

基于变分方法的混沌系统参数估计*

曹小群[†] 宋君强 张卫民 赵军 张理论

(国防科学技术大学计算机学院,长沙 410073)

(2010年10月8日收到;2010年10月18日收到修改稿)

提出一种基于变分原理的估计混沌系统未知参数的方法,对以 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 为控制方程的所有混沌系统具有普适性. 首先将混沌系统方程引入到目标泛函中;接着利用变分原理导出了混沌系统的伴随方程和待辨识参数泛函梯度的通用公式;然后设计了估计混沌系统未知参数的算法;最后对典型的 Lorenz 混沌系统和超混沌 Chen 系统的未知参数进行了估计. 数值仿真结果表明该方法是一种非常有效的估计混沌系统未知参数的方法.

关键词: 混沌系统, 参数估计, 变分方法, 伴随方程

PACS: 05.45.Pq, 04.20.Fy

1. 引言

自 Lorenz 于 1963 年发现第一个混沌吸引子后,混沌控制和同步广泛应用于保密通信、信息科学、化学和生命科学等领域,相应的理论和方法已经得到充分研究^[1-5]. 在混沌控制和同步领域,估计混沌系统的未知参数是一个具有重要现实意义的课题. 由于混沌系统的复杂性,某些参数经常无法测量或确定;或者出于某些特殊原因,系统的某些参数不可知,例如保密通信的要求. 因此为了实现混沌系统的控制或同步,首先必须对混沌系统的未知参数进行估计. 近几年研究人员不断提出估计混沌系统参数的新方法:文献[6]通过参数自适应方法对目标系统的参数进行估计,达到了广义同步的目的;文献[7]提出了未知参数辨识观测器的概念,并对 Lorenz 系统的参数进行了辨识;文献[8]基于遗传算法对混沌系统进行参数估计,并以典型的 Lorenz 系统为例进行了研究;文献[9]基于具有群集智能的改进粒子群优化算法成功估计了混沌系统的参数;文献[10]和[11]分别基于混沌蚂蚁群算法和混合差分进化算法的全局优化搜索的能力,对混沌系统进行了参数估计.

混沌系统的参数估计问题是动力系统研究中典型的反问题,和正问题不同,它是通过试验或运

行中的观测数据来反求模型中的未知参数. 由于测量信息的不准确、不充分和系统自身的非线性等性质,导致反问题的求解经常是不适定的. 即解不一定存在、即使解存在也不唯一、在解存在唯一条件下也不稳定(即解不连续依赖于观测数据)^[12]. 因此混沌动力系统参数估计问题的求解必须采用特殊方法^[6-11]. 本文基于变分原理^[12-16]来估计混沌系统的未知参数,该方法对以 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 为控制方程的所有混沌系统具有普适性. 首先利用拉格朗日乘子(最后转化为伴随量)将混沌系统控制方程引入到目标泛函中,将原来以混沌系统微分方程组为约束的最优化问题转换为无约束最优化问题;接着利用变分原理导出混沌系统的伴随方程和目标泛函关于待辨识参数的梯度;然后给出了变分方法估计混沌系统未知参数的算法流程. 最后对典型 Lorenz 混沌系统和超混沌 Chen 系统^[17]的未知参数进行了估计,数值仿真结果表明该方法具有很高的估计精度,同时具有较好的抗噪声性能. 需要说明的是,本文主要应用 Lagrange 乘子法来解决问题,但正如 He^[18-22]所指出的,对复杂系统 Lagrange 乘子法可能会失效;而且在识别拉氏乘子时,拉氏乘子是独立变分的,而在识别后它却是其他变量的函数,将产生临界变分^[20]. 为了克服临界变分现象,He 提出了一种新的理论——半反推方法(semi-inverse method)^[18-22],可以方便地构造多变量的广

* 国家自然科学基金(批准号:40775064,40505023)资助的课题.

[†] E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn

义变分原理,在众多领域^[18-24]已经有非常成功应用.因此,采用 He 提出的半反推方法^[18-22]可取得更好的效果,这是以后需要进一步开展的工作.

2. 问题描述

考虑如下 n 维混沌系统的参数识别问题:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \\ \mathbf{x}|_{t=0} &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ 表示混沌系统的状态向量, \mathbf{x}_0 表示系统状态初值, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in R^m$ 表示混沌系统中需要估计的物理参数向量. 目标是利用混沌系统状态的测量数据估计不可测的未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$. 假设混沌系统的结构已知,即矢量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = (f_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), f_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \dots, f_n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}))^T$ 的表达式是已知的,要对混沌系统的待辨识参数进行估计,则可以通过对下面的目标泛函进行最小化而获得

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}}\|^2 dt, \quad (2)$$

其中 $[0, T]$ 表示混沌系统状态观测量 \mathbf{x}^{obs} 所分布的时间区间, \mathbf{x} 表示混沌系统在参数估计值下演化时系统的状态变量. 显然,混沌系统的参数估计问题变成在微分方程系统(1)约束下的目标泛函的最优化问题,决策变量为 $\boldsymbol{\theta}$, 优化目标为最小化 J . 但是,由于混沌系统的强非线性和不稳定性,系统参数很难估计;另外,目标泛函 $J(\boldsymbol{\theta})$ 中存在许多局部极值点,以上原因使准确计算目标泛函关于决策变量 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度变得非常重要. 下面利用变分方法准确获得目标泛函关于决策变量的梯度向量 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J = (\nabla_{\theta_1} J, \nabla_{\theta_2} J, \dots, \nabla_{\theta_m} J)^T$ 表达式及计算梯度需要的伴随方程.

