

## 量子稳定子码的差错纠正与译码网络构建\*

肖芳英<sup>†</sup> 陈汉武

(东南大学计算科学与工程学院, 南京 211189)

(东南大学计算机网络和信息集成教育部重点实验室, 南京 211189)

(2010年9月10日收到; 2010年12月17日收到修改稿)

寻找差错症状与差错算子之间映射关系是量子译码网络的核心内容,也是量子译码网络实现纠错功能的关键. 给出了比特翻转差错症状矩阵和相位翻转差错症状矩阵的定义,将任意 Pauli 差错算子的差错症状表示为比特翻转差错症状矩阵和相位翻转差错症状矩阵的线性组合. 研究发现,量子稳定子码的差错症状矩阵由其校验矩阵所决定,从而可将差错症状矩阵与差错算子之间的映射关系转化为校验矩阵与差错算子之间的映射关系,使得所有关于差错症状的分析都可以通过分析其校验矩阵来实现. 这与经典线性码的差错症状与奇偶校验矩阵之间的关系类似,因此可以将经典线性码的差错检测和纠正相关成果扩展到量子码的译码过程. 基于差错算子与差错症状之间的对应关系给出了构造量子差错纠正电路的方法,根据编码算子的酉性得到了基于编码算子逆算子的译码网络构建方法.

**关键词:** 稳定子码, 校验矩阵, 差错症状, Pauli 算子

**PACS:** 03. 67. Pp

## 1. 引言

量子纠错码<sup>[1]</sup>与经典纠错码具有诸多不同,不同的差错症状对应同一差错算子是量子码区别于经典码的重要特征. 但是,两者也有许多相似之处,例如它们都是通过检测差错症状来识别差错. 至今,关于量子纠错码的研究主要集中在码的理论构造方面<sup>[2-4]</sup>,而对其编译码算法的研究较少,寻找码结构未知的量子纠错码的最优译码算法(即根据对差错检测子系统部分测量所得结果找到恢复差错的最优方案)是非多项式时间内可解的难题. Cleve 和 Gottesman<sup>[5]</sup>首先关注编译码网络的构造,并于1997年提出了标准化稳定子群校验矩阵的方法构造量子稳定子码编码网络的一般结构. 但是,他们给出的编码方案对某些量子稳定子码不适用. 同年, Gottesman<sup>[6]</sup>给出了改进的编码网络的构建方法,但是其给出的编码公式中稳定子群和逻辑算子  $\bar{X}$  之间不一致,根据该编码公式得不到预期的码字. 2005年, Wu 等<sup>[7]</sup>给出了量子稳定子码的另一种编

码方案,该方案是基于对量子稳定子码编码后的码字进行逻辑分析的基础上得到编码电路,由于码字叠加项数随码长呈指数增长,因此该方案对码长较大的量子稳定子码不适用. 近年来,量子编译码算法的研究越来越引起重视,已有的成果中大多是针对特定类型量子码的编码算法研究,例如:量子循环码、量子卷积码、量子 Turbo 码等<sup>[8-14]</sup>. 但是对于量子码译码算法的研究非常少,作者没有检索到关于量子码差错检测方面的相关文献. 量子译码过程包括差错检测、差错纠正和译码三步. 差错检测是译码操作的第一步,在测量得到差错症状后如何将差错症状映射到对应的差错算子是实现差错纠正的关键. 因此分析差错症状与差错算子之间的映射关系尤为重要,但是,作者至今未见有文献对该问题进行分析.

本文定义了比特翻转差错症状矩阵和相位翻转差错症状矩阵,在分析任意 Pauli 差错算子的差错症状与比特翻转差错  $X$  和相位翻转差错  $Z$  的差错症状之间关系的基础上,得到任意 Pauli 差错算子的差错症状可表示为比特翻转差错症状矩阵和相位

\* 国家自然科学基金(批准号:60873101)、江苏省自然科学基金(批准号:BK2008209)和计算机网络和信息集成教育部重点实验室基金资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xfy504@hotmail.com

翻转差错症状矩阵的相关列线性叠加. 本文还特别讨论了量子稳定子码的差错检测过程. 研究发现, 量子稳定子码的比特翻转差错症状矩阵和相位翻转差错症状矩阵完全由其校验矩阵所决定. 因此, 量子稳定子码中所有关于差错症状矩阵与差错算子之间的映射关系可以转化为校验矩阵与差错算子之间的映射关系. 这与经典线性码的差错症状和奇偶校验矩阵之间的关系类似. 因此, 经典线性码的差错检测和差错纠正的相关技术可扩展到量子稳定子码的译码中来. 本文还基于差错算子与差错症状之间的对应关系给出了构造量子稳定子码差错纠正电路的方法.

