整数阶模型只能粗略近似的描述实际电容和实际电感的电特性, 从而导致以往采用整数阶模型描述开关功率变换器是不够精确的, 也是与开关功率变换器的分数阶本质相违背的. 特别是由于 Jesus 等已制造出具有 0.59 阶、0.42 阶等不同阶数的分数阶电容后<sup>[8]</sup>, 如仍然建立开关功率变换器的整数阶模型来描述开关功率变换器可能会得出错误的结论. 因此, 基于分数阶微积分来研究开关功率变换器的建模问题成为了一项具有重要理论意义和实际工程价值的研究课题. 然而, 在基于分数阶微积分的开关功率变换器建模方面, 公开的文献很少且研究的也不够深入<sup>[9,10]</sup>. 例如,

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51007068), 高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20100201120028), 中央高校基本科研业务专项资助和电力设备电气绝缘国家重点实验室 (批准号: EPEI10303) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: faqwang@mail.xjtu.edu.cn

Ahmad 分析了分数阶电容对功率因数校正变换器的影响<sup>[9]</sup>. Martínez 等人对 Buck-Boost 变换器的分数阶模型的建立进行了初步的研究<sup>[10]</sup>. 然而, 文献 [9, 10] 都没有考虑实际电感也是分数阶的.

本文将以运行于电感电流连续模式下的 Boost 变换器为研究对象, 给出 Boost 变换器的分数阶数学模型和分数阶状态平均模型, 指出 Boost 变换器的分数阶模型和整数阶模型的区别. 最后, 通过 Matlab/Simulink 的数值仿真来验证分数阶建模与理论分析的正确性.

## 2. Boost 变换器的分数阶数学建模

Boost 变换器电路原理图如图 1 所示,  $P_w$  为周期性开关脉冲信号, 其开关周期为  $T$ . Boost 变换器的工作原理: 当周期性开关脉冲信号为高电平时, 功率开关管 S 导通, 二极管  $D_i$  承受反向电压而关断, 称 Boost 变换器运行于工作模式 1; 当周期性开关脉冲信号为低电平时, 功率开关管 S 关断, 二极管  $D_i$  承受正向电压而导通, 称 Boost 变换器运行于工作模式 2. 当仅考虑 Boost 变换器运行于电感电流连续模式时, 则只有工作模式 1 和工作模式 2 这两种模式.

根据文献[6]可知, 分数阶电感两端的电压  $v_L$  与流过分数阶电感的电流  $i_L$  之间的关系为

$$v_L = L \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha}, \quad (1)$$

其中  $\alpha$  为电感的分数阶阶数且  $0 < \alpha < 1$ .

根据文献[6]可知, 流过分数阶电容的电流  $i_C$  与分数阶电容两端的电压  $v_0$  之间的关系为

$$i_C = C \frac{d^\beta v_0}{dt^\beta}, \quad (2)$$

其中  $\beta$  为电容的分数阶阶数且  $0 < \beta < 1$ .

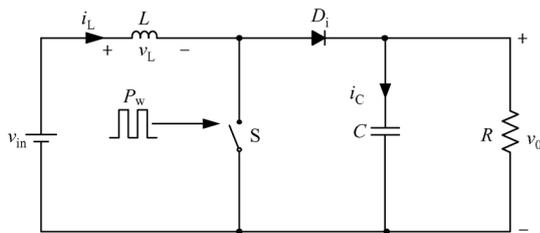


图 1 Boost 变换器的电路原理图

因此, Boost 变换器处于 2 种不同工作模式下的

分数阶数学模型分别为

工作模式 1 ( $0 < t < dT$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha} &= \frac{v_{in}}{L}, \\ \frac{d^\beta v_0}{dt^\beta} &= -\frac{v_0}{CR}; \end{aligned} \quad (3)$$

工作模式 2 ( $dT < t < T$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha i_L}{dt^\alpha} &= \frac{v_{in}}{L} - \frac{v_0}{L}, \\ \frac{d^\beta v_0}{dt^\beta} &= \frac{i_L}{C} - \frac{v_0}{CR}. \end{aligned} \quad (4)$$

很显然, 与运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的整数阶模型相比<sup>[1]</sup>, 由(3)和(4)式描述的运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的分数阶模型还与电感的分数阶阶数  $\alpha$  及电容的分数阶阶数  $\beta$  有关.

## 3. Boost 变换器的分数阶状态平均模型的建立与分析

根据 Boost 变换器的运行特点知, Boost 变换器中的电感电流  $i_L$  以及输出电压  $v_0$  等电路变量都存在高频的开关纹波. 而根据状态平均法可知, 电路变量中的高频开关纹波可通过在一个开关周期内对电路变量进行平均而去除<sup>[1]</sup>, 即

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x d\tau, \quad (5)$$

$x$  表示 Boost 变换器中的任一电路变量.

