

基于径向基神经网络预测的混沌时间 序列嵌入维数估计方法*

李鹤[†] 杨周 张义民 闻邦椿

(东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110819)

(2010年7月9日收到; 2010年9月15日收到修改稿)

根据 Takens 定理, 研究了混沌时间序列相空间重构嵌入维数的选取问题. 提出了基于径向基函数神经网络预测模型性能的嵌入维数估计方法, 即根据嵌入维数与混沌时间序列预测模型性能的变化关系来确定嵌入维数. 通过对几种典型混沌动力学系统的数值验证, 结果表明该方法能够确定出合适的相空间重构嵌入维数.

关键词: 混沌, 相空间重构, 嵌入维数, 预测

PACS: 05.45.Tp

1. 引言

混沌是非线性确定性系统中, 由于系统内部非线性相互作用而产生的一种非周期的行为. 混沌具有内随机性、整体稳定局部不稳定性、长期行为对初始条件细微变化的敏感依赖性、短期可预测而长期不可预测性、轨道不稳定性及正的李雅普诺夫指数、分岔、奇异吸引子与分形结构等特征, 混沌揭示了有序与无序的统一, 确定性与随机性的统一^[1-4]. 虽然混沌广泛存在于自然界和人类社会中, 但是产生混沌的非线性系统的动力学方程却很难、甚至无法写出来, 通常只能使用观测的方法得到一些等时间间隔的时间序列, 例如脑电信号时间序列、大气运动时间序列等, 通过研究这些时间序列间接地获得混沌系统动力学特征. 这些时间序列中蕴含着系统丰富的动力学信息, 如何提取并利用这些信息研究系统的特性, 是混沌研究的重要方面之一^[5-9].

Packard 等^[10] 提出了由原始时间序列的延迟坐标重构相空间并研究其系统动力学特征的思想, Takens^[11] 在数学上证明了对于一个 d 维动力系统, 可以找到一个合适的嵌入维数 $m \geq 2d + 1$, 在这个 m 维空间中, 重构的吸引子与原来的吸引子具有相

同的拓扑特性. Takens 定理使得深入研究混沌时间序列的产生背景及其非线性动力学机理成为可能.

延迟时间 τ 和嵌入维数 m 是实现相空间重构的两个重要参数^[12, 13]. 在重构相空间时, Takens 定理只给出了 $m \geq 2d + 1$, $\tau > 0$ 这一比较粗糙的充分条件. 由于产生混沌时间序列的动力学系统往往是未知的, 无法获得吸引子的维数 d , 因此在研究中只能采用较大的 m 值, 以满足嵌入维数 $m \geq 2d + 1$ 的条件. 但是, 如果 m 值过大, 不仅会增加计算量, 而且当系统动力学行为由低维吸引子描述时, 多余的相空间维数有放大原时间序列中噪声的效应; 反之, 如果 m 值过小, 重构的相空间不能反映原系统的动力学特性. 对于无限长无噪声时间序列的延迟时间 τ 是可以任意选取的. 但是, 对于有限长含噪声时间序列, 如果延迟时间 τ 过小, 两个相邻重构状态变量在统计意义上彼此相关, 不能作为独立变量; 而延迟时间 τ 过大, 两个相邻重构状态变量相互完全独立, 不能反映系统的整体信息. 因此, 重构相空间时, 必须选择最佳的嵌入维数 m 和延迟时间 τ , 才能最大程度地恢复原系统动力学特征.

目前常用的计算延迟时间 τ 的方法有自相关法、复自相关法、互信息函数法等. 嵌入维数 m 的计算方法可以分为 4 类^[14, 15]: 1) 基于统计不变量的嵌

* 教育部新世纪优秀人才支持计划 (批准号: NCET-10-0271), 机械系统与振动国家重点实验室开放课题 (批准号: MSV-2011-19) 教育部长江学者与创新团队发展计划 (批准号: IRT0816), 国家自然科学基金 (批准号: 10702014), 中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: N100503002, N100703001) 资助的课题.

