

## 计及两体和三体作用下的二维凝聚体中的孤子特性\*

张蔚曦<sup>1)†</sup> 余彦超<sup>1)</sup> 王登龙<sup>2)</sup>

1) (铜仁学院物理与电子科学系, 铜仁 554300)

2) (湘潭大学物理系和量子工程与微纳能源技术湖南省普通高等学校重点实验室, 湘潭 411105)

(2010年9月19日收到; 2010年10月27日收到修改稿)

使用多重尺度法, 解析地研究计及粒子间两体和三体同时作用下二维凝聚体中孤子的特性. 结果发现, 当凝聚体粒子间两体作用为排斥、三体作用为吸引时, 凝聚体内会产生暗孤子环, 且随着三体吸引作用的减弱, 暗孤子环中心峰的高度逐渐降低, 并当三体吸引作用消失时暗孤子环演化为一个完美的二维暗孤子. 当两体和三体作用均为排斥时, 凝聚体中的暗孤子的宽度和幅度随着三体排斥作用的加强而减小, 且当三体作用强度增加到与两体作用同一数量级时, 凝聚体产生坍塌现象.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚体, 两体和三体作用, 暗孤子

**PACS:** 05.45.Yv, 03.75.Lm, 03.75.Kk

## 1. 引言

自从玻色-爱因斯坦凝聚体 (BECs) 被实验成功观察以来, 人们掀起了对这一领域的研究热潮. 尤其是在 BECs 中观察到暗、亮孤子等非线性现象<sup>[1-4]</sup>, 这极大地促进非线性原子光学的发展. 从研究 BECs 的非线性现象中, 人们发现许多完全不同于线性原子光学的新颖现象<sup>[5-12]</sup>. 目前, 实验可调控凝聚体的宏观物理量有: 外部势阱和粒子间的相互作用. 对于一定的外部势阱, 粒子间的相互作用形式对 BECs 中孤子的形成及特性有着非常重要的影响<sup>[13-22]</sup>. 如, 对于局限于谐振外部势阱中的 BECs, 当粒子间的两体相互作用为排斥时, BECs 中出现暗孤子<sup>[1,2]</sup>; 当相互作用为吸引时, 其中产生亮孤子<sup>[3,4]</sup>; 若相互作用非常弱, 则孤子在传播过程中传播速度会变慢并且波形变宽<sup>[13]</sup>. 对于囚禁于恒定外部势阱中的 BECs, 当相互排斥作用相当强时, BECs 中只会存在亮孤子, 当相互排斥作用相当弱 (小于某一临界值) 时, BECs 中会出现暗、亮孤子交替演化<sup>[14]</sup>. 对于排斥抛物势中的 BECs, 当两体相互作用随时间增加时, 凝聚体中的亮孤子可以被挤压成非常高的局域物质密度, 并且亮孤子中的原子数目保持动力学平

衡<sup>[15]</sup>. 对于准一维谐振势中的 BECs, 当两体相互作用随时间增加时, 凝聚体中存在的黑孤子会演化成稳定的灰孤子; 当两体相互作用随时间减少时, 凝聚体中存在的灰孤子将向黑孤子演化<sup>[16]</sup>.

迄今为止, 实验观察到 BECs 现象均在极低温、原子密度极稀薄的情况中, 此时粒子间距远大于粒子间相互作用的有效距离, 从而理论上仅考虑粒子间的两体相互作用就可以较好地解释凝聚体中的系列物性. 随着科学技术的发展, BECs 将付之于实际应用. 这就要求在比较高的温度下实现 BECs, 此时凝聚体中的粒子数密度也可能会增加, 则在理论上仅考虑凝聚体中粒子之间的两体相互作用是不完善的. 因此, 研究凝聚体中的三体相互作用对其物理性能的影响是十分必要. 目前已有部分研究工作, 如 Kamchatnov 等人<sup>[23]</sup> 研究雪茄型 BECs 中暗孤子的碰撞行为时发现, 考虑三体作用后孤子的碰撞频率与背景密度及相互作用强度密切相关. Zhang 等人<sup>[24]</sup> 研究处于一维光晶格势阱中的 BECs, 通过分析能带结构发现三体相互作用对临界密度有显著的影响. 上述研究均是在一维的凝聚体中. 众所周知, 二维乃至三维的凝聚体能展示出更加丰富的性质. 因此, 本文研究粒子间两体排斥相互作用为主要相互作用形式, 同时考虑三体相互作用强度对

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10674113), 量子工程和微纳能源技术湖南省普通高等学校重点实验室基金 (批准号: 09QNT05) 和铜仁学院科研项目 (批准号: TR054, TS1009) 资助的课题.

