

## 具有多分界面的非线性电路中的非光滑分岔\*

张银 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2010年9月29日收到; 2010年10月18日收到修改稿)

本文分析了具有多分界面的非线性电路在不同时间尺度下的快慢动力学行为. 在一定的参数条件下, 系统的周期解为簇发解, 表现出明显的快慢效应. 根据状态变量变化的快慢, 把全系统划分为快子系统和慢子系统两组. 根据快慢分析法将慢变量看作快子系统的控制参数, 分析了快子系统的平衡点在向量场不同区域内的稳定性. 非光滑系统的分岔与向量场的分界面密切相关, 对于具有快慢效应的两时间尺度非光滑系统, 快子系统的分岔则取决于分界面两侧平衡点的性质. 通过在临界面引入广义 Jacobi 矩阵, 讨论了快子系统非光滑分岔的类型, 即多次穿越分岔 (multiple crossing bifurcation), 解释了全系统形成簇发现象的机理.

**关键词:** 非线性电路, 多分界面, 非光滑分岔, 快慢效应

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq

## 1. 引言

自蔡氏电路中的混沌现象被揭示以来, 非线性电路的理论和实验研究引起了各国学者的广泛关注, 成为当前电路研究中的热点课题之一<sup>[1-3]</sup>. 各种混沌和超混沌电路被设计出来, 人们通过建立数学模型, 结合实验方法探讨了其中的复杂动力学行为, 如环面破裂、间歇、超混沌、混沌危机等<sup>[4-6]</sup>. 在众多的混沌电路中, 蔡氏电路作为其中最具有代表性的一种, 其典型的电路结构已成为理论和实验研究混沌的一个范例. 在此基础上, 人们还进一步研究了蔡氏电路的其他形式. 在 Chua 和 Lin<sup>[7]</sup> 建立的三阶自治非线性电路的基础上, Stouboulos 等<sup>[8]</sup> 和 Koliopoulos 等<sup>[9]</sup> 应用蔡氏二极管替代非线性电阻建立了一个四阶自治非线性电路, 讨论了其中的混沌演化过程并解释了由危机引起的间歇现象. 值得指出的是, 在这些模型中, 所引入的电阻具有分段线性的电压和电流关系. 这种分段线性导致向量场的非光滑, 由于非光滑约束处的奇异性可产生复杂的分叉现象<sup>[10]</sup>.

迄今为止, 这些工作大多是基于单一的时间尺度, 即状态变量的变化速度基本相同或相近. 而许多实际模型却涉及到多时间尺度问题, 这种多时间尺

度因素不仅可以来自于真实时间上的快慢效应, 如各种反应速度的快慢, 同时也可能来自于几何尺寸上的尺度效应, 还有其他诸如反应系统结构效应、系统内部的物理效应等等<sup>[11]</sup>, 通过无量纲变化后, 在相应的数学模型中形成状态变量在变化速率上的量级差异<sup>[12]</sup>. 例如生物细胞中, 快速的代谢过程可以结合到很慢的遗传变化上, 同时其中层次组织的时间尺度也会从亚细胞到多细胞水平; 各种飞行器涉及到高速的旋转动力学与相对较慢的平移动力学的组合, 此类系统也可称为快慢系统. 一般的, 快慢系统的周期振荡经常表现为相对的较大幅值和较小幅值的复合振荡, 即复合式  $L^S$  振荡, 其中  $L$  和  $S$  分别对应于一个周期内大幅振荡和小幅振荡的个数. 从另一个角度讲, 大幅振荡和小幅振荡可以分别看做快慢系统的激发态 (spiking) 和沉寂态 (quiescent state), 这种连接两过程的行为通常也称为簇发 (bursting). 簇发现象在神经元模型中已被广泛认识<sup>[13]</sup>.

对于一般的快慢系统, Izhikevich 对低维情形下各种簇发现象及其分岔机理作了很好的总结<sup>[14]</sup>. 但是, 由于对该类系统的研究还处在初步阶段, 许多该类系统中存在的复杂现象及产生原因, 诸如周期增加分岔的机理, 不同子结构下非线性系统尺度效应的区别、非光滑系统中簇发现象的特点及其机

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10972091 和 10872080) 和江苏大学高级人才基金 (批准号: 10JDC062) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

理还没有被深刻地揭示,而且,有关真实电路系统中快慢效应的分析还较为少见. 基于这样的背景,我们分析探讨了具有多分界面的非线性电路在特定参数条件下的快慢动力学行为.