[†] E-mail: hli@mail.neu.edu.cn

入维数计算方法;2)基于奇异值分解的嵌入维数计算方法;3)伪邻近点方法;4)基于预测性能的嵌入维数计算方法.第4类方法^[14, 15]与前3类方法相比,具有适合小数据量、对噪声稳定、计算效率高、不包含主观评价因素等优点.

本文提出的嵌入维数计算方法属于第4类方法,是以径向基函数神经网络为预测模型,根据 Takens 定理以嵌入维数 m 作为网络预测模型输入层神经元的个数,以原始时间序列与预测时间序列的相关系数作为预测性能评价指标,通过逐步增加嵌入维数 m ,即逐步增加网络预测模型输入层神经元个数,寻找原始时间序列与预测时间序列相关系数的最大值,最大值相关系数对应的嵌入维数即为原时间序列最佳嵌入维数.

2. 基于径向基函数神经网络预测的嵌入维数估计方法

基于预测性能的嵌入维数估计方法是利用混沌时间序列的短期可预测性,建立以嵌入维数 m 为优化参数的预测模型,通过对模型预测性能优化,来确定最佳嵌入维数.

假设观测得到的混沌时间序列 $\{x(t)\}_{t=1}^N$,通过坐标延迟得到重构相空间向量为

$$x(t) = [x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)], \quad (1)$$

其中, m 为嵌入维数, τ 为延迟时间.

根据 Takens 定理,重构相空间中的动力系统与原系统在微分同胚基础上是等价的,即在重构的相空间中,存在光滑映射 $g: R^m \rightarrow R$, 使得

$$x(t + \tau) = g[x(t)]. \quad (2)$$

基于相空间重构的混沌时间序列预测,就是对 $g(\cdot)$ 进行函数逼近^[16], $g(\cdot)$ 与嵌入维数 m 有关^[17].

假设混沌时间序列预测性能评价指标用 P_l 表示,由于映射 $g(\cdot)$ 与嵌入维数 m 有关,预测性能评价指标 P_l 也与嵌入维数 m 有关,如果存在某个嵌入维数 m_{op} 使得 $\max P_l$ 或 $\min P_l$ (取最大值或最小值依据 P_l 的性质而定), m_{op} 就是最佳嵌入维数.

径向基函数神经网络具有拓扑结构简单,学习效率高等优点.已经证明,只要网络隐层的节点数足够多,径向基函数神经网络所执行的非线性映射,可以以任意精度逼近任何单值连续函数^[18].本

文以径向基函数神经网络逼近 $g(\cdot)$, 并通过对预测性能寻优,获得最佳的嵌入维数 m_{op} .

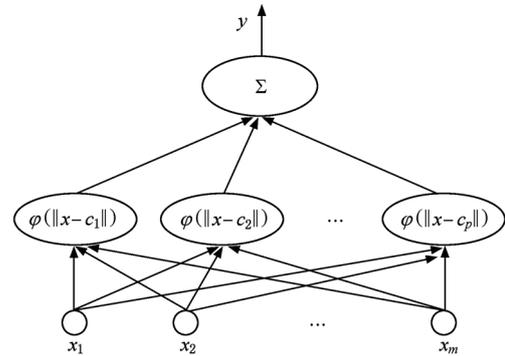


图1 径向基函数网络结构

对于映射 $x \rightarrow y, x \in R^m, y \in R$, 径向基函数神经网络模型可以写为

$$y = g(x) = \sum_{p=1}^P \lambda_p \varphi(\|x - c_p\|), \quad (3)$$

其中, φ 是径向基函数,本文选用高斯函数 $\varphi(x) = \exp(-\|x - c_p\|^2 / \sigma_p^2)$, σ_p 是归一化参数, $\{c_p\}_{p=1}^P \subset R^m$ 是基函数中心, λ_p 是权系数, m 是参变量,表示嵌入维数.径向基函数神经网络的拓扑结构如图1所示,输入层有 m 个单元, m 维输入模式向量 x 由此进入网络,隐层有 P 个单元,第 p 个单元的输入为 $h_p = \|x - c_p\|$, 输出为 $\varphi(h_p)$, 输出层有 1 个单元,输出为 $y = \sum_{p=1}^P \lambda_p \varphi(h_p)$.