3. 混沌系统参数估计的变分方法

首先引入随时间变化的拉格朗日乘子向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))^T \in R^n$, 将以微分方程为约束条件的最优化问题转化为如下形式的无约束最优化问题:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \int_0^T \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}}\|^2 dt \\ &+ \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T \cdot [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] dt, \end{aligned} \quad (3)$$

(3)式的一阶变分为

$$\begin{aligned} \delta J(\boldsymbol{\theta}) &= \int_0^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}})^T \cdot \delta \mathbf{x} dt \\ &+ \int_0^T \delta \boldsymbol{\lambda}^T \cdot [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] dt \\ &+ \int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T \cdot [\delta \dot{\mathbf{x}} - \delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})] dt, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\delta \mathbf{x}$ 和 $\delta \boldsymbol{\lambda}$ 分别表示混沌系统状态向量和拉格朗日乘子向量的一阶变分. 而目标泛函 $J(\boldsymbol{\theta})$ 和矢量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 的一阶变分按定义可以进一步写为

$$\begin{aligned} \delta J(\boldsymbol{\theta}) &= (\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \\ \delta \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \delta \mathbf{x} \\ &+ \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (5)$$

对于 $\int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} dt$ 进行分部积分有

$$\int_0^T \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} dt = (\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}) \Big|_0^T - \int_0^T \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \cdot \delta \mathbf{x} dt. \quad (6)$$

将(5)式和(6)式代入(4)式,通过合并同类项,而且由于一阶变分 $\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\lambda}$ 和 $\delta \boldsymbol{\theta}$ 可以取任意值,因此可以得到下面的等式方程组:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= 0, \\ -\dot{\boldsymbol{\lambda}} - \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda} + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{obs}}) &= 0, \\ \nabla_{\boldsymbol{\theta}} J &= - \int_0^T \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T \cdot \boldsymbol{\lambda} dt, \\ (\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}) \Big|_0^T &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

式中的第一个表达式就是原混沌系统的微分方程组. 第二个表达式称为原混沌系统控制方程的伴随方程组,开始引入的拉格朗日乘子向量成为了随时间变化的伴随向量;从表达式中不难看出,伴随方程的求解需要预先获得混沌系统的演化轨迹 $\mathbf{x}(t)$, 同时 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ 前面的负号表示需要对伴随方程在时间上从 T 到 0 进行逆向积分. 而伴随方程的初值条件可以按照以下方法来确定,由(7)中的第四个表达式有 $(\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}) \Big|_0^T = (\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}) \Big|_{t=T} - (\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}) \Big|_{t=0} = 0$;而混沌系统(1)的初值条件 $\mathbf{x} \Big|_{t=0} = \mathbf{x}_0$ 是固定不变的,因此有 $\delta \mathbf{x} \Big|_{t=0} = 0$, 即 $(\boldsymbol{\lambda}^T \cdot \delta \mathbf{x}) \Big|_{t=0} = 0$. 而 $\delta \mathbf{x} \Big|_{t=T} \neq 0$, 所以

$$\boldsymbol{\lambda} \Big|_{t=T} = 0 \quad (8)$$

必须成立,由此得到伴随方程的初值条件. (8)式类似于 Hamilton 原理中的终值条件,这给处理问题很不方便;如果以后使用 He 提出的半反推方法^[18-22],可以消除该困难. 实际上 $\boldsymbol{\lambda}(T)$ 的值为常数时也可以. (7)式中的第三个表达式是目标泛函

关于未知参数向量梯度的表达式,易知梯度的计算需要首先求解混沌系统微分方程及其伴随方程,得到状态量和伴随量的演化轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(t)$. (7) 式中的第二个和第三个表达式对以 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ 为控制方程的所有混沌系统具有普适性,是获得伴随方程和目标泛函梯度的通用公式. 在待辨识物理参数的泛函梯度求出之后,可以选择合适的下降算法(如,拟牛顿算法和共轭梯度算法),按照下式对各个未知参数进行迭代:

$$\theta_j^{i+1} = \theta_j^i - \nabla_{\theta_j} J |_{\theta^i} \cdot \rho_j^{i+1}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (9)$$

最终可以获得混沌系统的未知参数值. 当 $i = 0$ 时 θ^i 代表未知参数向量的初始猜测值; ρ_j^{i+1} , ($j = 1, 2, \dots, m$) 表示第 i 次迭代步长,其具体大小由下降算法决定. 变分方法估计混沌系统的未知参数的具体流程如图 1 所示,详细说明如下:

第一步 设定各个未知物理参数的初始猜测值.