而根据分数阶微积分的性质有<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d^\gamma \langle x \rangle}{dt^\gamma} &= \frac{d^\gamma}{dt^\gamma} \left( \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x d\tau \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{d^\gamma x}{dt^\gamma} d\tau \\ &= \left\langle \frac{d^\gamma x}{dt^\gamma} \right\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\gamma$  为分数阶阶数且  $0 < \gamma < 1$ . 下面将根据状态平均法的步骤, 建立运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的分数阶状态平均模型, 并进行理论分析. 这里, 令  $I_L, V_0, D$  和  $V_{in}$  分别为  $i_L, v_0, d$  和  $v_{in}$  的直流分量,  $\langle i_L \rangle, \langle v_0 \rangle$  和  $\langle v_{in} \rangle$  分别为  $i_L, v_0$  和  $v_{in}$  在一个开关周期内的平均值, 而  $\hat{i}_L, \hat{v}_0, \hat{d}$  和  $\hat{v}_{in}$  分别为  $i_L, v_0, d$  和  $v_{in}$  的交流分量. 注意, 各变量交流分量的幅值远远小于其相应的直流分量, 即  $|\hat{i}_L|$  远小于  $I_L$ ,  $|\hat{v}_0|$  远小于  $V_0$ ,  $|\hat{d}|$  远小于  $D$ ,  $|\hat{v}_{in}|$  远小于  $V_{in}$ . 因

此,对 $\langle i_L \rangle, \langle v_0 \rangle, d$ 和 $\langle v_{in} \rangle$ 可作如下分解:

$$\begin{aligned} \langle v_{in} \rangle &= V_{in} + \hat{v}_{in}, \\ \langle v_0 \rangle &= V_0 + \hat{v}_0, \\ d &= D + \hat{d}, \\ \langle i_L \rangle &= I_L + \hat{i}_L. \end{aligned} \quad (7)$$

基于(3),(4)和(6)式,可求得运行于 CCM 下 Boost 变换器的分数阶状态平均模型为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \langle i_L \rangle}{dt^\alpha} &= \frac{\langle v_{in} \rangle}{L} - \frac{\langle v_0 \rangle}{L}(1-d), \\ \frac{d^\beta \langle v_0 \rangle}{dt^\beta} &= \frac{\langle i_L \rangle}{C}(1-d) - \frac{\langle v_0 \rangle}{CR}. \end{aligned} \quad (8)$$

把(7)式代入(8)式并忽略高阶小量,即 $\hat{v}_0 \hat{d} \approx 0, \hat{i}_L \hat{d} \approx 0$ ,有

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha (I_L + \hat{i}_L)}{dt^\alpha} &= \frac{\hat{v}_{in}}{L} - \frac{\hat{v}_0(1-D)}{L} + \frac{\hat{d}V_0}{L} \\ &\quad + \frac{V_{in}}{L} - \frac{V_0(1-D)}{L}, \\ \frac{d^\beta (\hat{v}_0 + V_0)}{dt^\beta} &= \frac{\hat{i}_L(1-D)}{C} - \frac{\hat{d}I_L}{C} - \frac{\hat{v}_0}{CR} \\ &\quad + \frac{I_L(1-D)}{C} - \frac{V_0}{CR}. \end{aligned} \quad (9)$$

对(9)式进行直流分量分离后,可得

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha I_L}{dt^\alpha} &= \frac{V_{in}}{L} - \frac{V_0}{L}(1-D), \\ \frac{d^\beta V_0}{dt^\beta} &= \frac{I_L}{C}(1-D) - \frac{V_0}{CR}. \end{aligned} \quad (10)$$

注意,根据 Caputo 分数阶导数定义<sup>[11]</sup>,常数的任意分数阶导数等于零,即(10)式的左边等于零.因此,系统的直流分量,即稳态工作点为

$$V_0 = \frac{1}{1-D}V_{in}, \quad (11)$$

$$I_L = \frac{V_0}{R(1-D)}. \quad (12)$$

此外,根据 Caputo 分数阶导数定义以及认为输入电压为恒定值 $V_{in}$ ,则根据(3)式的第一个式子,可计算出电感电流 $i_L$ 在 $(0, DT)$ 内的增加量,即电感电流纹波 $\Delta i_L$ 为

$$\Delta i_L = \frac{V_{in}(DT)^\alpha}{L\alpha\Gamma(\alpha)}, \quad (13)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数<sup>[11]</sup>.可见,电感电流纹波 $\Delta i_L$ 不仅与电感 $L$ 、输入电压恒定值 $V_{in}$ 、占空比 $D$ 以及开关周期 $T$ 有关,而且还与电感的分数阶阶数 $\alpha$ 有关.此外,随着电感的分数阶阶数 $\alpha$ 越大,电感电流纹波 $\Delta i_L$ 越小.特别的,当 $\alpha = 1$ 时,

(13)式与文献[12]中用整数阶模型描述所得到的结果一样.