关于量子稳定子码的译码, Gottesman 等<sup>[5,6]</sup>提出了利用编码网络的逆网络实现译码功能的思想. 本文在分析编码算子之间的对易关系后发现, 仅将量子稳定子码的编码电路中的单量子比特门移到电路的最右端, 而其他量子门的位置保持不变, 所得电路也可以实现译码功能.

## 2. 理论基础

**定义 1** 算子  $A$  和  $B$  的对易式和反对易式<sup>[1]</sup>分别定义为

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA, \\ \{A, B\} &= AB + BA. \end{aligned}$$

如果  $[A, B] = 0$ , 称  $A$  和  $B$  对易; 如果  $\{A, B\} = 0$ , 称  $A$  和  $B$  反对易.

Pauli 矩阵<sup>[1]</sup>包含四个常用的矩阵

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ Z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

它们之间存在如下关系:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= 2iZ, \\ [Y, Z] &= 2iX, \\ [Z, X] &= 2iY. \end{aligned}$$

**定义 2** 单量子比特 Pauli 群为

$$G_1 = \{ \pm I, \pm iI, \pm X, \pm iX, \pm Y, \pm iY, \pm Z, \pm iZ \},$$

$n$  量子比特的一般 Pauli 群为

$$\begin{aligned} (G_1)^{\otimes n} &\triangleq G_n \\ &= \{ g \mid g = i^c g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n, \\ &g_j \in \{ I, X, Z, Y \}, c \in \{ 0, 1, 2, 3 \} \}. \end{aligned}$$

任意 Pauli 群中的元素  $A, B \in G_n$  满足  $[A, B] = 0$  或  $\{A, B\} = 0$ . 又因为  $Y = iZX$ , 所以 Pauli 群  $G_n$  中的任意元素可表示为  $g = i^c \bigotimes_{j=1}^n (X^{a_j} Z^{b_j})$ .

**定义 3** 定义同态映射

$$\varphi: G_n \mapsto F_2^{2n}, \quad (1)$$

即

$$\varphi(g) = (a \mid b) \triangleq (\varphi(g)_X \mid \varphi(g)_Z),$$

其中  $g = i^c \bigotimes_{j=1}^n (X^{a_j} Z^{b_j}) \in G_n, c \in \{ 0, 1, 2, 3 \}, a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in F_2^n$ .

根据定义 3 可得, Pauli 算子  $g = I, X, Z, Y$  与二元向量之间存在如下对应关系:  $\varphi(I) = (0 \mid 0), \varphi(X) = (1 \mid 0), \varphi(Z) = (0 \mid 1), \varphi(Y) = (1 \mid 1)$ .

**定义 4** 定义同构映射

$$\begin{aligned} \varphi': F_2^{2n} &\mapsto \overline{G}_n, \\ \overline{G}_n &= G_n / \{ \pm 1, \pm i \}, \end{aligned} \quad (2)$$

即

$$\varphi'((\alpha \mid \beta)) = \bigotimes_{j=1}^n (X^{a_j} Z^{b_j}).$$

**定义 5** 设  $\{M_1, M_2, \dots, M_{n-k}\}$  是稳定子群  $S$  的独立生成元, 其中  $M_m \in G_n (1 \leq m \leq n-k)$ , 将  $\varphi(M_1), \varphi(M_2), \dots, \varphi(M_{n-k})$  作为行向量构成  $(n-k) \times 2n$  阶的矩阵  $H$ , 即

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} \varphi(M_1) \\ \vdots \\ \varphi(M_{n-k}) \end{bmatrix} \\ &\triangleq [H_X \mid H_Z]. \end{aligned} \quad (3)$$

称  $H$  为  $S$  的校验矩阵<sup>[1]</sup>.