† E-mail: zhangwxx@sina.com

二维 BECs 中孤子的影响.

## 2. 理论模型、渐进展开和孤子解

考虑同时存在两体和三体相互作用的 BECs 系统,描述该系统的是具有三次和五次非线性项的非线性薛定谔方程,其无量纲形式是<sup>[9,18]</sup>

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + g_1 |\psi|^2 \psi + g_2 |\psi|^4 \psi + V(r) \psi, \quad (1)$$

其中  $\psi = \psi(r, t)$  是归一的宏观波函数.  $g_1$  和  $g_2$  分别代表两体和三体相互作用强度.  $V(r)$  为二维囚禁谐振势.  $\psi, r, t$  的无量纲化系数分别为  $\sqrt{n_0}, a_{\perp}$  (即  $\sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}})$   $2\omega_{\perp}^{-1}$ , 其中  $n_0$  和  $\omega_{\perp}$  分别是凝聚体的密度和径向频率.

利用分离变量有  $\psi(r, t) = A(r, t)e^{i\varphi(r, t)}$ , 其中  $A(r, t)$  表示振幅,  $\varphi(r, t)$  表示相位, 将其代入方程 (1) 中, 分离虚实部可得

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} A \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + g_1 A^3 + g_2 A^5 + V(r)A = 0. \quad (3)$$

由于上述方程难以解析求解, 在此, 利用多重尺度<sup>[5,16,25,26]</sup>把振幅和相位展开成  $A = u_0 + \varepsilon^2 [a_0(\xi, \tau) + \varepsilon^2 a_1(\xi, \tau) + \dots]$ ;  $\varphi = -\mu t + \varepsilon [\phi_0(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \phi_1(\xi, \tau) + \dots]$ , 其中  $u_0$  为凝聚体背景,  $\mu$  为化学势. 随后, 引入时间和空间慢变量  $\xi = \varepsilon(r - vt)$  和  $\tau = \varepsilon^3 t$ . 且将这些变换代入 (2) 和 (3) 式中, 分别得到

$$v \frac{\partial a_i}{\partial \xi} - u_0 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} = M^{(i)}, i = 0, 1, \dots \quad (4)$$

$$-\mu u_0 + g_1 u_0^3 + g_2 u_0^5 + V(r)u_0 = 0, \quad (5)$$

$$vu_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} - (2g_1 u_0^2 + 4g_2 u_0^4) a_i = N^{(i)}, i = 0, 1, \dots \quad (6)$$

其中

$$M^{(0)} = 0,$$

$$M^{(1)} = \frac{\partial a_0}{\partial \tau} + a_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{u_0}{v\tau} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi},$$

$$N^{(0)} = 0,$$

$$N^{(1)} = -va_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 a_0}{\partial \xi^2} + u_0 \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \right)^2$$

$$+ 3g_1 u_0 a_0^2 + 10g_2 u_0^3 a_0^2.$$

联立 (4) 至 (6) 式, 当  $i = 0$  时, 有  $v = \pm (2g_1 u_0^2 + 4g_2 u_0^4)^{1/2}$ .

当  $i = 1$  时, 可得

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau} + \frac{1}{2\tau} a_0 + \frac{6g_1 u_0 + 16g_2 u_0^3}{v} a_0 \frac{\partial a_0}{\partial \xi} - \frac{1}{2v} \frac{\partial^3 a_0}{\partial \xi^3} = 0. \quad (7)$$

令  $w = \varepsilon^2 a_0$ ,  $R = r - vt$ ,  $\xi = \varepsilon(r - vt) = \varepsilon R$ ,  $\tau = \varepsilon^3 t$ , 则可把 (7) 式变为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + aw + bw \frac{\partial w}{\partial R} + c \frac{\partial^3 w}{\partial R^3} = 0, \quad (8)$$

其中  $a = \frac{1}{2t}$ ,  $b = \frac{6g_1 u_0 + 16g_2 u_0^3}{v}$ ,  $c = -\frac{1}{2v}$ . (8) 式为柱 KdV 方程, 其解析解是

$$w = k(t) \operatorname{sech}^2 \{ d(t) [r - vt - h(t)] \}, \quad (9)$$

其中

$$k(t) = k_0 e^{-\frac{2}{3} \ln t + c_0},$$

$$d(t) = \sqrt{\frac{b}{12c} k(t)} = \sqrt{-(g_1 u_0 + 8g_2 u_0^3/3) k(t)},$$

$$h(t) = \frac{6g_1 u_0 + 16g_2 u_0^3}{v} t k(t).$$

最后, 我们得出凝聚体的概率密度为

$$|\psi(r, t)|^2 = \{ u_0 + k(t) \operatorname{sech}^2 [d(t) (r - vt - h(t))] \}^2. \quad (10)$$