第二步 利用新的猜测值,对混沌系统模式(1)进行正向积分,获得系统状态量的演化轨迹 $\mathbf{x}(t)$ 并加以存贮.

第三步 利用 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{x}^{\text{obs}}(t)$ 根据(2)式计算目标泛函 $J(\boldsymbol{\theta})$ 的值.

第四步 利用 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}^{\text{obs}}(t)$ 和伴随初值条件,对伴随模式从 $t = T$ 到 $t = 0$ 进行反向积分,求得伴随向量的演化轨迹 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 并加以存贮.

第五步 利用 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 按照(7)式中第三个表达式求各未知参数的泛函梯度值.

第六步 利用标准下降算法,求出步长 ρ_j^{i+1} , 根据(9)式对各未知参数进行迭代,求出新估计值. 如果满足程序终止条件(如达到所要求的收敛精度或是虽未达到此精度,但迭代次数已达到预先指定的最大迭代次数),则终止程序,同时获得混沌系统的参数估计值;若不满足,利用新的物理参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 值从第二步开始进行新一轮的迭代循环.

4. 数值仿真结果及分析

4.1. Lorenz 混沌系统参数的估计

首先以典型的 Lorenz 混沌系统为例,说明利用变分方法对混沌系统的未知参数进行估计的有效性. Lorenz 系统可由如下的常微分方程组表示:

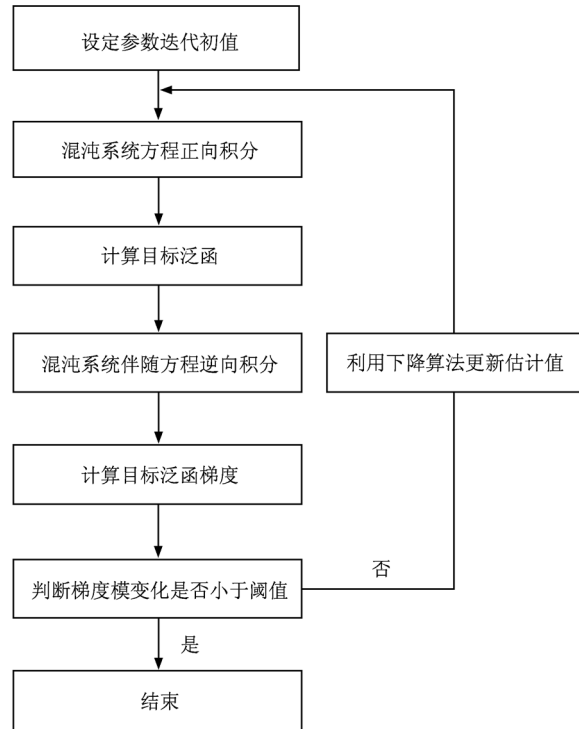


图 1 变分方法估计混沌系统参数的流程图

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \gamma x - xz - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (10)$$

系统(10)的一个简单物理实现是在下方加热而在上方冷却时热对流管中的环流. 其中 x 表示流体速度, y 和 z 分别为水平和垂直温差; σ 和 γ 分别与流体的 Prandtl 数和 Rayleigh 数成比例, b 是与空间相关的常数. 设定状态向量 $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ 和物理参数向量 $\boldsymbol{\theta} = (\sigma, \gamma, b)^T$, 且 $\boldsymbol{\theta}$ 是未知的. 目标是在获得状态向量 \mathbf{x} 的观测量 $\mathbf{x}^{\text{obs}} = (x^{\text{obs}}, y^{\text{obs}}, z^{\text{obs}})^T$ 的情况下,估计未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$. 通过比较(10)式与(1)式,易知 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = [\sigma(y - x), \gamma x - xz - y, xy - bz]^T$, 其一阶变分表达式为

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma & \gamma - z & y \\ \sigma & -1 & x \\ 0 & -x & -b \end{pmatrix}^T \cdot \delta \mathbf{x} \\ &\quad + \begin{pmatrix} y - x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix}^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $\delta \mathbf{x} = (\delta x, \delta y, \delta z)^T$, $\delta \boldsymbol{\theta} = (\delta \sigma, \delta \gamma, \delta b)^T$. 引入与 \mathbf{x} 对应的伴随向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$, 并将 \mathbf{x} ,

$\mathbf{x}^{\text{obs}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\theta}, \frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}}$ 和 $\frac{\partial F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ 的表达式代入(7)式中的第二式和第三式,同时利用伴随边界条件(8),分别得到 Lorenz 混沌系统的伴随方程和目标泛函关于未知参数的梯度公式如下:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= -\sigma\lambda_1 + (\gamma - z)\lambda_2 + y\lambda_3 - (x - x^{\text{obs}}), \\ -\dot{\lambda}_2 &= \sigma\lambda_1 - \lambda_2 + x\lambda_3 - (y - y^{\text{obs}}), \\ -\dot{\lambda}_3 &= -x\lambda_2 - b\lambda_3 - (z - z^{\text{obs}}), \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{t=T} &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} J &= -\int_0^T (y - x)\lambda_1 dt, \\ \nabla_{\gamma} J &= -\int_0^T x\lambda_2 dt, \\ \nabla_b J &= \int_0^T z\lambda_3 dt. \end{aligned} \quad (13)$$