## 3. 差错症状分析

设量子稳定子码  $C(S) = [[n, k, d]]$  的稳定子群为  $S = \langle M_1, M_2, \dots, M_{n-k} \rangle$ , 其中  $M_1, M_2, \dots, M_{n-k}$  是  $S$  的生成元. 假设编码后量子态  $|\phi\rangle$  在量子信道上传输的过程中受到量子噪声  $E \in G_n$  的干扰, 使得状态变成  $|\phi'\rangle = E|\phi\rangle$ . 接收端通过如图 1 所示的电路检测差错<sup>[1]</sup>. 由图 1 可知, 如果  $[E, M_i] = 0$ , 那么  $s_i = 0$ ; 如果  $\{E, M_i\} = 0$ , 那么  $s_i = 1$ .

定义任意差错算子  $E \in G_n$  的差错症状为

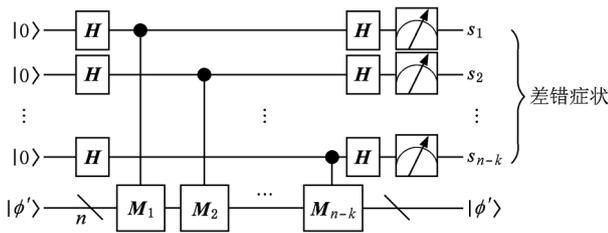


图1 差错检测电路

$$s_E = (s_E^1, s_E^2, \dots, s_E^{n-k}) \in F_2^{n-k}.$$

如果  $[E, M_j] = 0$ , 那么  $s_E^j = 0$ ; 如果  $\{E, M_j\} = 0$ , 那么  $s_E^j = 1$ , 其中  $j = 1, 2, \dots, n - k$ . 假设编码后量子态在量子信道上传输过程中受到量子噪声的干扰, 使得第  $x$  个量子比特发生比特翻转差错, 定义相应的差错算子为

$$X_x = I^{\otimes(x-1)} \otimes X \otimes I^{\otimes(n-x)}.$$

那么,  $X_x$  对应的差错症状为

$$s_{X_x} = (s_{X_x}^1, s_{X_x}^2, \dots, s_{X_x}^{n-k}) \in F_2^{n-k}.$$

定义比特翻转差错症状矩阵

$$s_X = \begin{bmatrix} s_{X_1} \\ s_{X_2} \\ \vdots \\ s_{X_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{X_1}^1 & s_{X_1}^2 & \dots & s_{X_1}^{n-k} \\ s_{X_2}^1 & s_{X_2}^2 & \dots & s_{X_2}^{n-k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{X_n}^1 & s_{X_n}^2 & \dots & s_{X_n}^{n-k} \end{bmatrix} \in F_2^{n \times (n-k)}. \quad (4)$$

更一般地, 如果多量子比特上同时发生比特翻转差错, 那么差错算子可以表示为  $E_X = i^{c_X} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v}$  的形式, 其中  $a_v \in F_2, c_X \in \{0, 1, 2, 3\}$ . 令

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in F_2^n,$$

有如下关系式成立:

$$\begin{aligned} E_X M_j &= i^{c_X} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} M_j \\ &= (-1)^{\langle a_n s_{X_n}^j \rangle} i^{c_X} \prod_{v=1}^{n-1} X_v^{a_v} M_j X_n^{a_n} \\ &= (-1)^{\sum_{u=1}^n \langle a_u s_{X_u}^j \rangle} M_j i^{c_X} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} \\ &= (-1)^{\sum_{u=1}^n \langle a_u s_{X_u}^j \rangle} M_j E_X. \end{aligned}$$

令

$$s_X^j = [s_{X_1}^j, s_{X_2}^j, \dots, s_{X_n}^j]^T \in F_2^n,$$

从而有

$$s_{E_X}^j = \sum_{u=1}^n \langle a_u s_{X_u}^j \rangle = a s_X^j.$$

差错算子  $E_X = i^{c_X} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v}$  对应的差错症状为

$$s_{E_X} = [a s_X^1, a s_X^2, \dots, a s_X^{n-k}] = a s_X. \quad (5)$$

从(5)式可以看出,  $E_X = i^{c_X} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v}$  与基本差错算子  $X_v$  之间的乘积关系表现为  $E_X$  的差错症状  $s_{E_X}$  与  $X_v$  的差错症状  $s_{X_v}$  之间的线性关系.