## 2. 多分界面非线性电路模型

在双涡卷混沌吸引子的基础上,利用相空间中

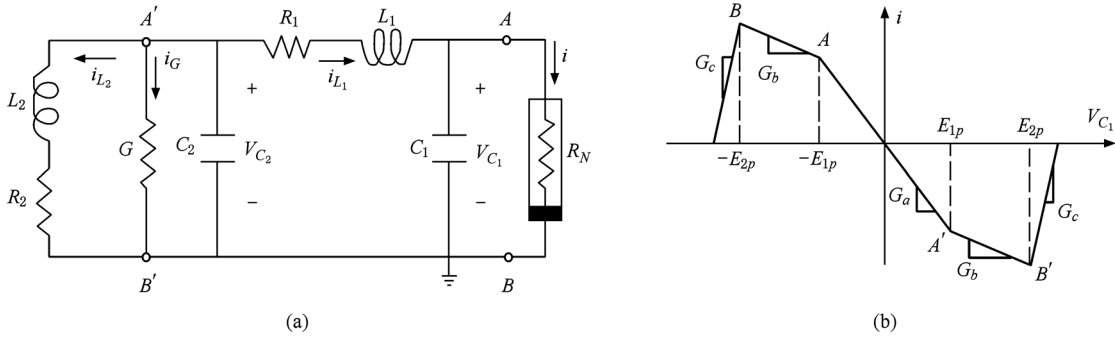


图1 (a) 四阶自治电路; (b) 非线性电阻  $R_N$  的电流  $i$  与电压  $v$  的关系

Stouboulos 等<sup>[8]</sup>根据伏安特性的多分段函数构造方法建立了四阶分段线性电路,其电路结构如图1(a)所示,其中,通过非线性电阻  $R_N$  的电流  $i$  与电压  $v$  成反对称的分段线性关系,如图1(b)所示. 其动力学行为可以由如下数学模型刻画:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C_1}}{dt} &= \frac{1}{C_1}(i_{L_1} - i), \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} &= -\frac{1}{C_2}(Gv_{C_2} + i_{L_1} + i_{L_2}), \\ \frac{di_{L_1}}{dt} &= \frac{1}{L_1}(v_{C_2} - v_{C_1} - i_{L_1}R_1), \\ \frac{di_{L_2}}{dt} &= \frac{1}{L_2}(v_{C_2} - i_{L_2}R_2), \end{aligned} \quad (1)$$

其中通过非线性电阻  $R_N$  的电流  $i$  表示为

$$\begin{aligned} i = g(v_{C_1}) &= G_2v_{C_1} + 0.5(G_0 - G_1) \\ &\times (|v_{C_1} + E_{1p}| - |v_{C_1} - E_{1p}|) \\ &+ 0.5(G_1 - G_2)(|v_{C_1} + E_{2p}| \\ &- |v_{C_1} - E_{2p}|). \end{aligned} \quad (2)$$

引入变换  $t = \sqrt{L_1 C_1} \tau$ ,  $v_{C_1} = x$ ,  $v_{C_2} = y$ ,  $i_{L_1} = z$ ,  $i_{L_2} = w$ , 设定  $E_{1p} = 1.47$  V,  $E_{2p} = 9.00$  V, 则(1)式可以转化为如下无量纲形式:

$$\frac{dx}{d\tau} = a[z - f(x)],$$

涡卷与键相轨间的关系,可以构造一个使蔡氏二极管的伏安特性为多个分段线性的奇函数<sup>[15]</sup>. 因此  $n$  涡卷混沌吸引子所对应的具有  $2n - 1$  个分段的线性函数  $g(v_{C_1})$  可表示为

$$\begin{aligned} g(v_{C_1}) &= G_{n-1}v_{C_1} + 0.5 \sum_{i=1}^{n-1} (G_{i-1} - G_i) \\ &\times (|v_{C_1} + E_i| - |v_{C_1} - E_i|). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= -b(Gy + z + w), \\ \frac{dz}{d\tau} &= c(y - x - R_1z), \\ \frac{dw}{d\tau} &= d(y - R_2w), \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{L_1 C_1}/C_1, b = \sqrt{L_1 C_1}/C_2, \\ c &= \sqrt{L_1 C_1}/L_1, d = \sqrt{L_1 C_1}/L_2, \\ f(x) &= G_2x + 0.5(G_0 - G_1)(|x + 1.47| \\ &- |x - 1.47|) \\ &+ 0.5(G_1 - G_2)(|x + 9.00| \\ &- |x - 9.00|). \end{aligned} \quad (4)$$

## 3. 系统的快慢动力学行为

为了对系统(3)的快慢动力学行为有一整体性的了解,先通过数值模拟来分析其在特定参数条件下的解的特点. 取定参数  $a = 10.5$ ,  $b = 10.62$ ,  $c = 9.88$ ,  $d = 0.005$ ,  $G = -0.5$ ,  $G_0 = -0.835$ ,  $G_1 = -0.515$ ,  $G_2 = 2.0$ ,  $R_1 = 0.0839$ ,  $R_2 = -0.3$ . 图2和图3分别表示的是系统(3)在上述参数条件下的动力学行为及其时间历程.