数值仿真试验中各个物理参数的真值设置如下: $\sigma = 10, \gamma = 28$ 和 $b = 8/3$, 此时 Lorenz 系统呈现混沌现象. 采用四阶龙格-库塔算法求解 Lorenz 混沌系统常微分方程组(10), 积分步长设置为 $h = 0.01$. Lorenz 混沌系统伴随方程的数值模式可以直接对连续伴随方程(12)进行离散得到, 本文中由于考虑到混沌系统对误差的敏感性, 采用理论推导的方式求得 Lorenz 系统离散模式所对应的伴随模式, 积分步长与正模式相同. 观测数据的采集过程如下: 先让 Lorenz 系统自由演化, 在经历暂态过程之后任取混沌状态的某一点作为初值, 并以此时刻作为初始时刻, 然后任其演化至 Th 时刻, 可得到 Lorenz 系统在离散时间序列 $\{0, h, 2h, \dots, Th\}$ 上的标准状态 $(x(t_i), y(t_i), z(t_i)), i = 0, 1, 2, \dots, T$, 而且这些状态量都处于系统的混沌状态. 本文中模式初始状态量 (x_0, y_0, z_0) 取为 $(-0.2028, 2.5418, 24.0873)$, 是 Lorenz 系统混沌状态中一点. 以该状态为初值, 设定时间积分区间为 $[0, 1]$ (单位为 s), 然后对模式进行积分, 就可以得到系统在离散时间序列 $0, 1h, 2h, \dots, 100h$ 上的标准状态变量值. 试验中只抽取 $5h, 10h, \dots, 100h$ 时刻的状态量作为 $N = 20$ 个观测数据, 然后可在所选状态量上叠加高斯随机数作为观测噪声, 观测噪声的均值取为 0、标准偏差取为 σ_0 . 观测量可以表示为 $\mathbf{x}_i^{\text{obs}} = (x^{\text{obs}}(t_i), y^{\text{obs}}(t_i), z^{\text{obs}}(t_i))^T, i = 1, 2, \dots, N$. 离散形式的目标泛函表示如下:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^{\text{obs}}\|^2, \quad (14)$$

式中 N 表示观测数量, $\|\cdot\|^2$ 表示欧几里得范数, 这

里有 $\|\mathbf{x}_i\|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$. 在获得 Lorenz 混沌系统离散形式的正模式、伴随模式、目标泛函及其梯度表达式后, 利用标准下降算法可以对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行最优估计, 未知参数的迭代初值设定为 $\boldsymbol{\theta}^0 = (7.0, 23.0, 1.8)$. 在对 Lorenz 混沌系统未知参数进行变分迭代估计过程中, 未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的每次更新, 都要对 Lorenz 离散模式进行一次正向 ($0 \rightarrow T$) 数值积分, 以便计算目标泛函 $J(\boldsymbol{\theta})$ 的大小; 同时对 Lorenz 离散伴随模式进行一次逆向 ($T \rightarrow 0$) 数值积分, 以便计算目标泛函梯度 $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} J$ 的值.

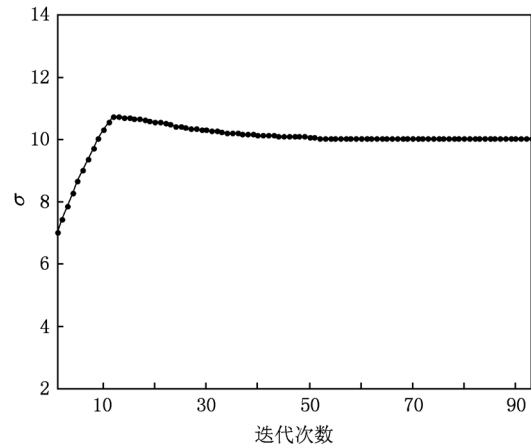


图2 参数 σ 的辨识结果曲线图

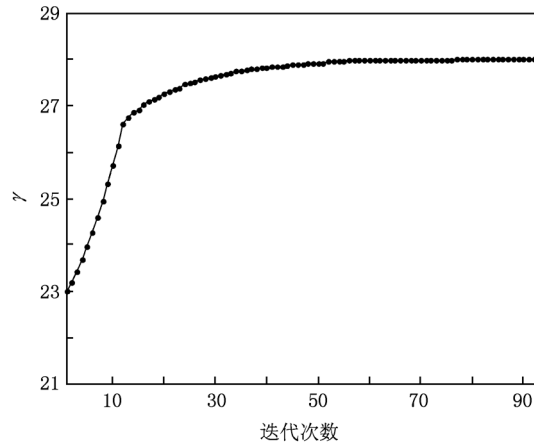


图3 参数 γ 的辨识结果曲线图

利用图 1 中的算法流程可以得到 $\boldsymbol{\theta} = (\sigma, \gamma, b)^T$ 的迭代估计序列值, 图 2, 3, 4 和 5 显示了在不存在观测噪声 (即 $\sigma_0 = 0$) 时的仿真结果. 图 2, 3, 4 显示的是各个未知参数在迭代估计过程中值的变化; 图 5 表示的是目标泛函值的下降图. 从图中可以看到, 未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 在经历 43 次迭代后已经非常