径向基函数网络的训练过程可以分为两步:第一步为假设径向基函数神经网络中隐层单元的个数 P 已经确定,通过无监督学习选取基函数中心 c_p 和归一化参数 σ_p ,再通过有监督学习,确定权系数 λ_p 的值;第二步是对隐层单元数 P 进行优化,确定最小的隐层单元数 P .径向基函数神经网络的训练样本集由重构向量 $x(t) = [x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)]$ 作为输入向量, $x(t + \tau)$ 作为对应的目标值构成.网络经过训练后,就可以对混沌时间序列进行预测了.

假设径向基神经网络预测数据为 $\{\bar{x}(t)\}_{t=1}^N$,混沌时间序列预测模型常用的性能评价指标有均方误差、相对均方误差、相关系数、相对根均方误差、Delta 相关系数、符号误差等 6 种.相关系数 ρ 是指预测值与实际值之间的相似程度.本文以相关系数 ρ 作为混沌时间序列的预测性能评价指标,

$$\rho = \frac{\sum_{t=1}^N (x(t) - \bar{x})(\hat{x}(t) - \bar{\hat{x}})}{\sqrt{\sum_{t=1}^N (x(t) - \bar{x})^2 \sum_{t=1}^N (\hat{x}(t) - \bar{\hat{x}})^2}}, \quad (4)$$

其中, $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t)$, $\bar{\hat{x}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{x}(t)$.

3. 数值验证

在本文中,通过依次增加嵌入维数 m , 即增加输入层单元数得到不同的网络,对每一个网络进行训练,并对网络预测结果进行评价,最优预测结果对应的 m 值即为最佳嵌入维数.

网络预测模型所需的输入向量为 $\mathbf{X}(N \times m)$ 和输出值为 Y , N 为时间序列的总长,为了保证网络训练的精度,需对网络样本数据进行归一化预处理,即要对输入向量 $\mathbf{X}(N \times m)$ 和输出值 Y 进行预处理

$$\begin{aligned} X(k, i) &= \frac{X(k, i) - \text{mean}x(i)}{\text{std}x(i)}, \\ Y(k) &= \frac{Y(k) - \text{mean}y}{\text{std}y}, \\ k &= 1, \dots, N, i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\text{mean}x(i)$, $\text{std}x(i)$ 分别是输入向量 \mathbf{X} 的第 i 列的算术平均值和标准方差; $\text{mean}y$ 和 $\text{std}y$ 分别是输出值 Y 的算术平均值和标准方差.

Henon 映射是著名的简单动力学系统之一,其动力学方程为

$$\begin{aligned} x(t+1) &= 1 - ax^2(t) + y(t), \\ y(t+1) &= bx(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,当 $a = 1.4$, $b = 0.3$ 时,系统呈现出混沌状态^[19]. 利用(6)式的迭代计算,可以得到 Henon 混沌时间序列. 抽取 1000 对输入输出数据,即 $[x(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(m-1)\tau); x(t+\tau)]$, 对输入层单元数 $m = 2, \dots, 10$ 的径向基函数神经网络依次进行训练. 前 900 个数据对用于训练集,后 100 个数据对预测性能进行评价. 图 2 是不同 m 值下, Henon 时间序列的实际输出与径向基函数神经网络预测值的相关系数曲线,当 $m = 2$ 时相关系数有最大值,该 m 值可以作为 Henon 混沌时间序列的最佳嵌入维数. 图 3 表示了 Henon 时间序列的实际输出与 $m = 2$ 径向基函数神经网络的预测值比较曲线,从图中不难看出,径向基函数神经网络模型的预测值与系统的实际输出符合得较好. 根据预测模型重建的吸引子如图 4 所示,与原系统的吸引子基本一致.