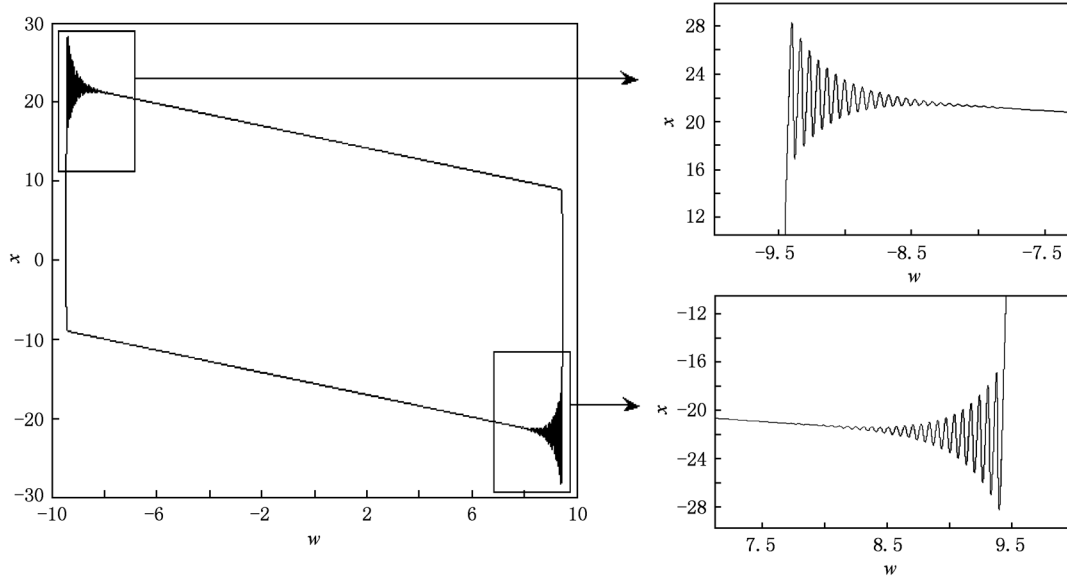


图2 系统(3)的相图

由图2可看出,在上述参数条件下,系统(3)作关于原点对称的周期振荡,并且从图3中相应的时间历程图可知,系统的四个状态变量中, $w$ 的振动频率是单一的,而 $x, y, z$ 均明显按照两个频率振荡,且较小的一个频率与 $w$ 的频率相同,系统具有显著的快慢效应.

系统的周期解形式对称是由向量场本身的对称性决定的. 而快慢效应则是由于在我们选取的参数中, $d$ 的量级明显小于其他参数,使得状态变量 $w$ 的变化相对缓慢. 也就是说,系统中存在着两种不同的时间尺度,即与状态变量 $x, y, z$ 相关的快时间尺度 $T_1$ 和与状态变量 $w$ 相关的慢时间尺度 $T_2$ . 根据状态变量变化的快慢,可以将全系统分为两组:快子系统 $(x, y, z)$ 和慢子系统 $(w)$ ,全系统则为两子系统的耦合系统. 图2所示的周期振荡即为这两个子系统相互作用下的复合模态解,即 $L^S$ 振荡,其中 $L$ 和 $S$ 分别代表一段时间内快慢两种振荡的次数,此振荡也可称为尖峰解(类似于神经元系统的spiking). Rinzel和Ermentrout提出了快慢分析法<sup>[16]</sup>,解释了神经元系统的簇发(bursting)现象,下面我们就用快慢分析法讨论该系统动力学行为的产生及其分岔机理.

#### 4. 非光滑分岔分析

非光滑系统不同于全局的光滑系统,根据向量场的非光滑程度可以将非光滑动力系统分为不同

的类型,系统(3)则属于连续非光滑系统,即其向量场连续而Jacobian矩阵不连续. 下面我们从非光滑分岔的角度,从理论上分析上述快慢效应即簇发解的产生机理.