同样地, 如果第  $z$  个量子比特发生相位翻转差错, 定义相应的差错算子为

$$Z_z = I^{\otimes(z-1)} \otimes Z \otimes I^{\otimes(n-z)}.$$

那么,  $Z_z$  对应的差错症状为

$$s_{Z_z} = (s_{Z_z}^1, s_{Z_z}^2, \dots, s_{Z_z}^{n-k}) \in F_2^{n-k}.$$

定义相位翻转差错症状矩阵

$$s_Z = \begin{bmatrix} s_{Z_1}^1 & s_{Z_1}^2 & \dots & s_{Z_1}^{n-k} \\ s_{Z_2}^1 & s_{Z_2}^2 & \dots & s_{Z_2}^{n-k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ s_{Z_n}^1 & s_{Z_n}^2 & \dots & s_{Z_n}^{n-k} \end{bmatrix} \in F_2^{n \times (n-k)}. \quad (6)$$

如果多量子比特上同时发生相位翻转差错  $E_Z = i^{c_Z} \prod_{v=1}^n Z_v^{b_v}$  (其中  $b_v \in F_2, c_Z \in \{0, 1, 2, 3\}$ ), 那么差错算子  $E_Z$  对应的差错症状为

$$s_{E_Z} = [b s_Z^1, b s_Z^2, \dots, b s_Z^{n-k}] = b s_Z. \quad (7)$$

这里,  $b = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in F_2^n$ . 从(7)式可以看出,  $E_Z = i^{c_Z} \prod_{v=1}^n Z_v^{b_v}$  与基本差错  $Z_v$  之间的乘积关系表现为  $E_Z$  的差错症状  $s_{E_Z}$  与  $Z_v$  的差错症状  $s_{Z_v}$  之间的线性关系.

下面分析单量子比特上同时发生比特和相位翻转差错

$$Y_m = I^{\otimes(m-1)} \otimes Y \otimes I^{\otimes(n-m)}$$

所对应的差错症状. 定义差错症状

$$s_{Y_m} = (s_{Y_m}^1, s_{Y_m}^2, \dots, s_{Y_m}^{n-k}) \in F_2^{n-k}.$$

因为

$$Y_m = i Z_m X_m, \quad (8)$$

所以

$$s_{Y_m}^j = \begin{cases} 0 & (M_{j_m} = Y), \\ 1 & (M_{j_m} = X, M_{j_m} = Z), \end{cases} \quad (9)$$

其中  $M_{j_m}$  表示生成元  $M_j$  的第  $m$  个分量. 由(9)式可得

$$s_{Y_m}^j = s_{X_m}^j \oplus s_{Z_m}^j = s_{X_m}^j + s_{Z_m}^j. \quad (10)$$

根据(10)式可知,  $Y_m$  的差错症状  $s_{Y_m}$  与  $X_m$  的差错

症状  $s_{X_m}$  和  $Z_m$  的差错症状  $s_{Z_m}$  之间存在如下关系:

$$s_{Y_m} = s_{X_m} + s_{Z_m}. \quad (11)$$

由(11)式可知, 比特和相位同时翻转差错  $E_{Y_m}$  与  $X_m, Z_m$  之间的乘积关系对应为  $E_{Y_m}$  的差错症状  $s_{E_{Y_m}}$  与  $s_{X_m}$  和  $s_{Z_m}$  之间的线性关系.

假设错误算子  $E_p$  中既存在比特翻转差错又存在相位翻转差错, 即  $E_p \in G_n$  为多量子比特上的混合差错算子 (Pauli 差错). 由(8)式知, 差错算子  $E_p$  可以表示为如下形式:

$$E_p = i^{c_p} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} \prod_{l=1}^n Z_l^{b_l},$$

其中  $a_v, b_l \in F_2, c_p \in \{0, 1, 2, 3\}$ . 令  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n], \mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in F_2^n$ , 有

$$\begin{aligned} E_p M_j &= i^{c_p} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} \prod_{l=1}^n Z_l^{b_l} M_j \\ &= (-1)^{bs_z} i^{c_p} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} M_j \prod_{l=1}^n Z_l^{b_l} \\ &= (-1)^{bs_z + as_x} M_j (i^{c_p} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} \prod_{l=1}^n Z_l^{b_l}) \\ &= (-1)^{bs_z + as_x} M_j E_p. \end{aligned} \quad (12)$$