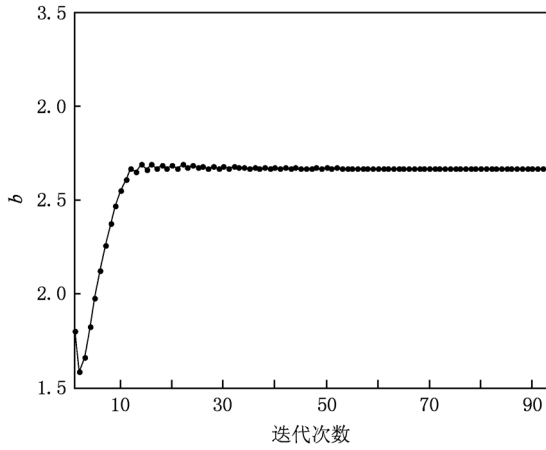


图4 参数 b 的辨识结果曲线图

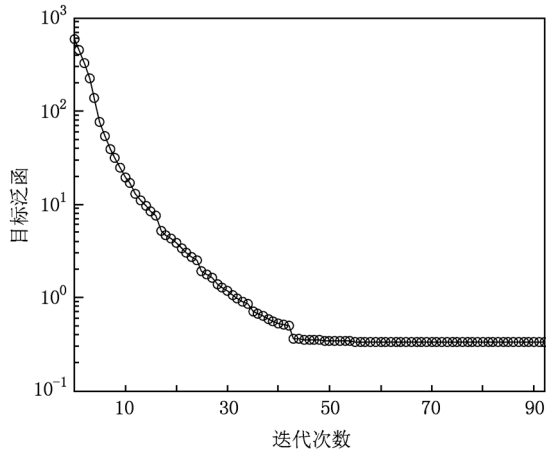


图5 目标泛函 $J(\theta)$ 收敛曲线图

接近真实值,同时目标泛函基本上不再下降.理论上当目标泛函关于未知参数的梯度模 $\|\nabla_{\theta} J\| = 0$ 时,未知参数向量取最优估计值,但本文中为了减小计算量,采用的是通常的迭代收敛标准:前后两次迭代的目标泛函梯度模的变化小于预先指定的阈值: $\|\nabla_{\theta_j} J\| - \|\nabla_{\theta_{j+1}} J\| < 10^{-5}$, 此时的计算误差小于机器误差,可以忽略.虽然目标泛函的值下降较小,但梯度模仍在减小,经过92次迭代后,目标泛函达到收敛;得到各个参数的估计值: $\sigma = 9.9998, \gamma = 28.0003$ 和 $b = 2.6667$. 分析图中所示的试验结果可得如下结论:采用变分方法估计 Lorenz 混沌系统的未知参数具有较高的准确性,所有参数的估计精度达到了 $O(10^{-4})$. 另外变分方法的优势是通过伴随方程能够准确的计算出目标泛函梯度,因此使目标泛函能快速下降,只经过43次迭代估计值就非常接近真实值.表1给出了在不同

观测噪声水平情况下变分方法对 Lorenz 混沌系统的未知参数估计结果,从表中可以看出,在不存在观测误差时,未知参数的估计精度最高,各个参数的估计结果可以精确到小数点后第三位,表明了变分方法估计混沌系统未知参数的有效性.从表1中可以看出,随着误差增加,参数的估计精度下降,但迭代估计结果仍然收敛到真值附近;即使当观测误差的标准偏差为 $\sigma_o = 0.2$ 时,未知参数的估计结果仍然非常接近真实值,可以精确到小数点后1位,说明变分方法具有较好的抗噪声性能.另外,还可以从表1中归纳出另外一个特点:当不存在观测误差时,迭代收敛时的目标泛函值基本上为0;随着观测误差的增加,一方面达到收敛时需要的迭代次数增多,另外一方面收敛时的目标泛函值增大.

表1 不同观测噪声水平情况下 Lorenz 混沌系统的参数估计结果

	σ	γ	b	$J(\theta)$	迭代次数
真值	10.0	28.0	8/3	—	—
$\sigma_o = 0.0$	9.9998	28.0003	2.6667	3.310×10^{-8}	92
$\sigma_o = 0.1$	10.0053	28.0083	2.6770	0.2100	105
$\sigma_o = 0.2$	10.0182	27.9747	2.6625	1.2232	123

4.2. 超混沌 Chen 系统参数的估计

本部分中以典型的超混沌 Chen 系统^[17]为例,进一步说明利用变分方法对混沌系统的未知参数进行估计的有效性.超混沌 Chen 系统可用常微分方程组表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= dx - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= yz + \gamma w, \end{aligned} \tag{15}$$