## 3. 孤子特征分析

为了直观地描述两体和三体作用下的二维凝聚体中的孤子性质, 在此我们对方程 (10) 进行数值计算. 图 1 示出两体作用为排斥和三体作用为吸引情况下凝聚体的概率密度随不同的三体作用强度的分布. 由图 1(a) 中可以看出, 初始时刻凝聚体在  $x$  轴中心处出现了一个暗谷, 暗谷密度最小值为零, 但在暗谷底部突起一个高高的亮峰, 对于整个二维平面来说这是一个暗孤子环. 通过比较图 1(a) 和图 1(b), 发现当三体吸引作用  $g_2$  的绝对值减小到 0.01 ( $g_2 = -0.01$ ) 时, 初始时刻 BECs 系统中的暗孤子环的中心峰高度逐渐降低, 整个孤子宽度减小. 且当三体吸引作用消失时, 即  $g_2 = 0$  (如图 1(c) 所示), 凝聚体在初始时刻于  $x$  轴中心出现一个暗谷, 谷底为零, 暗孤子环的中心峰消失, 这意味着在凝聚体平面的中心概率密度为零, 这是一个完全的

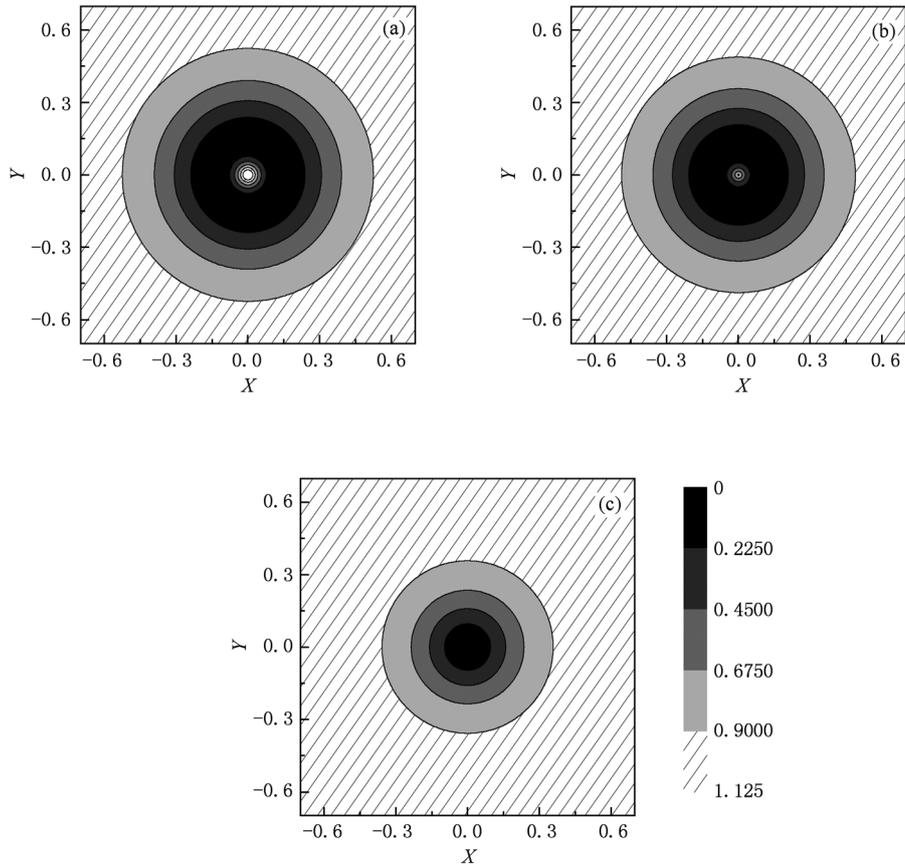


图1 在两体相互作用为排斥时( $g_1 = 0.45$ ),凝聚体中存在的孤子随吸引的三体相互作用( $g_2 < 0$ )的演化情况( $u_0 = 1.05, k_0 = -1.1, t = 0.01$ ) (a)  $g = -0.02$ ; (b)  $g = -0.01$ ; (c)  $g = 0.0$