根据(12)式和(13)式可计算出电感电流峰值

$$\begin{aligned} i_{Lmax} &= I_L + \frac{1}{2}\Delta i_L \\ &= \frac{V_{in}}{R(1-D)^2} + \frac{V_{in}(DT)^\alpha}{2L\alpha\Gamma(\alpha)}, \end{aligned} \quad (14)$$

同理,基于 Caputo 分数阶导数定义、分数阶微分方程的 Adomian 解法<sup>[13]</sup>以及(3)式的第二个式子,可计算出输出电压 $v_0$ 在 $(0, DT)$ 内的减少量 $\Delta v_0$ 为

$$\Delta v_0 = \left[ 1 - E_\beta \left( -\frac{D^\beta T^\beta}{RC} \right) \right] V_{OT}, \quad (15)$$

其中 $E_\beta(\cdot)$ 为 Mittag-Leffler 函数<sup>[11]</sup>, $V_{OT}$ 为输出电压在功率开关 S 正好导通时刻的值,它可近似的表示为

$$V_{OT} = \frac{1}{2}\Delta v_0 + V_0, \quad (16)$$

因此,

$$V_{OT} = \frac{2V_{in}}{1-D} \frac{1}{1 + E_\beta \left( -\frac{D^\beta T^\beta}{RC} \right)}. \quad (17)$$

所以,把(11)式和(17)式代入(15)式后,输出电压纹波 $\Delta v_0$ 可近似为

$$\Delta v_0 = \frac{2V_{in}}{1-D} \frac{1 - E_\beta \left( -\frac{D^\beta T^\beta}{RC} \right)}{1 + E_\beta \left( -\frac{D^\beta T^\beta}{RC} \right)}. \quad (18)$$

可见,输出电压纹波 $\Delta v_0$ 不仅与电容 $C$ 、输入电压恒定值 $V_{in}$ 、占空比 $D$ 、负载电阻 $R$ 以及开关周期 $T$ 有关,而且还与电容 $C$ 的分数阶阶数 $\beta$ 有关.此外,随着电容的分数阶阶数 $\beta$ 越大,输出电压纹波 $\Delta v_0$ 越小.特别的,当 $\beta = 1$ 时,(18)式与文献[12]中用整数阶模型描述所得到的结果一样.

此外,要保持 Boost 变换器运行于电感电流连续模式,就必须满足电感电流 $i_L$ 在一个开关周期开始时刻或者是结束时刻的值大于零,或者是正好等于零.根据 Boost 变换器运行于电感电流模式的条件知 $I_0 \geq I_D$ <sup>[14]</sup>,而在稳态下,负载电流的直流分量 $I_0$ 为

$$I_0 = \frac{V_{in}}{R(1-D)}, \quad (19)$$

流过二极管的电流的直流分量 $I_D$ 为

$$I_D = \frac{1}{2}\Delta I_L(1-D)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{V_{in}(1-D)(DT)^\alpha}{L\alpha\Gamma(\alpha)}. \quad (20)$$

因此,要使 Boost 变换器运行于电感电流连续模式,就必须满足以下条件:

$$\frac{L}{RT^\alpha} \geq \frac{(1-D)^2 D^\alpha}{2\alpha\Gamma(\alpha)}. \quad (21)$$

可见,判断 Boost 变换器运行于电感电流连续模式的条件不仅与电感  $L$ 、负载电阻  $R$ 、占空比  $D$  以及开关周期  $T$  有关,还与电感  $L$  的分数阶阶数  $\alpha$  有关. 而且,还可以得出对于电感的分数阶阶数  $\alpha$  越大, Boost 变换器越容易运行于电感电流连续模式. 特别的,当  $\alpha=1$  时, (21) 式与文献 [14] 中用整数阶模型描述所得到的结果一样.

对(9)式进行交流分量分离后,可得

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \hat{i}_L}{dt^\alpha} &= \frac{\hat{v}_{in}}{L} - \frac{\hat{v}_0(1-D)}{L} + \frac{\hat{d}V_0}{L}, \\ \frac{d^\beta \hat{v}_0}{dt^\beta} &= \frac{\hat{i}_L(1-D)}{C} - \frac{\hat{d}I_L}{C} - \frac{\hat{v}_0}{RC}. \end{aligned} \quad (22)$$