当 $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$ 和 $\gamma = 0.5$ 时,系统处于超混沌状态.状态向量和物理参数向量分别表示为 $\mathbf{x} = (x, y, z, w)^T$ 和 $\boldsymbol{\theta} = (a, b, c, d, \gamma)^T$. 目标是在获得状态向量 \mathbf{x} 的观测量 $\mathbf{x}^{obs} = (x^{obs}, y^{obs}, z^{obs}, w^{obs})^T$ 的情况下,估计未知参数向量 $\boldsymbol{\theta}$. 由(15)式与(1)式对比可知, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) = [a(y - x) + w, dx - xz + cy, xy - bz, yz + \gamma w]^T$, 其一阶变分表达式为

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) &= \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \cdot \delta \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \\ &= \begin{pmatrix} -a & (d - z) & y & 0 \\ a & c & x & z \\ 0 & -x & -b & y \\ 1 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^T \cdot \delta \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} (y-x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}^T \cdot \delta\theta, \quad (16)$$

其中 $\delta x = (\delta x, \delta y, \delta z, \delta w)^T$ 和 $\delta\theta = (\delta a, \delta b, \delta c, \delta d, \delta\gamma)^T$ 分别是 x 和 θ 的一阶变分. 引入随时间变化的伴随向量 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$, 并将 $x, x^{obs}, \lambda, \theta$, $\frac{\partial F(x, \theta)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial F(x, \theta)}{\partial \theta}$ 的表达式代入(7)式中的第二式和第三式, 同时利用伴随边界条件(8), 分别得到超混沌 Chen 系统的伴随方程和目标泛函关于未知参数的梯度表达式如下:

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_1 &= -a\lambda_1 + (d-z)\lambda_2 + y\lambda_3 - (x - x^{obs}), \\ -\dot{\lambda}_2 &= a\lambda_1 + c\lambda_2 + x\lambda_3 + z\lambda_4 - (y - y^{obs}), \\ -\dot{\lambda}_3 &= -x\lambda_2 - b\lambda_3 + y\lambda_4 - (z - z^{obs}), \\ -\dot{\lambda}_4 &= \lambda_1 + \gamma\lambda_4 - (w - w^{obs}), \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \Big|_{t=T} &= 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \nabla_a J &= - \int_0^T (y-x)\lambda_1 dt, \\ \nabla_b J &= \int_0^T z\lambda_3 dt, \\ \nabla_c J &= - \int_0^T y\lambda_2 dt, \\ \nabla_d J &= - \int_0^T x\lambda_2 dt, \\ \nabla_\gamma J &= - \int_0^T w\lambda_4 dt. \end{aligned} \quad (18)$$

仿真试验中同样采用四阶龙格-库塔算法数值求解常微分方程(15)式, 步长设置为 $h = 0.01$. 伴随方程组(17)的离散求解和观测数据的采集过程采用与4.1中估计 Lorenz 系统未知参数相同的方法. 在数值试验中, 模式初始状态量 (x_0, y_0, z_0, w_0) 取为 $(-2.4282, -5.5360, 12.6925, 64.0595)$, 其是超混沌 Chen 系统混沌状态中一点. 目标泛函采用与(14)式相同的形式, $x_i^{obs} = (x^{obs}(t_i), y^{obs}(t_i), z^{obs}(t_i))^T$ 表示状态量 $x = (x, y, z, w)^T$ 的第 i 个观测量, 欧几里得范数表示为 $\|x_i\|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + w_i^2$. 在获得超混沌 Chen 系统的数值模式、伴随数值模式和目标泛函及其梯度表达式后, 利用图1中给出的算法流程可以对 θ 进行最优估计. 未知参数的迭代初值设定为: $\theta^0 = (30.0, 1.0, 8.0, 10.0, 1.5)$. 在对超混沌 Chen 系统未知参数进行变分迭代估计过程中, 未知参数向量 θ 的每次更新, 都要对超混沌

Chen 系统的离散模式进行一次正向 ($0 \rightarrow T$) 数值积分, 以便计算目标泛函的大小; 同时对超混沌 Chen 系统的离散伴随模式进行一次逆向 ($T \rightarrow 0$) 数值积分, 从而计算目标泛函关于未知向量的梯度的值.