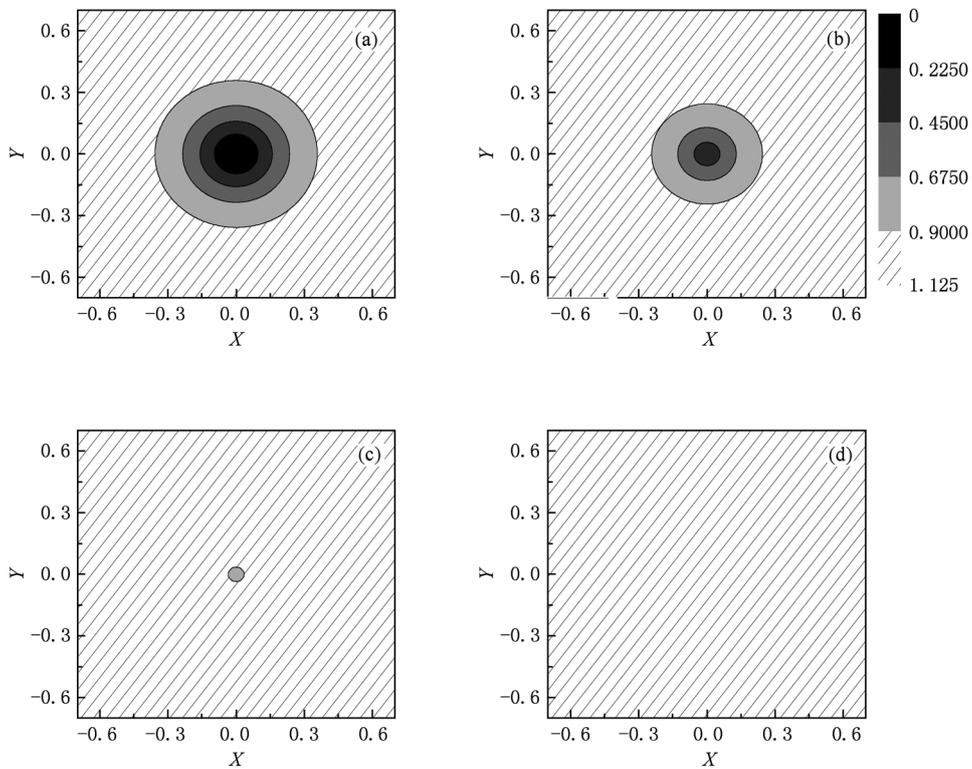


图2 在两体相互作用为排斥时( $g_1 = 0.45$ ),凝聚体中存在的孤子随排斥的三体相互作用( $g_2 > 0$ )的演化情况(参数同图1) (a)  $g = 0.0$ ; (b)  $g = 0.02$ ; (c)  $g = 0.13$ ; (d)  $g = 0.45$

暗孤子. 上述结果表明: 随着系统中三体吸引作用逐渐消弱, 二维凝聚体中暗孤子环的中心峰高度逐渐变小, 宽度逐渐变窄, 在三体作用为零时演化为一个完美的暗孤子.

两体和三体作用均为排斥情况下凝聚体的概率密度随不同的三体作用强度的分布如图 2 所示. 可以看出, 当  $g_2 = 0.02$  时 (如图 2(b) 所示), 凝聚体中仍存在暗孤子, 但该暗孤子与  $g_2 = 0$  的情况 (如图 2(a) 所示) 相比, 宽度变窄, 幅度变小. 在三体作用强度 (如图 2(c) 所示)  $g_2 = 0.13$ , 即增加到与两体作用强度同一数量级, 凝聚体中暗孤子的幅度变得很小直至消失 (如图 2(d) 所示), 凝聚体中产生坍塌现象. 由此, 可发现, 随着  $g_2$  的增加, 即三体排斥作用强度的加强, 凝聚体中暗孤子宽度变窄, 幅度变小, 直至逐渐消失.

## 4. 结 论

本文从同时考虑粒子间两体和三体相互作用的 GP 方程出发, 利用多重尺度方法得到一个关于凝聚体波函数振幅的柱 KdV 方程, 随后得出解析解. 为了直观地寻求三体作用对二维凝聚体中孤子性质的影响, 我们对解析解进行了数值模拟. 结果表明, 在稳定的两体排斥作用下, 计及三体吸引作用, 凝聚体中出现暗孤子环, 并且随着三体吸引作用的减弱, 暗孤子环中心峰逐渐减小, 并在三体吸引作用为零的时候为一个完美的暗孤子. 当两体和三体均为排斥作用下, 凝聚体中的暗孤子随着三体排斥作用的加强, 暗孤子的宽度和幅度都减小; 当三体作用强度与两体作用强度可以比拟时, 凝聚体产生坍塌现象.