为了分析簇发解的动力学行为机理,我们根据Rinzel和Ermentrout提出的快慢分析法<sup>[16]</sup>,将慢变量 $w$ 视为快子系统 $(x, y, z)$ 的分岔参数,慢变参数 $w$ 调节控制快子系统的行为. 我们首先分析子系统 $(x, y, z)$ 的平衡点的稳定性. 由于 $f(x)$ 的分段线性,快子系统 $(x, y, z)$ 的向量场存在四个临界面: $\Sigma_{1,2} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = \pm 1.47\}$ ,  $\Sigma_{3,4} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = \pm 9.00\}$ . 从而系统的状态空间被临界面划分成不同的子区域,在不同的区域内平衡点的表达形式及性质均有所不同.

当 $x \geq 9.00$ 时,

$$E_{2+} : \{ -H_1^{\pm}(GR_1 + 1) - H_2^{\pm}, -H_1^{\pm} - H_2^{\pm}(G_2R_1 + 1), H_1^{\pm}G - H_2^{\pm}G_2 \}.$$

当 $1.47 \leq x < 9.00$ 时,

$$E_{1+} : \{ -H_1^{\pm}(GR_1 + 1) - H_2^{\pm}, -H_1^{\pm} - H_2^{\pm}(G_1R_1 + 1), H_1^{\pm}G - H_2^{\pm}G_1 \}.$$

当 $-1.47 < x < 1.47$ 时,

$$E_0 : \{ -H_2^0, -H_2^0(G_0 + 1), -H_2^0G_0 \}.$$

当 $-9.00 < x \leq -1.47$ 时,

$$E_{1-} : \{ H_1^{\pm}(GR_1 + 1) - H_2^{\pm}, H_1^{\pm} - H_2^{\pm}(G_1R_1 + 1), -H_1^{\pm}G - H_2^{\pm}G_1 \}.$$