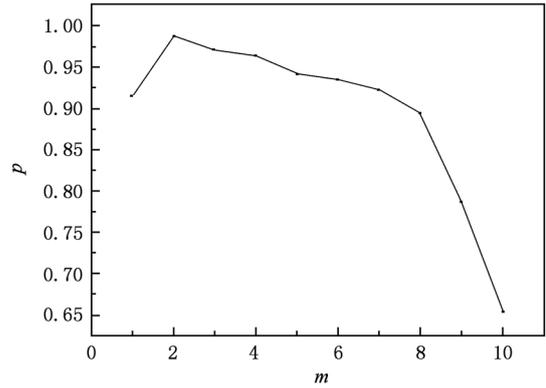


图 2 不同嵌入维数下, Henon 混沌时间序列的实际值与预测值的相关系数

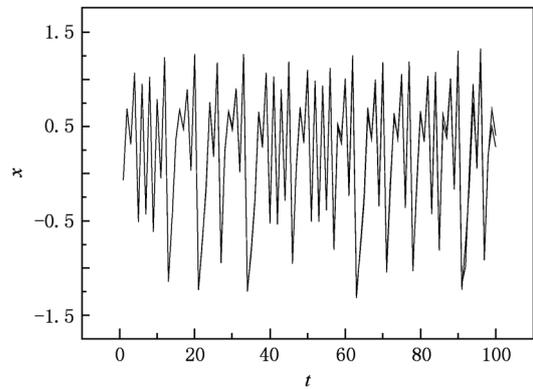


图 3 当嵌入维数 $m = 2$ 时, Henon 混沌时间序列的实际值(实线)和模型的预测值(虚线)

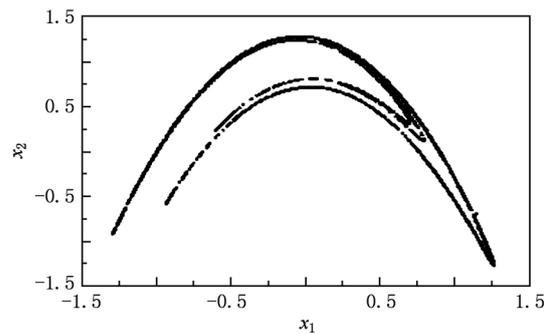


图 4 重构的 Henon 吸引子

考虑 Lorenz 方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\sigma = 16$, $b = 4$, $r = 45.92$. 用 Runge-Kutta 方法求解方程(7), 步长 $h = 0.01$, 去除暂态过程, 得到

Lorenz 混沌时间序列,由互信息函数法^[12]可以到延迟时间 $\tau = 10$. 抽取 5000 对经过延迟坐标变换的输入输出数据,即 $[x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau); x(t + \tau)]$, 对输入层单元数 $m = 2, \dots, 10$ 的径向基函数神经网络依次进行训练. 前 4700 个数据对用于训练集,后 300 个数据对预测性能进行评价. 图 5 是不同 m 值下, Lorenz 时间序列的实际输出与径向基函数神经网络预测值的相关系数曲线,当 $m = 3$ 时相关系数有最大值,可以取该 m 值作为 Lorenz 混沌时间序列的最佳嵌入维数. 图 6 表示了 Lorenz 时间序列的实际输出与 $m = 3$ 径向基函数神经网络的预测值比较曲线,从图中不难看出,径向基函数神经网络模型的预测值与系统的实际输出符合得较好.