- [1] Burger S, Bongs K, Dettmer S, Ertmer W, Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [2] Denschlag J, Simsarian J E, Feder D L, Clark C K, Collins L A, Deng L, Hagley E W, Helmerson K, Reinhardt W P, Rolston S L, Schneider B I, Phillips W D 2000 *Science* **287** 97
- [3] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [4] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Carr L D, Castin Y, Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [5] Wang D L, Yan X H, Liu W M 2008 *Phys. Rev. E* **78** 026606
- [6] Ji A C, Sun Q, Xie X C, Liu W M 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 023602
- [7] Li Z D, Li Q Y, He P B, Liang J Q, Liu W M, Fu G S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015602
- [8] Li G Q, Chen H J, Xue J K, 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1449 (in Chinese) [李高清、陈海军、薛具奎 2010 物理学报 **59** 1449]
- [9] Theocharis G, Schmelcher P, Oberthaler M K, Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 023609
- [10] Zhou Z, Yu H Y, Yan J R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010103
- [11] Song W W, Li Q Y, Li Z D, Fu G S, 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070503
- [12] Zhang T, Yang Z Y, Zhao L C, Yue R H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 070502
- [13] Ao S M, Yan J R 2006 *Chin. Phys.* **15** 0296
- [14] He Z M, Wang D L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3088 (in Chinese) [何章明、王登龙 2007 物理学报 **56** 3088]
- [15] Liang Z X, Zhang Z D, Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [16] Zhang W X, Wang D L, He Z M, Wang F J, Ding J W 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4407
- [17] Huang G X, Szeftel J, Zhu S H 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053605
- [18] Zhang W X, Wang D L, Ding J W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6786 (in Chinese) [张蔚曦、王登龙、丁建文 2008 物理学报 **57** 6786]
- [19] Zhang A X, Xue J K 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 39
- [20] Abdullaev F K, Kamchatnov A M, Konotop V V, Brazhnyi V A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 230402
- [21] Zhang X F, Yang Q, Zhang J F, Chen X Z, Liu W M 2008 *Phys. Rev. A* **77** 023613
- [22] Wu L, Jiang R J, Pei Y H, Zhang J F 2007 *Phys. Rev. A* **75** 037601
- [23] Kamchatnov A M, Salerno S 2009 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42** 185303
- [24] Zhang A X, Xue J K 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013624
- [25] Wen W, Shen S Q, Huang G X, 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014528
- [26] She Y C, Wang D L, Zhang W X, He Z M, Ding J W 2010 *J. Opt. Soc. Am. B* **27** 208

# Soliton characteristics of two-dimensional condensates with two- and three-body interaction<sup>\*</sup>

Zhang Wei-Xi<sup>1)†</sup> She Yan-Chao<sup>1)</sup> Wang Deng-Long<sup>2)</sup>

1) (*Department of Physics and Electronic Science, Tongren University, Tongren 554300, China*)

2) (*Department of Physics and Key Laboratory of Quantum Engineering and Micro-Nano Energy Technology of the Education Bureau of Hunan Province, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*)

(Received 19 September 2010; revised manuscript received 27 October 2010)

## Abstract

By using multiple-scale method, we study analytically the soliton characteristics of the two-dimensional condensates with two- and three-body interaction. The results show that a ring dark soliton can be found in the condensates when the two-body interaction is repulsive and three-body interaction is attractive. With the strength of the three-body interaction decreasing, the height of the center peak of the ring dark soliton decreases. When the three-body interaction vanishes, the ring dark soliton becomes a perfect dark soliton. If the two- and the three-body interaction are both repulsive, the width and the amplitude of the dark soliton decrease with the strength of the three-body interaction increasing. Especially, if the strength of the three-body interaction is large, which is on the order of that of the two-body interaction, the condensate collapse takes place.

**Keywords:** Bose-Einstein condensates, two and three body interaction, dark soliton

**PACS:** 05.45.Yv, 03.75.Lm, 03.75.Kk

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674113), the Foundation of Key Laboratory of Quantum Engineering and Micro-Nano Energy Technology of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 09QNT05), and the Foundation of Tongren University (Grant Nos. TR054, TS1009).

<sup>†</sup> E-mail: zhangwxx@sina.com