基于分数阶微积分的拉普拉斯变换方法对(22)式进行拉普拉斯变换,有

$$\begin{aligned} s^\alpha \hat{i}_L(s) &= \frac{\hat{v}_{in}(s)}{L} - \frac{\hat{v}_0(s)}{L} + \frac{\hat{v}_0(s)}{L} D \\ &\quad + \frac{V_0}{L} \hat{d}(s), \\ s^\beta \hat{v}_0(s) &= \frac{\hat{i}_L(s)}{C} - \frac{\hat{i}_L(s)}{C} D - \frac{\hat{d}(s)}{C} I_L \\ &\quad - \frac{\hat{v}_0(s)}{CR}. \end{aligned} \quad (23)$$

因此,输出电压  $\hat{v}_0(s)$  对输入电压  $\hat{v}_{in}(s)$  的传递函数  $G_{vv}(s)$  为

$$\begin{aligned} G_{vv}(s) &= \frac{\hat{v}_0(s)}{\hat{v}_{in}(s)} \Big|_{\hat{d}(s)=0} \\ &= \frac{1-D}{LC} \\ &\quad \frac{1}{s^{\alpha+\beta} + \frac{1}{CR}s^\alpha + \frac{(1-D)^2}{LC}}. \end{aligned} \quad (24)$$

输出电压  $\hat{v}_0(s)$  对占空比  $\hat{d}(s)$  的传递函数  $G_{vd}(s)$  为

$$\begin{aligned} G_{vd}(s) &= \frac{\hat{v}_0(s)}{\hat{d}(s)} \Big|_{\hat{v}_{in}(s)=0} \\ &= \frac{-\frac{I_L}{C}s^\alpha + \frac{V_0(1-D)}{LC}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{1}{CR}s^\alpha + \frac{(1-D)^2}{LC}}. \end{aligned} \quad (25)$$

电感电流  $\hat{i}_L(s)$  对输入电压  $\hat{v}_{in}(s)$  的传递函数

$G_{iv}(s)$  为

$$\begin{aligned} G_{iv}(s) &= \frac{\hat{i}_L(s)}{\hat{v}_{in}(s)} \Big|_{\hat{d}(s)=0} \\ &= \frac{\frac{1}{L}(s^\beta + \frac{1}{CR})}{s^{\alpha+\beta} + \frac{1}{CR}s^\alpha + \frac{(1-D)^2}{LC}}. \end{aligned} \quad (26)$$

电感电流  $\hat{i}_L(s)$  对占空比  $\hat{d}(s)$  的传递函数  $G_{id}(s)$  为

$$\begin{aligned} G_{id}(s) &= \frac{\hat{i}_L(s)}{\hat{d}(s)} \Big|_{\hat{v}_{in}(s)=0} \\ &= \frac{\frac{V_0}{L}s^\beta + \frac{V_0}{LCR} + \frac{I_L(1-D)}{LC}}{s^{\alpha+\beta} + \frac{1}{CR}s^\alpha + \frac{(1-D)^2}{LC}}. \end{aligned} \quad (27)$$

很显然, (24) — (27) 式均与  $\alpha, \beta$  有关. 特别地, 当  $\alpha=1, \beta=1$  时, (24) — (27) 式与文献 [1] 中用整数阶模型描述所得到的结果一样.

#### 4. 数值仿真

为进一步验证上述分数阶建模与理论分析的正确性,基于 Matlab/Simulink 软件以及薛定宇等人在 Oustaloup 滤波器分数阶微积分算法 [15] 基础上提出的改进算法 [16], 分别建立运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的分数阶数学模型和分数阶状态平均模型的数值仿真模型, 分别如图 2(a) 与 (b) 所示. 注意, 薛定宇等人提出的改进 Oustaloup 滤波器的分数阶微积分算法有三个关键参数: 拟合频率下限  $\omega_b$ 、拟合频率上限  $\omega_h$ 、滤波器阶数  $2N+1$ . 在对实际分数阶系统进行数值仿真时, 需根据系统的频率范围选择拟合频率段 ( $\omega_b, \omega_h$ ) 和  $N$  值, 一般取  $\omega_b \omega_h = 1$ . 选择电路参数为  $v_{in} = 24$  V,  $L = 4$  mH,  $C = 100$   $\mu$ F,  $d = 0.4$ ,  $f = 25$  kHz 且认为  $\langle d \rangle = 0.4$ ,  $\langle v_{in} \rangle = 24$  V. 此外, 图 2 中的 Convert 模块是进行数据转换, 而图 2 中的 Fractional Int  $s^{-\alpha}$  模块是分数阶积分单元, 可根据薛定宇等 [16] 提出的改进 Oustaloup 滤波器分数阶微积分算法进行编程, 然后利用 Simulink 的模块封装技术进行封装后得到, 其内部结构如图 2(c) 所示. 其中, Transfer Fcn 模块是改进 Oustaloup 滤波器分数阶微积分算法的实现模块, Transfer Fcn1 模块则是为了避免在仿真中出现代数环而串联一个带宽为  $\omega_h$  ( $\omega_h = 1/A$ ) 的低通滤波器.