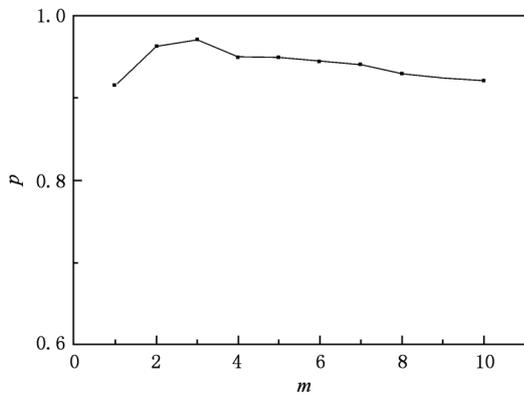


图 5 不同嵌入维数下, Lorenz 混沌时间序列的实际值与预测值的相关系数

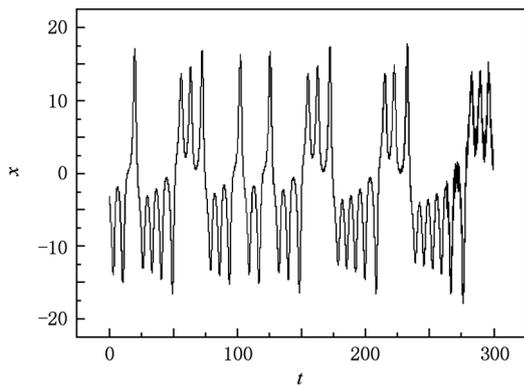


图 6 当嵌入维数 $m = 3$ 时, Lorenz 混沌时间序列的实际值(实线)和模型的预测值(虚线)

为了考察本文提出的嵌入维数计算方法对含噪声混沌时间序列的有效性,在前面得到的 Henon 混沌时间序列和 Lorenz 混沌时间序列中分别加入

白噪声,信噪比为 $SNR = 30$ dB. 使用本文方法得到的含有噪声的 Henon 混沌时间序列与 Lorenz 混沌时间序列嵌入维数 m 与相关系数 ρ 的变化曲线如图 7 和图 8 所示. 从图 7 和图 8 中可以看出当时间序列中含有噪声时,相关系数明显减小,但是当嵌入维数 $m = 2$ (图 7), $m = 3$ (图 8) 时相关系数还是出现了最大值. 因此,可以使用本方法来确定含有噪声混沌时间序列的嵌入维数.

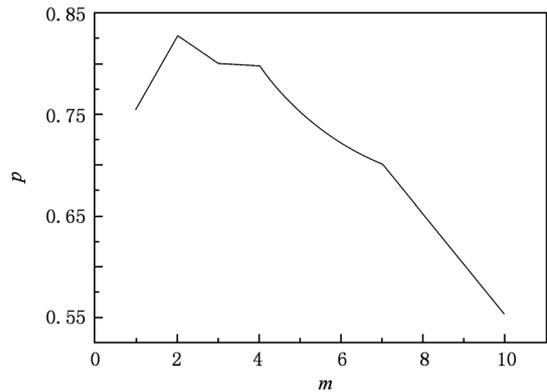


图 7 不同嵌入维数下,含有噪声 Henon 混沌时间序列的实际值与预测值的相关系数

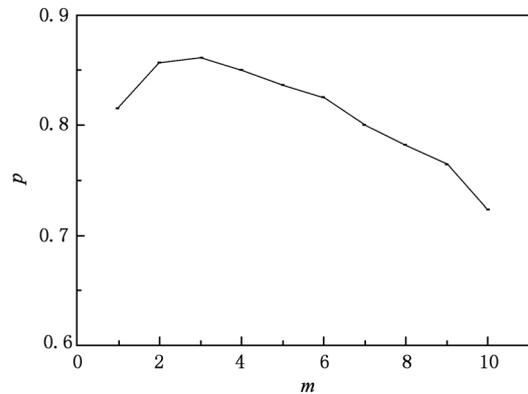


图 8 不同嵌入维数下,含有噪声 Lorenz 混沌时间序列的实际值与预测值的相关系数

4. 结 论

本文提出了一种基于预测性能的混沌时间序列嵌入维数的计算方法. 该方法是以径向基函数神经网络为预测模型,根据 Takens 定理以嵌入维数 m 作为神经网络输入层单元数,以原始时间序列与预测时间序列的相关系数作为预测性能评价指标,通过逐步增加嵌入维数 m , 寻找相关系数的最大值,

最大相关系数对应的嵌入维数即为最佳嵌入维数. 数值实验表明, 该方法能够确定出合适的相空间重构嵌入维数. 并且, 从数值实验可以看出, 该方法与基于奇异值分解^[20]、基于伪邻近点^[21,22]或基于统

计不变量^[13]等嵌入维数选取方法相比, 具有适合小数据量, 对噪声稳定性好, 计算量较小, 评价指标客观等优点.