当 $x \leq -9.00$ 时,

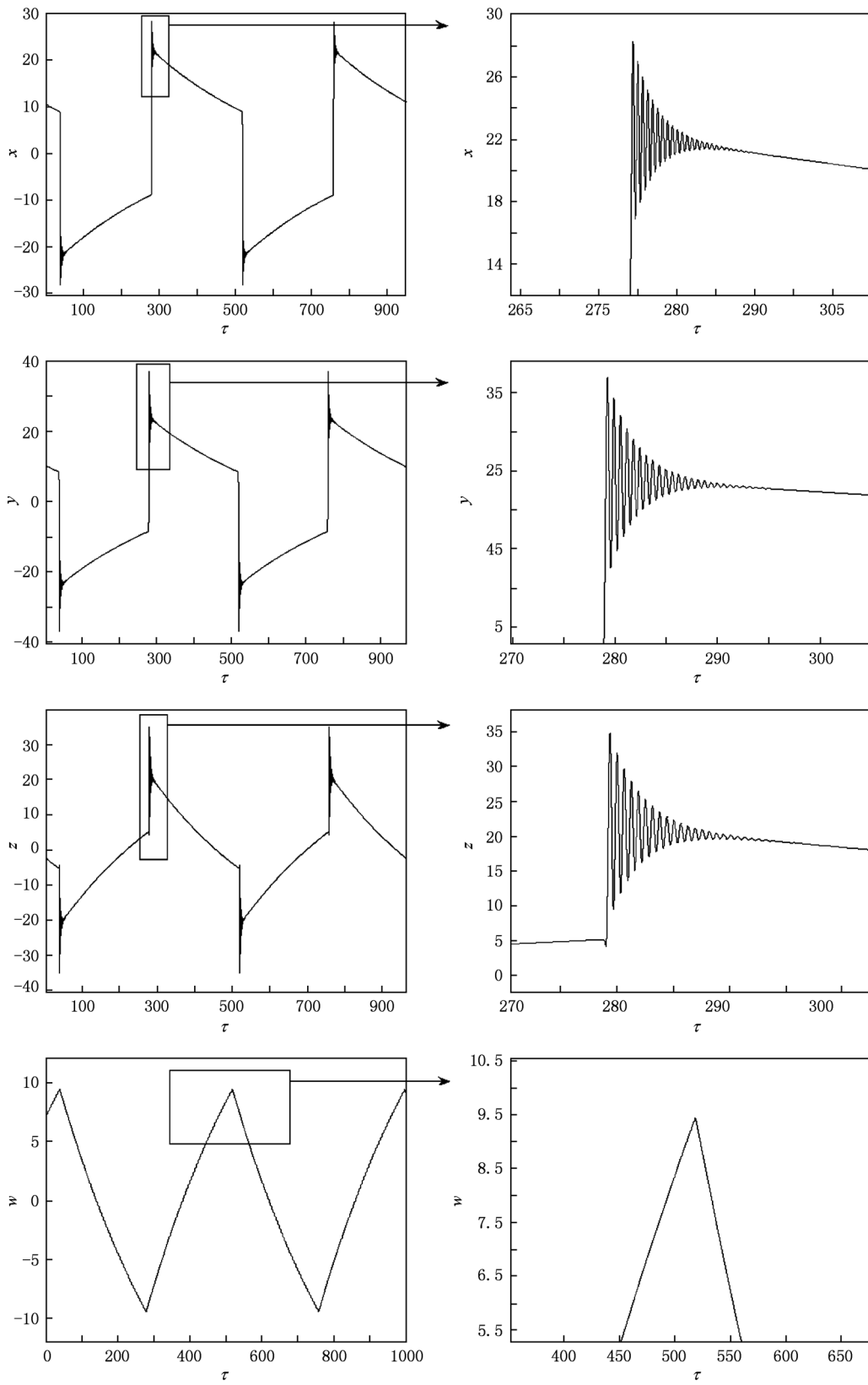


图3 系统(3)的时间历程

$$E_{2\pm} : \{ H_1^{2\pm}(GR_1 + 1) - H_2^{2\pm}, H_1^{1\pm} - H_2^{2\pm}(G_2R_1 + 1), -H_1^{1\pm}G - H_2^{2\pm}G_2 \}.$$

其中

$$H_2^0 = \frac{w}{G + G_0(GR_1 + 1)},$$

$$H_1^{1\pm} = \frac{1.47(G_0 - G_1)}{G + G_1(GR_1 + 1)},$$

$$H_2^{1\pm} = \frac{w}{G + G_1(GR_1 + 1)},$$

$$H_1^{2\pm} = \frac{1.47G_0 + 7.53G_1 - 9.00G_2}{G + G_2(GR_1 + 1)},$$

$$H_2^{2\pm} = \frac{w}{G + G_2(GR_1 + 1)},$$

$E_0, E_{1\pm}$  及  $E_{2\pm}$  的性质则由各自相应的 Jacobian 矩阵  $J_0, J_{1\pm}$  及  $J_{2\pm}$  所对应的特征值决定, 可表示为

$$J_0 = \begin{vmatrix} -aG_0 & 0 & a \\ 0 & -bG & -b \\ -c & c & -cR_1 \end{vmatrix},$$

$$J_{1\pm} = \begin{vmatrix} -aG_1 & 0 & a \\ 0 & -bG & -b \\ -c & c & -cR_1 \end{vmatrix},$$

$$J_{2\pm} = \begin{vmatrix} -aG_2 & 0 & a \\ 0 & -bG & -b \\ -c & c & -cR_1 \end{vmatrix}.$$

在之前给定的参数条件下,  $J_0, J_{1\pm}, J_{2\pm}$  及其特征值分别为

$$J_0 = \begin{vmatrix} 8.7675 & 0.0 & 10.5 \\ 0.0 & 5.31 & -10.62 \\ -9.88 & 9.88 & -0.8289 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1^0 = 7.1624,$$

$$\lambda_{2,3}^0 = 3.0431 \pm 13.8094i,$$

$$J_{1\pm} = \begin{vmatrix} 5.4075 & 0.0 & 10.5 \\ 0.0 & 5.31 & -10.62 \\ -9.88 & 9.88 & -0.8289 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1^{1\pm} = 5.3591,$$

$$\lambda_{2,3}^{1\pm} = 2.2647 \pm 14.11i,$$

$$J_{2\pm} = \begin{vmatrix} -21.0 & 0.0 & 10.5 \\ 0.0 & 5.31 & -10.62 \\ -9.88 & 9.88 & -0.8289 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_1^{2\pm} = -15.7972,$$

$$\lambda_{2,3}^{2\pm} = -0.3609 \pm 9.9313i.$$

由以上特征值可知, 快子系统  $(x, y, z)$  的平衡

点在  $|x| \geq 9.00$  时, 为渐近稳定的焦点, 当  $1.47 \leq |x| < 9.00$  时, 为不稳定的焦点, 并且在  $-1.47 < x < 1.47$  内, 也为不稳定的焦点, 即平衡点在临界面  $\Sigma_{3,4} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = \pm 9.00\}$  处失稳, 而在  $\Sigma_{1,2} = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = \pm 1.47\}$  处稳定性却保持不变. 下面我们着重分析系统在临界面处的分岔.