当取  $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$  时, 根据 (21) 式可得: 使

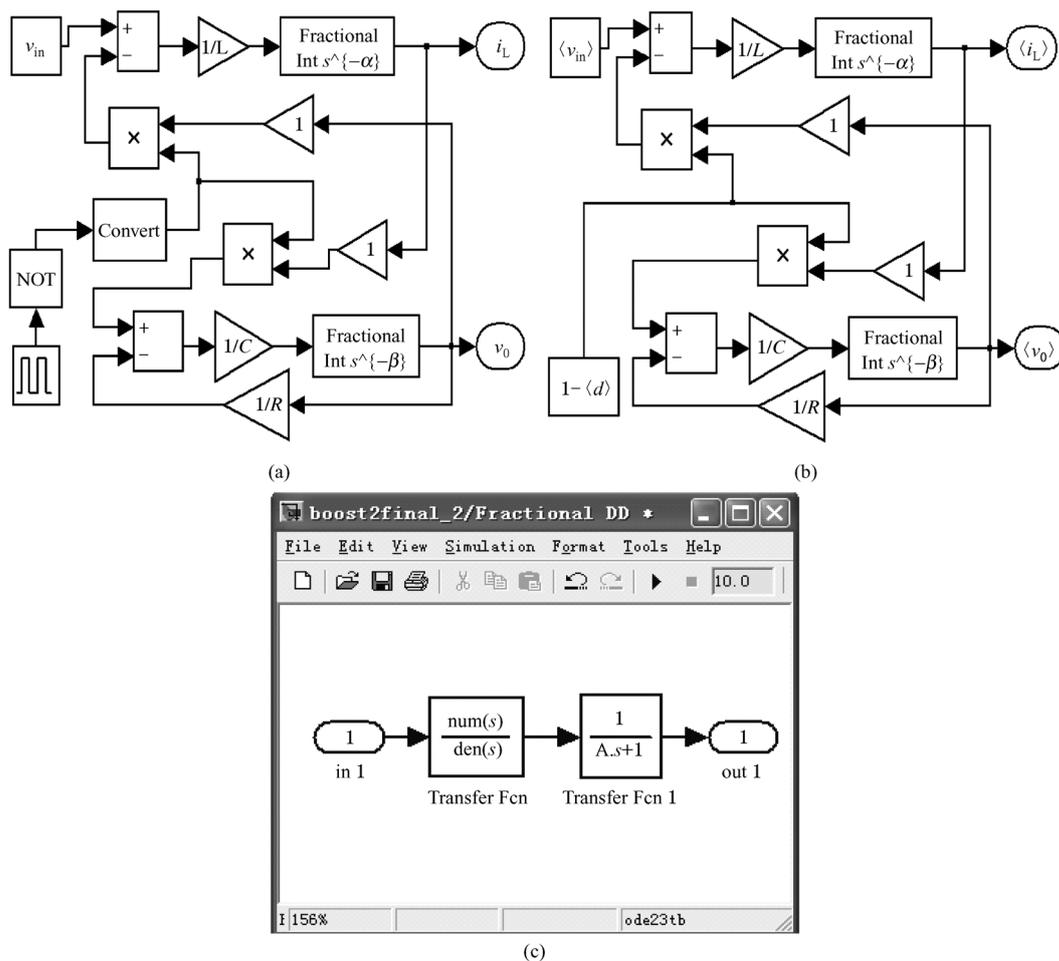


图2 Matlab/Simulink 数值仿真模型 (a) 分数阶数学模型; (b) 分数阶状态平均模型; (c) 分数阶积分单元

Boost 变换器运行于临界状态时负载电阻  $R = 142.1085 \Omega$ . 因此, 要使 Boost 变换器运行于电感电流连续模式, 必须使  $R$  小于  $142.1085 \Omega$ . 在此, 选择  $R = 50 \Omega$ . 由于开关频率为  $f = 25 \text{ kHz}$ , 即相应的  $\omega = 2\pi f \approx 1.57 \times 10^5 \text{ rad/s}$ , 考虑到还存在高于开关频率的高频谐波存在, 从而需选择  $\omega_h > 1.57 \times 10^5 \text{ rad/s}$ . 在此, 选择  $\omega_h = 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_b = 2 \times 10^{-6} \text{ rad/s}$ ,  $N = 8$ . 当达到稳态后, 两种模型下的电感电流  $i_L$  波形和输出电压  $v_o$  波形分别如图 3(a) 和 (b) 所示. 根据图 3(a) 知 Boost 变换器确实运行于电感电流连续模式, 并可测量出  $\Delta i_L = 0.932 \text{ A}$ ,  $i_{L\max} = 1.808 \text{ A}$ ,  $\langle i_L \rangle = 1.333 \text{ A}$ . 根据图 3(b) 可测量出  $\Delta v_o = 1.22 \text{ V}$ ,  $v_{oT} = 40.4 \text{ V}$ ,  $\langle v_o \rangle = 40 \text{ V}$ . 注意, 由于交流分量  $\hat{i}_L$  的幅值远远小于其直流分量  $I_L$ ,  $\hat{v}_o$  的幅值远远小于其直流分量  $V_o$ , 因此可认为  $V_o \approx 40 \text{ V}$ ,  $I_L \approx 1.333 \text{ A}$ . 而根据 (12), (13) 和 (14) 式分别计算出  $I_L = 1.333 \text{ A}$ ,  $\Delta i_L = 0.938 \text{ A}$ ,  $i_{L\max} = 1.803 \text{ A}$ ; 根据 (11), (17) 和 (18) 式分别计算出  $V_o = 40 \text{ V}$ ,  $v_{oT} = 40.623 \text{ V}$ ,  $\Delta v_o =$