- [1] Bocker J, Engster D, Parlitz U 2009 *Chaos* **19** 043130
- [2] Wisniacki D A, Ares N, Vergini E G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **25** 254101
- [3] Liu J H, Zhang H G, Feng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6868 (in Chinese) [刘金海、张化光、冯 健 2008 物理学报 **57** 6868]
- [4] Gershenfeld N, Schonher B, Metois E 1999 *Nature* **397** 392
- [5] Haniias M P, Giannis I L, Tombras G S 2010 *Chaos* **20** 013105
- [6] Pecora L M, Moniz L, Nichols J, Carroll T L 2007 *Chaos* **17** 013110
- [7] Amritkar R E 2009 *Phys. Rev. E* **80** 047202
- [8] Cong R, Liu S L, Ma R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7487 (in Chinese) [丛 蕊、刘树林、马 锐 2008 物理学报 **57** 7487]
- [9] Ma Q L, Zheng Q L, Peng H, Zhong T W, Qin J W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 536
- [10] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer, J D, Shaw R S 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 712
- [11] Takens F 1981 *Dynamical System and Turbulence, Lecture notes in Mathematics* (Berlin: Springer) 366
- [12] Zhang S Q, Jia J, Gao M, Han X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1576 (in Chinses) [张淑清、贾 健、高 敏、韩 叙 2010 物理学报 **59** 1576]
- [13] Xiao F H, Yan G R, Han Y H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 550 (in Chinese) [肖方红、阎桂荣、韩宇航 2005 物理学报 **54** 550]
- [14] Meng Q F, Peng Y H, Xue P J 2007 *Chin. Phys.* **16** 1252
- [15] Meng Q F, Zhou W D, Chen Y H, Peng Y H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 123 (in Chinese) [孟庆芳、周卫东、陈月辉、彭玉华 2010 物理学报 **59** 123]
- [16] Li J, Liu J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 10 (in Chinese) [李 军、刘君华 2005 物理学报 **54** 10]
- [17] Sugihara G, May R 1990 *Nature* **344** 734
- [18] Du D J, Li K, Fei M R 2010 *Neurocomputing* **73** 2196
- [19] Henon M 1976 *Commun. Math. Phys.* **50** 69
- [20] Broomhead D S, King G P 1986 *Physica D* **20** 217
- [21] Kennel M, Brown R, Abarbanel H D I 1992 *Phys. Rev. A* **45** 3403
- [22] Cao L 1997 *Physica D* **110** 43

Methodology of estimating the embedding dimension in chaos time series based on the prediction performance of radial basis function neural networks^{*}

Li He[†] Yang Zhou Zhang Yi-Min Wen Bang-Chun

(School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

(Received 9 July 2010; revised manuscript received 15 September 2010)

Abstract

We have studied the methodology of estimating the embedding dimension for phase space reconstruction of chaotic time series according to the Takens theorem. We present an approach to the estimation of the embedding dimension based on the prediction of nonlinear performance. That is, we determine the embedding dimension by considering the variation of the performance of prediction model of chaotic time series with embedding dimension. Numerical simulations verify that the method is applicable for determining an appropriate embedding dimension.

Keywords: chaos, phase space reconstruction, embedding dimension, prediction

PACS: 05.45.Tp

^{*} Project supported by the New Century Excellent Talent Project of the Ministry of Education of China (Grant No. NCET-10-0271), the Open Project of State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration (Grant No. MSV-2011-19), the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University (Grant No. IRT0816), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10702014), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Grant Nos. N100503002, N100703001).

[†] E-mail: hli@mail.neu.edu.cn