前面已经提到, 快子系统  $(x, y, z)$  是一个分段线性系统, 即非光滑系统, 其动力学特性不同于光滑动力系统, 分岔机理方面也有很大区别. 注意到  $(x, y, z)$  的向量场依然保持连续性, 我们可以利用广义 Clarke 导数在其临界面  $\Sigma_{1,2}$  与  $\Sigma_{3,4}$  处分别得到一个广义 Jacobi 矩阵  $J(\pm 1.47) = \{qJ_0 + (1-q)J_{1\pm}, \forall q \in [0, 1]\}$  与  $J(\pm 9.00) = \{qJ_{1\pm} + (1-q)J_{2\pm}, \forall q \in [0, 1]\}$  [17,18]. 取定参数条件后,  $J(\pm 1.47)$  与  $J(\pm 9.00)$  的特征值将是  $q$  的函数. 下面就以之前给定的参数条件为例, 讨论快子系统  $(x, y, z)$  的非光滑分岔.

图 4(a), (b) 分别给出了以  $q$  为参数时,  $J(\pm 1.47)$  与  $J(\pm 9.00)$  各自的特征根的在复平面内的分布曲线 (图中实线所示), 图中虚线为虚轴. 从 (a) 可以看出,  $J(\pm 1.47)$  的特征根的实部始终为正, 即其特征值曲线在复平面上与虚轴没有交点, 说明此时在分界面  $\Sigma_{1,2}$  处并未发生分岔. 而由 (b) 能够看到, 当  $q = 0.6684$  时,  $J(\pm 9.00)$  有一对纯虚根, 而当  $q = 0.5877$  时,  $J(\pm 9.00)$  则有一个零根, 即其特征值曲线在复平面上穿越原点. 该曲线表明, 此时在分界面  $\Sigma_{3,4}$  处发生的分岔为多次穿越分岔 (multiple crossing bifurcation) [17], 即  $J(\pm 9.00)$  的特征值曲线穿越虚轴多次. 也可将其看作两种光滑系统中的常见分岔——Hopf 分岔和转点分岔 (turning point bifurcation) 的复合分岔 [17].

下面就在已知分岔类型的基础上, 分析全系统  $(x, y, z, w)$  的簇发解的形成机理. 我们将慢变量  $w$  视为快子系统  $(x, y, z)$  的分岔参数, 由慢变参数调节控制系统的行为, 可以作出快子系统关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔图, 如图 5(a) 所示.

在图 5(a) 中, Z 形曲线表示快子系统关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔图, 它由三支组成, 即上支 (实线)、中支 (虚线, 由三个分段区间内的三段组成) 和下支 (实线), 其中, 实线表示稳定的焦点, 虚线表示不稳定的焦点.

为了进一步揭示簇发的本质, 我们将快子系统

关于慢变参数的平衡点分岔图与簇发轨迹进行叠加,如图 5(b)所示. 其中,  $A_1, A_2$  则表示分岔点,它们分别分布在临界线  $\Sigma_3$  和  $\Sigma_4$  上,  $B_1, B_2$  为相轨线分别与  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  的交点. 线条较粗的 Z 形曲线表示

快子系统的分岔图,而线条较细的 Z 形虚线  $w$ -nullcline 为慢变量  $w$  的零值线 ( $\dot{w} = 0$ ),它由系统五个分段区间内的五段组成,在零值线上支的上方(下支的下方),我们有  $\dot{w} > 0$  ( $\dot{w} < 0$ ).