由(12)式可得

$$s_{E_p}^j = as_x^j + bs_z^j.$$

错误算子  $E_p = i^{c_p} \prod_{v=1}^n X_v^{a_v} \prod_{l=1}^n Z_l^{b_l}$  对应的差错症状为

$$\begin{aligned} s_{E_p} &= (as_x^1 + bs_z^1, as_x^2 + bs_z^2, \dots, as_x^{n-k} + bs_z^{n-k}) \\ &= (as_x^1, as_x^2, \dots, as_x^{n-k}) + (bs_z^1, bs_z^2, \dots, bs_z^{n-k}) \\ &= as_x + bs_z. \end{aligned} \quad (13)$$

由(13)式知, 任意差错  $E_p$  与基本差错算子  $X_v, Z_l$  之间的乘积关系对应为  $E_p$  的差错症状  $s_{E_p}$  与  $s_{X_v}, s_{Z_l}$  之间的线性关系. 因此, 在纠正差错的过程中只须找出单量子比特比特翻转差错算子  $X_x (x = 1, 2, \dots, n)$  和单量子比特相位翻转差错算子  $Z_z (z = 1, 2, \dots, n)$  所对应的差错症状  $s_{X_x}$  和  $s_{Z_z}$ , 任意 Pauli 差错算子的差错症状可由基本差错算子  $X_x$  和  $Z_z$  的差错症状按(13)式计算得到.

如果已知某个差错算子  $E_s$  的差错症状为  $\mathbf{s} \in F_2^{n-k}$ , 那么差错算子集  $\{\pm E_s, \pm iE_s\}$  中所有差错的差错症状也为  $\mathbf{s}$ . 由于四个算子对量子信息的影响相同, 作用方式和结果均相同, 所以本文将其看成一个差错算子, 这与不同差错算子对应同一差错症状的情况不同. 本文下面所讨论的差错算子均是  $\overline{G}_n$  中的元素.

#### 4. 量子稳定子码差错症状分析

下面分析量子稳定子码的差错症状与校验矩阵之间的关系. 设量子稳定子码  $C(S) = [[n, k, 2t + 1]]$  的稳定子群为  $S = \langle M_1, M_2, \dots, M_{n-k} \rangle$ , 校验矩阵为  $H_{(n-k) \times 2n} = [H_X | H_Z]$ .  $X_x$  与  $M_j$  是否对易取决于  $M_j$  的第  $x$  个分量是否可分解出算子  $Z_x$  (即  $M_{jx} = Z_x$  或  $Y_x$ ). 如果  $M_{jx} = Z_x$  或  $Y_x$ , 那么  $\{X_x, M_j\} = 0$ , 否则  $[X_x, M_j] = 0$ . 由(3)式知,  $X_x (x = 1, 2, \dots, n)$  的差错症状恰好为校验矩阵  $H$  的第  $n+x$  列 (也是  $H_Z$  的第  $x$  列) 元素,  $Z_z$  的差错症状恰好为矩阵  $H$  的第  $z$  列 (也是  $H_X$  的第  $z$  列) 元素, 即

$$X_x M_j = (-1)^{\varphi(M_j)_{n+x}} M_j X_x = (-1)^{H_{j, n+x}} M_j X_x, \quad (14)$$

$$Z_z M_j = (-1)^{\varphi(M_j)_z} M_j Z_z = (-1)^{H_{jz}} M_j Z_z. \quad (15)$$

由(14)式和(15)式可知, 对于量子稳定子码  $C(S)$ ,  $X_x$  和  $Z_z$  的差错症状分别为

$$s_{X_x} = (H_{1, n+x}, H_{2, n+x}, \dots, H_{n-k, n+x}),$$

$$s_{Z_z} = (H_{1,z}, H_{2,z}, \dots, H_{n-k,z}),$$

其中  $s_{X_x}^j = H_{j, n+x}, s_{Z_z}^j = H_{jz}$ .

令

$$\begin{aligned} H &= (H_X | H_Z) \\ &= (H_X^1 \ H_X^2 \ \dots \ H_X^n | H_Z^1 \ H_Z^2 \ \dots \ H_Z^n), \end{aligned}$$

从而有

$$s_{X_x} = (H_Z^x)^T,$$

$$s_{Z_z} = (H_X^z)^T.$$

这里,  $H_X^x (x = 1, 2, \dots, n)$  表示  $H_X$  的第  $x$  列,  $H_Z^z (z = 1, 2, \dots, n)$  表示  $H_Z$  的第  $z$  列. 根据上述分析, 可得定理 1.