$1.247 \text{ V}$ . 可见, 理论计算结果与数值仿真结果基本一致, 从而表明了对运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的分数阶建模与理论分析的正确性.

特别地, 当取  $\alpha = 1, \beta = 1$  时, 表明是采用整数阶模型来描述运行于电感电流连续模式下的 Boost 变换器, 其整数阶数学模型以及整数阶状态平均模型的数值仿真模型可通过把图 2(a) 与 (b) 中分数阶积分单元改为整数阶积分单元而获得. 相应的数值仿真结果如图 4(a) 与 (b) 所示. 根据图 4(a) 知 Boost 变换器仍然运行于电感电流连续模式, 并可测量出  $\Delta i_L = 0.096 \text{ A}$ ,  $i_{L\max} = 1.381 \text{ A}$ ,  $\langle i_L \rangle = 1.333 \text{ A}$ . 根据图 4(b) 可测量出  $\Delta v_o = 0.13 \text{ V}$ ,  $v_{oT} = 40.06 \text{ V}$ ,  $\langle v_o \rangle = 40 \text{ V}$ . 注意, 由于交流分量  $\hat{i}_L$  的幅值远远小于其相应的直流分量  $I_L$ ,  $\hat{v}_o$  的幅值远远小于其相应的直流分量  $V_o$ , 因此  $V_o \approx 40 \text{ V}$ ,  $I_L \approx 1.333 \text{ A}$ . 而根据 (12), (13) 和 (14) 式分别计算出  $I_L = 1.333 \text{ A}$ ,  $\Delta i_L = 0.096 \text{ A}$ ,  $i_{L\max} = 1.381 \text{ A}$ ; 根据 (11), (17) 和 (18) 式分别计算出  $V_o = 40 \text{ V}$ ,  $v_{oT} = 40.064 \text{ V}$ ,  $\Delta v_o = 0.128$

V. 把  $\alpha = 1, \beta = 1$  时得到的结果与  $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$  时得到的结果相比,发现电感电流直流分量  $I_L$  和输出电压直流分量  $V_0$  没有发生变化,而电感电流纹波  $\Delta i_L$ 、电感电流峰值  $i_{Lmax}$ 、输出电压纹波  $\Delta v_0$  以及输出电压在开关导通时刻的值  $v_{0T}$  都发生了很大的变化. 这就表明:如果用整数阶模型 ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ) 描述本应用分数阶模型 ( $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$ ) 描述的运行于

电感电流连续模式下的 Boost 变换器,将在感电流纹波  $\Delta i_L$ 、电感电流峰值  $i_{Lmax}$ 、输出电压纹波  $\Delta v_0$  以及输出电压在开关导通时刻的值  $v_{0T}$  等方面得出错误的结果. 可见,由于实际电容和实际电感在本质上是分数阶的事实,须采用分数阶模型描述运行于电感电流连续模式下 Boost 变换器的动力学行为.