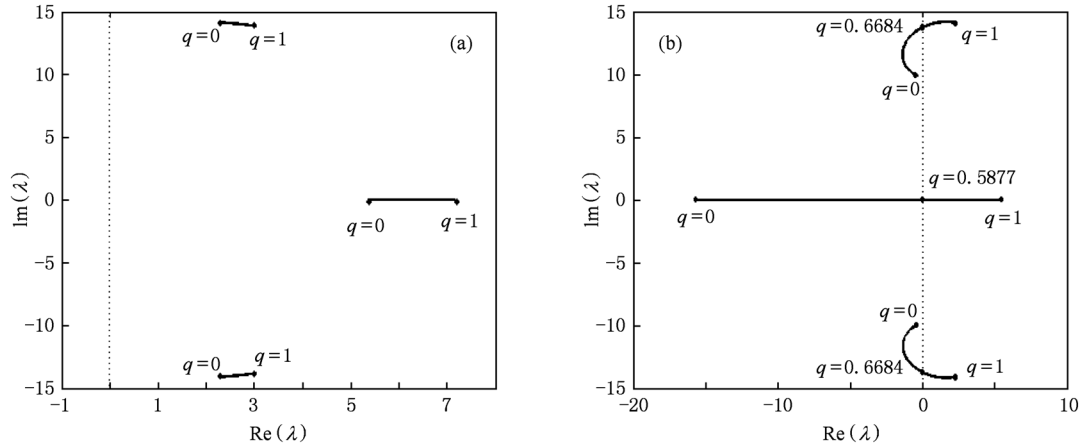


图 4 广义 Jacobi 矩阵的特征值曲线 (a)  $J(\pm 1.47)$  的特征值曲线; (b)  $J(\pm 9.00)$  的特征值曲线

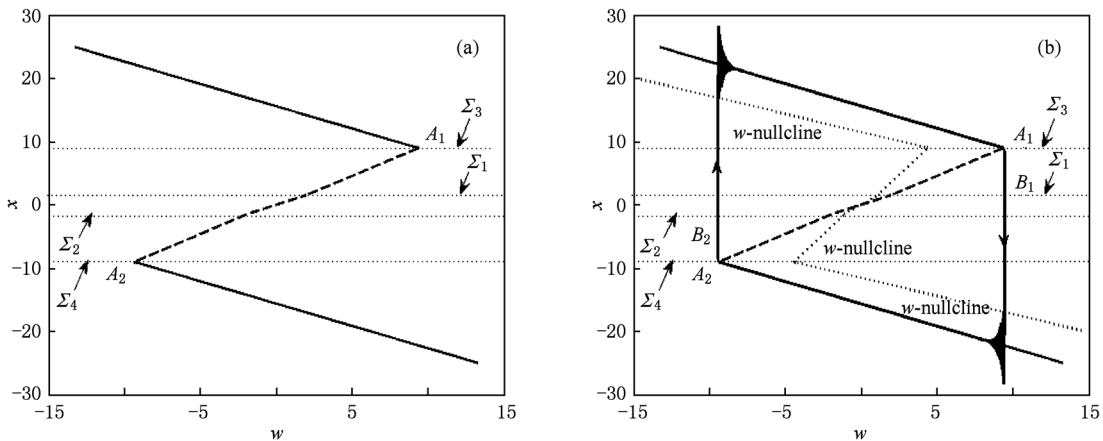


图 5 (a) 快子系统关于慢变参数  $w$  的平衡点分岔图; (b) 快子系统的分岔图与簇发轨迹的叠加 ( $w$ -nullcline 是慢变量  $w$  的零值线)

图 5(b) 中箭头表示轨迹的环绕方向,不妨以位于临界线  $\Sigma_1$  上的  $A_1$  点作为起点. 在  $A_1$  点右侧, Z 形曲线下支的稳定焦点是快子系统唯一的稳定吸引子,所以全系统的轨线将在该点处被稳定的焦点吸引,很快向 Z 形曲线的下半支跳跃. 由前面的分析可知,平衡点在临界面  $\Sigma_{1,2}$  处稳定性保持不变,系统向下跳跃穿越分界线  $\Sigma_{1,2}$  时并不发生分岔. 还应值得指出的是,系统继续向下跳跃中虽然穿越分界线  $\Sigma_4$ ,但此时并未发生分岔. 跳至下半支的稳定平衡点后,由于此时系统位于  $w$  的零值线  $w$ -nullcline 下支的下方,有  $\dot{w} < 0$ , 所以相轨迹向着  $w$  减小的方向运动,即沿着下半支实线向左运行.

当轨线运行至位于临界线  $\Sigma_4$  上的  $A_2$  点时,快子系统发生非光滑分岔. 而由前面的分析可知,此时的分岔是多次穿越分岔,平衡点经此分岔失稳. 而在  $A_2$  点左侧,快子系统唯一的吸引子即为 Z 形曲线上半支的稳定焦点,从而相轨迹在  $A_2$  点又被上半支的稳定焦点吸引,向上跳跃(穿越分界线  $\Sigma_2, \Sigma_1$  和  $\Sigma_3$  时同样不发生分岔). 很快跳至上半支后,系统又位于零值线  $w$ -nullcline 上支的上方,此时  $\dot{w} > 0$ , 所以轨线又向着  $w$  增大的方向运动,即向右运行. 当轨线运行至  $A_1$  点时,再次发生非光滑分岔,系统完成一个完整周期,开始下一周期的运动.

通过以上分析可知,在一个振荡周期内,快子

系统经历了两次平衡点稳定性的突变,且都发生在向量场的分界线( $\Sigma_{3,4}$ )处. 平衡点经非光滑分岔失稳后,相轨迹会被其它稳定的平衡点吸引,并迅速跳跃过去,这是一个相对快的过程. 当轨迹被吸引到稳定的平衡点后,随着慢变参数  $w$  的变化,沿着稳定平衡点曲线运行,这则是一个相对缓慢的过程. 即一个周期内包含两个快过程和两个慢过程,整个系统依此机理随着慢变量  $w$  的不断调节,在两个稳定焦点之间来回跳跃,形成对称的簇发解.