**定理 1** 如果量子稳定子码  $C(S)$  的校验矩阵为  $(H_X | H_Z)$ , 那么

$$s_X = H_Z^T,$$

$$s_Z = H_X^T.$$

根据定理 1 知, 任意差错算子  $E \in \overline{G}_n$  对应的差错症状为

$$\begin{aligned} s_E &= [\varphi(E)_X | \varphi(E)_Z] ([H_Z | H_X])^T \\ &= \varphi(E)_X H_Z^T + \varphi(E)_Z H_X^T, \end{aligned}$$

其中



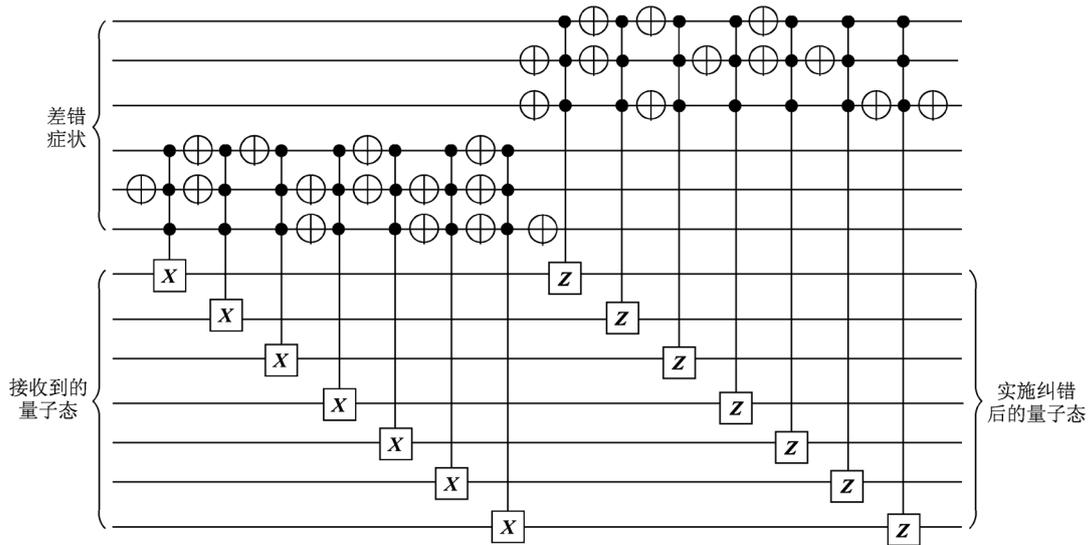


图2 [7,1,3]量子码差错纠正电路

逻辑算子  $\bar{X}_j (1 \leq j \leq k)$  都是由 Pauli 算子  $I, X, Y, Z$  张量得到. 这些算子都是酉算子, 它们的逆算子为本身. 所以, 量子稳定子码编码过程中应用的所有变换都是可逆的. 又因为连续的可逆变换 (可逆变换的乘积) 也是可逆的, 所以编码算子  $(\prod_{i=1}^{n-k} (I + M_i)) \bar{X}_1^{c_1} \cdots \bar{X}_k^{c_k}$  是可逆的. 由此可知, 译码算子就是编码算子的逆算子  $[(\prod_{i=1}^{n-k} (I + M_i)) \bar{X}_1^{c_1} \cdots \bar{X}_k^{c_k}]^{-1}$ . 因此, 从输出端逆向运行编码电路就可以得到输入端的原编码信息, 即量子稳定子码的译码网络就是其编码网络的逆过程<sup>[6]</sup>. 又由于算子  $\bar{X}_k^{c_k} \cdots \bar{X}_1^{c_1}$  之间相互对易<sup>[6]</sup>, 且算子  $(\prod_{i=1}^{n-k} (I + M_i))$  中各个算子  $I + M_i$  之间也满足对易关系, 它们还与  $\bar{X}_k^{c_k} \cdots \bar{X}_1^{c_1}$  对易, 所以  $\bar{X}_k^{c_k} \cdots \bar{X}_1^{c_1} (\prod_{i=1}^{n-k} (I + M_i)) = (\prod_{i=1}^{n-k} (I + M_i)) \bar{X}_1^{c_1} \cdots \bar{X}_k^{c_k}$ . 将量子稳定子码编码电路中的单量子比特门移到电路最右端, 而其他量子门的位置保持不变, 这样得到的电路也可以实现译码功能. 根据以上所述可

得 [7,1,3] 量子码的译码电路如图 3 所示.