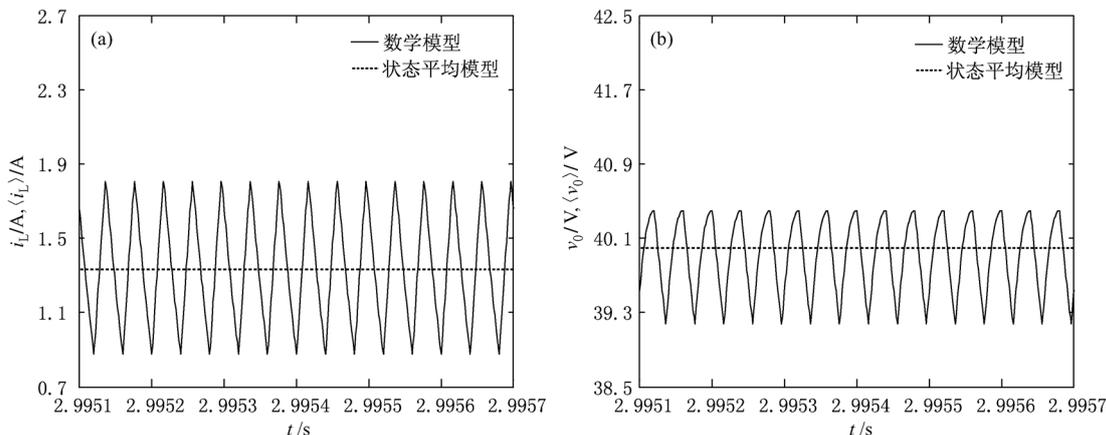


图3 数值仿真波形 ( $\alpha = 0.8, \beta = 0.8$ ) (a)  $i_L$  与  $\langle i_L \rangle$ , (b)  $v_0$  与  $\langle v_0 \rangle$

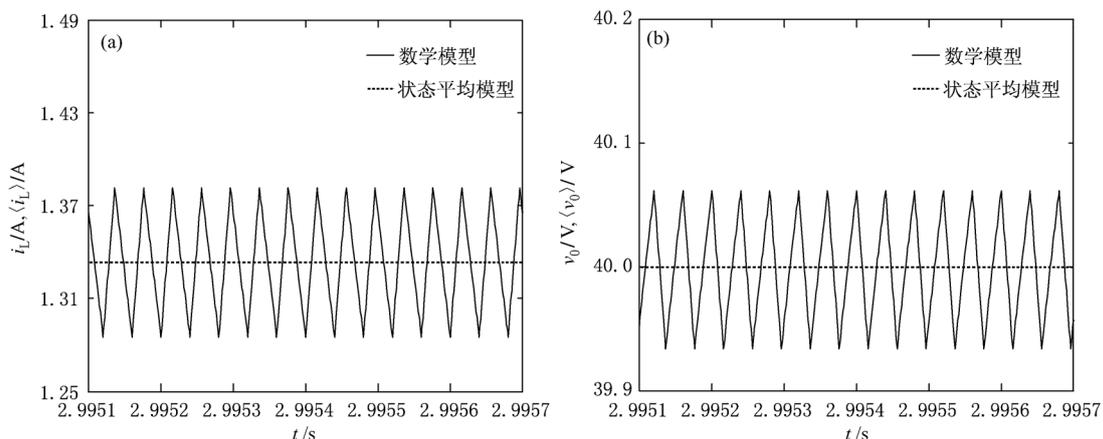


图4 数值仿真波形 ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ) (a)  $i_L$  与  $\langle i_L \rangle$ , (b)  $v_0$  与  $\langle v_0 \rangle$

### 5. 结 论

本文基于分数阶微积分理论,建立了 Boost 变换器的分数阶数学模型和分数阶状态平均模型,给出了 Boost 变换器运行于电感电流连续模式下的参数条件. 经过理论分析发现:

1. Boost 变换器运行于电感电流连续模式的参数条件不仅与电感  $L$ 、负载  $R$ 、开关周期  $T$ 、占空比  $D$  有关,还与电感  $L$  的分数阶阶数  $\alpha$  有关. 而且在其他条件不变的情况下,随着电感  $L$  的分数阶阶数  $\alpha$  的

增大,Boost 变换器越易于运行于电感电流连续模式.

2. 当 Boost 变换器运行于电感电流连续模式时,其输出电压直流分量  $V_0$ 、电感电流直流分量  $I_L$  与电感的分数阶阶数  $\alpha$  以及电容的分数阶阶数  $\beta$  无关.

3. 当 Boost 变换器运行于电感电流连续模式时,电感电流纹波  $\Delta i_L$  和电感电流峰值  $i_{Lmax}$  均与电感  $L$  的分数阶阶数  $\alpha$  有关. 而且,在其他参数不变的情况下,随着电感  $L$  的分数阶阶数  $\alpha$  的增大,电感电流纹波  $\Delta i_L$  和电感电流峰值  $i_{Lmax}$  都将减小.

4. 当 Boost 变换器运行于电感电流连续模式时,输出电压纹波  $\Delta v_0$  和输出电压在功率开关 S 导通时刻的值  $v_{0T}$  均与电容  $C$  的分数阶阶数  $\beta$  有关. 而且,在其他参数不变的情况下,随着电容  $C$  的分数阶阶数  $\beta$  的增大,输出电压纹波  $\Delta v_0$  以及输出电压在功率开关 S 导通时刻的值  $v_{0T}$  都将减小.