## 5. 结 论

针对多分界面的非线性电路,讨论了系统在

不同时间尺度下的快慢动力学行为. 多分界面的非线性电路是一个分段线性的系统,即非光滑系统. 运用快慢分析法,按照状态变量变化的快慢将全系统分为快慢两个子系统,结合其向量场的特点,分析了不同区域内快子系统平衡点的稳定性. 通过在向量场的临界线处引入广义 Jacobi 矩阵,确定了快子系统非光滑分岔的类型为多次穿越分岔(multiple crossing bifurcation). 从非光滑分岔的角度分析了系统簇发解形成的机理. 由于快子系统平衡点的稳定性会在临界线处经多次穿越分岔发生变化,全系统的相轨迹也在临界线处发生转折,并在慢变量  $w$  的调节下交替进行着不同时间尺度的快慢运动.

- 
- [1] Li G L, Chen X Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030507
  - [2] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2326 (in Chinese) [陈章耀、张晓芳、毕勤胜 2010 物理学报 **59** 2326]
  - [3] Zhang X F, Chen Z Y, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2963 (in Chinese) [张晓芳、陈章耀、毕勤胜 2010 物理学报 **58** 2963]
  - [4] Zhang H B, Xia J W, Yu Y B, Dang C Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030505
  - [5] Wang F Q, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 942
  - [6] Han X J, Jiang B, Bi Q S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 111 (in Chinese) [韩修静、江波、毕勤胜 2009 物理学报 **58** 6006]
  - [7] Chua L O, Lin G N 1990 *IEEE Trans Circ Syst.* **37** 885
  - [8] Stouboulos I N, Miliou A N, Valaristos A P 2007 *Chaos, Solutions & Fractals* **33** 1256
  - [9] Koliopoulos C L, Kyprianidis I M, Stouboulos I N 2003 *Chaos, Solutions & Fractals* **16** 173
  - [10] Ren H P, Li W C, Liu D 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030511
  - [11] Mease K D 2005 *Appl. Math. Comput.* **164** 627
  - [12] Xing Z C, Xu W, Rong H W, Wang B Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 0824 (in Chinese) [邢真慈、徐伟、戎海武、王宝燕 2009 物理学报 **58** 0824]
  - [13] Yang Z Q, Lu Q S 2008 *Sci. China Ser. G-Phys. Mech. Astron.* **51** 687
  - [14] Izhikevich E M 2000 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10** 1171
  - [15] Yu S M, Qiu S S 2003 *Science China E* **33** 365 (in Chinese) [禹思敏、丘水生 2003 中国科学(E辑) **33** 365]
  - [16] Rinzel J, Ermentrout, *Method in neuronal modeling* ed Koch C and Segev I (Cambridge: The MIT Press)
  - [17] Leine R I, Campen D H 2006 *European Journal of Mechanics A/Solids* **25** 595
  - [18] Ji Y, Bi Q S 2010 *Physics Letters A* **374** 1434

# Non-smooth bifurcation in nonlinear electrical circuits with multiple switching boundaries<sup>\*</sup>

Zhang Yin Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 29 September 2010; revised manuscript received 18 October 2010)

## Abstract

The fast-slow dynamics of a nonlinear electrical circuit with multiple switching boundaries is investigated in this paper. For suitable parameters, periodic bursting phenomenon can be observed. The full system can be divided into slow and fast subsystems because of the difference between variational speeds of state variables. According to the slow-fast analysis, the slow variable, which modulates the behavior of the system, can be treated as a quasi-static bifurcation parameter for the fast subsystem to analyze the stabilities of equilibrium points in different areas of vector field. The bifurcation is dependent on the switching boundary in the vector field. In particular, for the two-time scale non-smooth system with fast-slow effect, the bifurcation of fast subsystem is determined by the characteristics of equilibrium points on both sides of the switching boundary. Furthermore, the generalized Jacobian matrix at the non-smooth boundary is introduced to explore the type of non-smooth bifurcation (*i. e.*, multiple crossing bifurcation) in the fast subsystem, which can also be used to explain the mechanism for symmetric bursting phenomenon of the full system.

**Keywords:** nonlinear electrical circuits, multiple switching boundaries, non-smooth bifurcation, fast-slow effect

**PACS:** 05.45.Ac, 05.45.Pq

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10972091, 10872080) and the Senior Qualified Personal Foundation of Jiangsu University, China (Grant No. 10JDG062).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: qbi@ujs.edu.cn