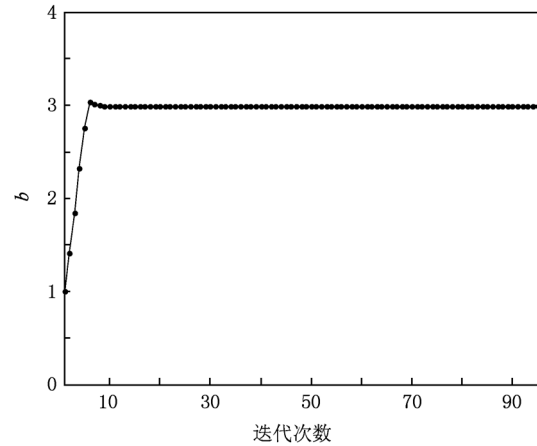


图6 参数 b 的辨识结果曲线图

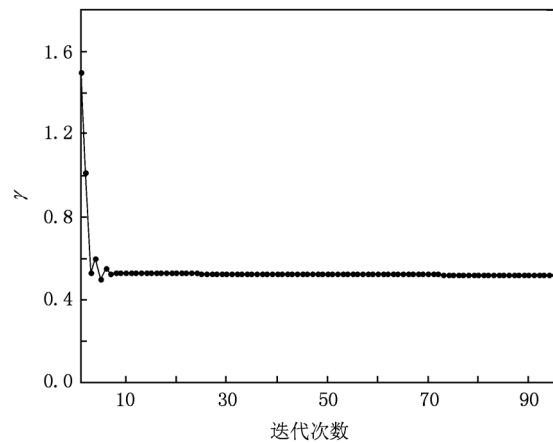


图7 参数 gamma 的辨识结果曲线图

表2 不同观测噪声水平情况下超混沌 Chen 系统的参数估计结果

	a	b	γ	$J(\theta)$	迭代次数
真值	35.0	3.0	0.5	—	—
$\sigma_o = 0.0$	35.0005	2.9993	0.4997	1.550×10^{-7}	95
$\sigma_o = 0.1$	35.0057	3.0086	0.4952	0.5001	110
$\sigma_o = 0.2$	35.0605	2.9844	0.4839	1.8447	125

图6和图7中给出了不存在观测噪声时未知参数 b 和 γ 的迭代估计序列值; 图8和图9分别表示的是目标泛函 $J(\theta)$ 和泛函梯度模 $\|\nabla_{\theta} J\|$ 的下降图. 从图中可以看到, 未知参数向量 θ 在经历不到

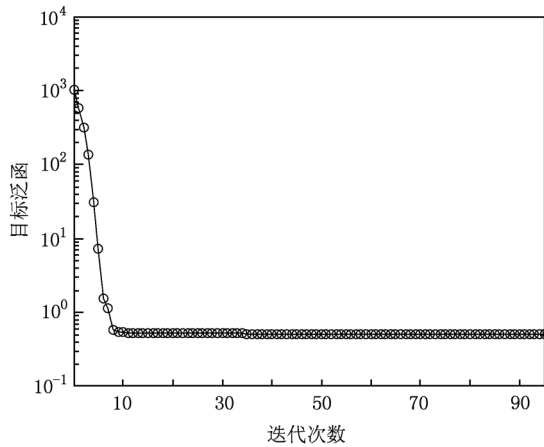


图8 目标泛函 $J(\theta)$ 收敛曲线图

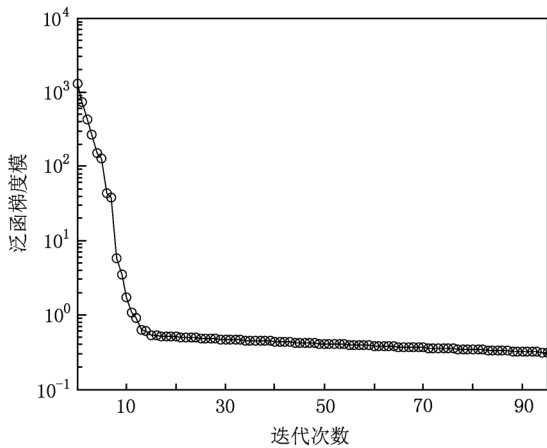


图9 泛函梯度模的变化图

20 次迭代后已经非常接近真实值,同时目标泛函基本上不再下降. 虽然目标泛函的值下降较小,但泛函梯度模仍在减小,经过 95 次迭代后,目标泛函达到收敛;得到各个参数的估计值: $a = 35.0005, b = 2.9993, c = 12.0005, d = 7.0009$ 和 $\gamma = 0.4997$. 参数 a, c 和 d 具有与图 6 和图 7 类似的结果,受篇幅限制没有给出. 分析图中所示的试验结果可得如下结论:采用变分方法估计超混沌 Chen 系统的未知参数具有较高的准确性. 另外变分方法的优势是通过伴随方程能够准确的计算出目标泛函梯度,因此使目标泛函快速下降. 表 2 中给出了在不同观测噪声水平情况下变分方法对超混沌 Chen 系统中未知参

数进行估计的部分结果,另外两个参数具有相同的估计精度,这里不再给出. 从表中可以看出,在不存在观测误差时,未知参数的估计精度最高,各个参数的估计结果可以精确到小数点后第三位,基本上可以当作真值使用;随着误差增加,参数的估计精度下降,但迭代估计值仍然收敛到真值附近,进一步验证了变分方法估计混沌系统未知参数的有效性. 从表 2 中可以看出,即使当观测误差的标准偏差为 $\sigma_0 = 0.2$ 时,未知参数的估计结果仍然非常接近真实值,可以精确到小数点后 1 位,说明变分方法具有较好的抗噪声性能. 另外,从表 2 中可归纳出一个特点:当不存在观测误差时,迭代收敛时的目标泛函值基本上为 0;随着观测误差的增加,达到收敛时的计算开销和目标泛函值都有所增大.