5. 当 Boost 变换器运行于电感电流连续模式时,得出的输出电压  $\hat{v}_0(s)$  对输入电压  $\hat{v}_{in}(s)$  的传递函数、输出电压  $\hat{v}_0(s)$  对占空比  $\hat{d}(s)$  的传递函数、电感电流  $\hat{i}_L(s)$  对输入电压  $\hat{v}_{in}(s)$  的传递函数、电感电流  $\hat{i}_L(s)$  对占空比  $\hat{d}(s)$  的传递函数均与电

感  $L$  的分数阶阶数  $\alpha$  以及电容  $C$  的分数阶阶数  $\beta$  有关.

综上所述,由于实际电感和实际电容在本质上是分数阶的事实,导致以往采用整数阶模型只能粗略近似的描述电感电流连续模式下 Boost 变换器的动力学行为,特别是当  $\alpha(0 < \alpha < 1)$  较小、 $\beta(0 < \beta < 1)$  较小时,如仍然采用整数阶模型描述电感电流连续模式下的 Boost 变换器将会得出错误的结论. 因此,应建立能真实反映电感电流连续模式下 Boost 变换器动力学行为的分数阶数学模型.

- [1] Zhang W P 2006 *Modeling and control of switching converter* (Beijing: China Electric Power Press) chapt. 1,6 (in Chinese) [张卫平 2006 开关变换器的建模与控制(北京:中国电力出版社)第一,六章]
- [2] Zhao Y B, Luo X S, Fang J Q, Wang B H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5022 (in Chinese) [赵益波、罗晓曙、方锦清、汪秉宏 2005 物理学报 **54** 5022]
- [3] Jonscher A K 1983 *Dielectric relaxation in solids* (London: Chelsea Dielectric Press) chapt. 3
- [4] Bohannan G W 2002 *Proc. of the 41st IEEE Int. Conf. on Decision and Control, Tutorial Workshop 2: Fractional Calculus Applications in Automatic Control and Robotics 1*
- [5] Westerlund S, Ekstam L 1994 *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* **1** 826
- [6] Westerlund S 2002 *Dead matter has memory* (Kalmar, Sweden: Causal Consulting) chapt. 7
- [7] Petráš I 2008 *Chaos Soliton. Fract.* **38** 140
- [8] Jesus I S, Tenreiro Machado J A 2009 *Nonlinear Dyn.* **56** 45
- [9] Ahmad W 2003 *Proc. of the 2003 Int. Symposium on Circuits and Systems 3* III. 5
- [10] Martínez R, Bolea Y, Grau A, Martínez H 2009 *IEEE Conf. on Emerging Technologies & Factory Automation 1*
- [11] Podlubny I 1999 *Fractional differential equations* (New York: Academic Press) chapt. 1-2,4.
- [12] Zhang Z S, Cai X S 2006 *The Principle and Design of Switching Power Supply* (Beijing: Publishing House of Electronics Industry) chapt. 2 (in Chinese) [张占松、蔡宣三 2006 开关电源的原理与设计(北京:电子工业出版社)第二章]
- [13] Duan J S, An J Y, Xu M Y 2007 *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B* **22** 7
- [14] Yang Y, Pei Y Q, Wang Z A 2004 *Switching Power supply technology* (Beijing: China Machine Press) chapt. 4 (in Chinese) [杨旭、裴云庆、王兆安 2004 开关电源技术(北京:机械工业出版社)第四章]
- [15] Oustaloup A, Levron F, Mathieu B, Nanot F M 2000 *IEEE Trans. Circuits Syst. -I* **47** 25
- [16] Xue D Y, Chen Y Q 2007 *MATLAB Solutions to Mathematical Problems in Control* (Tsinghua University Press) chapt. 9 (in Chinese) [薛定宇、陈阳泉 2007 控制数学问题的 MATLAB 求解(北京:清华大学出版社)第九章]

# Fractional order modeling and simulation analysis of Boost converter in continuous conduction mode operation<sup>\*</sup>

Wang Fa-Qiang<sup>†</sup> Ma Xi-Kui

(State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, School of Electrical Engineering,  
Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 2 March 2011; revised manuscript received 22 March 2011)

## Abstract

Based on fractional calculus and the fact that the capacitor and the inductor are fractional in nature, the fractional mathematical model and the fractional state averaged model of the Boost converter in continuous conduction mode operation are built and analyzed. Also, the condition for the continuous conduction mode operation of the Boost converter is given. Finally, in order to verify the theoretical analysis, the simulation model of the Boost converter in continuous conduction mode operation is established by using the software of Matlab/Simulink.

**Keywords:** Boost converter, continuous conduction mode, fractional calculus, numerical simulation

**PACS:** 05.45. - a, 84.30. Jc, 45.10. Hj

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51007068), the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20100201120028), the Fundamental Research Funds for the Central Universities and the State Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment (Grant No. EIPE10303).

<sup>†</sup> E-mail: faqwang@mail.xjtu.edu.cn