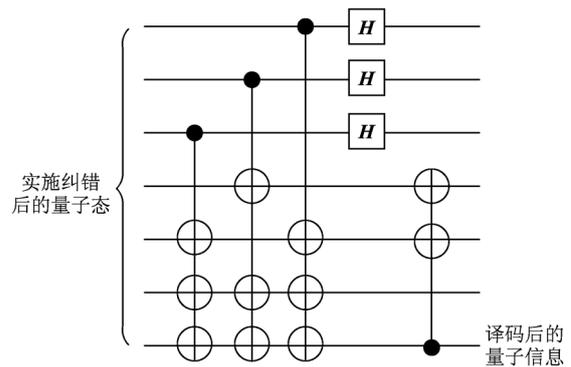


图3 [7,1,3]量子码的译码电路

## 7. 结 论

本文分析了差错症状矩阵与校验矩阵之间的关系, 得到差错症状矩阵完全由校验矩阵确定. 基于差错算子与差错症状之间的对应关系给出了构造量子差错纠正电路的方法, 提出了利用量子稳定子码的编码电路的逆电路实现译码的思想.

[1] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press) p72  
 [2] Calderbank A R, Rains E M, Shor P W, Sloane J A 1998 *IEEE*

*Trans. Inform. Theory* **44** 1369  
 [3] Ketkar A, Klappenecker A, Kumar S 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 4892  
 [4] Li Y, Zeng G H, Moon H L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4154

- [5] Cleve R, Gottesman D 1997 *Phys. Rev. A* **56** 76
- [6] Gottesman D 1997 *Ph. D. Dissertation* (Pasadena: California Institute of Technology)
- [7] Wu C H, Tsai Y C, Tsai H L 2005 *Circuits and Systems* (Kobo: Springer-Verlag) p23
- [8] Forney G D, Grassl M, Guha S 2007 *IEEE Trans. Inform. Theory* **53** 865
- [9] Wilde M M 2009 *Phys. Rev. A* **79** 062325
- [10] Poulin D, Chung Y J 2008 *Quantum Inform. Comput.* **8** 987
- [11] Evans Z W E, Stephens A M 2008 *Phys. Rev. A* **78** 062317
- [12] Poulin D, Tillich J P 2009 *IEEE Trans. Inform. Theory* **55** 2776
- [13] Li Z, Xing L J, Wang X M 2008 *J. Xidian Univ.* (Nat. Sci. Ed.) **35** 834 (in Chinese) [李卓、邢莉娟、王新梅 2008 西安电子科技大学学报(自然科学版) **35** 834]
- [14] Xing L J, Li Z, Bai B M, Wang X M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4695 (in Chinese) [邢莉娟、李卓、白宝明、王新梅 2008 物理学报 **57** 4695]

## Error correction and decoding for quantum stabilizer codes<sup>\*</sup>

Xiao Fang-Ying<sup>†</sup> Chen Han-Wu

(School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China)

(Key Laboratory of Computer Network and Information Integration of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 211189, China)

(Received 10 September 2010; revised manuscript received 17 December 2010)

### Abstract

Mapping the error syndromes to error operators is the core of quantum decoding network and the key step to realize quantum error correction. The definitions of the bit flip error syndrome matrix and the phase flip error syndrome matrix are presented, and then the error syndromes of Pauli errors are expressed in terms of the columns of the bit flip error syndrome matrix and the phase flip error syndrome matrix. It is also shown that the error syndrome matrix of a stabilizer code is determined by its check matrix, which is similar to the relationship between the classical error and the parity check matrix of classical codes. So, the techniques of error detection and error correction for classical linear codes can be applied to quantum stabilizer codes after some modifications. The error correction circuits are constructed based on the relationship between the error operator and error syndrom. The decoding circuit is constructed by reversing the encoding circuit because the encoding operators are unitary.

**Keywords:** stabilizer code, check matrix, error syndrome, Pauli operator

**PACS:** 03.67.Pp

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60873101), the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2008209) and the Foundation of Key Laboratory of Computer Network and Information Integration of Ministry of Education, China.

<sup>†</sup> E-mail: xfy504@hotmail.com