5. 结 论

本文利用变分方法^[12-16]来解决混沌系统中未知参数的估计问题. 首先引入拉格朗日乘子向量将混沌系统状态控制方程引入到目标泛函中,将原来以混沌系统微分方程组为约束的最优化问题转换为无约束最优化问题;接着利用变分原理导出了混沌系统的伴随方程和目标泛函关于待估计参数梯度的通用公式;然后给出了变分方法估计混沌系统未知参数的算法流程. 最后对典型 Lorenz 混沌系统和超混沌 Chen 系统的未知物理参数进行了估计,数值仿真结果验证了方法的有效性. 主要结论归纳如下:1) 变分方法对以 $\dot{x} = F(x, \theta)$ 为控制方程的所有混沌系统具有普适性,利用文中给出的伴随方程和目标泛函梯度的通用表达式,能够方便地估计出混沌系统中的未知参数. 2) 在不存在观测噪声时方法具有很高的估计精度;当存在观测误差时,迭代估计值序列仍能收敛到真值附近,说明变分方法具有较好的抗噪声性能. 需要强调的是,本文只使用了最简单的变分方法来解决,容易产生临界变分现象,因此估计效果可以进一步提高. 利用 He 提出的半反推方法 (semi-inverse method)^[18-22]对复杂系统的未知参数进行估计是下一步需要开展的工作.

- [1] Liu F C, Liang X M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4584 (in Chinese) [刘福才、梁晓明 2005 物理学报 **54** 4584]
- [2] Li L X, Peng H P, Lu H B, Guan X P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese) [李丽香、彭海朋、卢辉斌、关新平 2001 物理学报 **50** 629]
- [3] Wang X Y, Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [4] Wu Z Q, Tan F X, Wang S X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1651 (in Chinese) [吴忠强、谭拂晓、王绍仙 2006 物理学报 **55** 1651]
- [5] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [6] He M F, Mu Y M, Zhao L Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 830 (in Chinese) [贺明峰、穆云明、赵立中 2000 物理学报 **49** 830]
- [7] Guan X P, Peng H P, Li L X, Wang X Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 (in Chinese) [关新平、彭海朋、李丽香、王益群 2001 物理学报 **50** 26]
- [8] Dai D, Ma X K, Li F C, You Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2459 (in Chinese) [戴 栋、马西奎、李富才、尤 勇 2002 物理学报 **51** 2459]
- [9] Gao F, Tong H Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 577 (in Chinese) [高 飞、童恒庆 2006 物理学报 **55** 577]
- [10] Li L X, Peng H P, Yang Y X, Wang X D 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 51 (in Chinese) [李丽香、彭海朋、杨义先、王向东 2007 物理学报 **56** 51]
- [11] Wang J Y, Huang D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2755 (in Chinese) [王钧炎、黄德先 2008 物理学报 **57** 2755]
- [12] Huang S X, Wu R S 2001 *Mathematical Physics Problems in Atmosphere Science* (Beijing: Meteorology Press) (in Chinese) [黄思训、伍荣生 2001 大气科学中的数学物理问题(北京:气象出版社)]
- [13] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 249
- [14] Li G C, Mei F X 2006 *Chin. Phys.* **15** 2496
- [15] Fu J L, Dai G D 2007 *Chin. Phys.* **16** 570
- [16] Shi S Y, Fu J L, Chen L Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 385
- [17] Cai G L, Huang J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3997 (in Chinese) [蔡国梁、黄娟娟 2006 物理学报 **55** 3997]
- [18] He J H 2008 *Int. J. Modern. Phys. B* **22** 3487
- [19] He J H 1997 *Int. J. Turbo. Jet-Eng.* **14** 23
- [20] He J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 797
- [21] He J H 2001 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **2** 309
- [22] He J H, Lee E W M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1644
- [23] Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **10** 1369
- [24] Zheng C B, Liu B, Wang Z J, Zheng S K 2009 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **10** 1523

Estimating parameters of chaotic system with variational method*

Cao Xiao-Qun[†] Song Jun-Qiang Zhang Wei-Min Zhao Jun Zhang Li-Lun
(School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 8 October 2010; revised manuscript received 18 October 2010)

Abstract

In this paper a method is presented to estimate the unknown parameters of chaotic system based on the variational principle, which can be applied to all chaotic systems governed by the following equation: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$. Firstly, the equation of the chaotic system is included into the objective functional. Secondly, the universal formulas of the adjoint equation for chaotic systems and the functional gradient for unknown parameters are derived using the variational principle. Thirdly, the algorithm to estimate unknown parameters of chaotic system is designed according to above formulas. Finally, all unknown parameters of the typical Lorenz chaotic system and the hyperchaotic Chen system are estimated separately. Numerical simulations show that the effectiveness and the feasibility of the proposed method to estimate unknown parameters of chaotic systems.

Keywords: chaotic system, parameter estimation, variational method, adjoint equation

PACS: 05.45.Pq, 04.20.Fy

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40775064, 40505023).

[†] E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn