

Duffing 单边碰撞系统的混沌鞍合并激变*

冯进钤^{1)†} 徐伟²⁾

1) (西安工程大学理学院, 西安 710048)

2) (西北工业大学理学院, 西安 710072)

(2010年10月18日收到; 2011年4月15日收到修改稿)

以典型的 Duffing 单边碰撞系统为研究对象, 对系统中的混沌鞍进行了细致的分析. 研究表明, 系统的混沌鞍同样存在合并激变, 合并激变是由连接两个混沌鞍的周期鞍的稳定流形与不稳定流形相切所诱发, 相切使得边界上的混沌鞍与内部的混沌鞍发生碰撞而突然合并为一个较大的边界混沌鞍. 混沌鞍的合并激变行为最终会诱导混沌吸引子的合并激变发生.

关键词: Duffing 碰撞系统, 混沌鞍, 周期鞍, 稳定与不稳定流形

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

1. 引言

非线性动力系统中的混沌鞍与系统的混沌行为有紧密的联系. 关于光滑动力系统中的混沌鞍与混沌吸引子(CA)的演化关系已有大量的研究^[1-7], 它们所导致的全局分岔通常称为混沌激变^[1-3]. 这种激变是由于 CA 与周期鞍或混沌鞍碰撞所致, 主要包括内部激变、边界激变和合并激变. 内部激变是由于内部混沌吸引子与内部不稳定周期发生碰撞, 导致 CA 突然扩张或收缩. 边界激变是由于 CA 与边界上的周期鞍碰撞, 导致 CA 连同其吸引域一起消失. 合并激变是 CA 与其吸引域内的混沌鞍碰撞, 导致 CA 尺寸发生变化.

目前, 非光滑系统的研究主要集中在系统的周期解与混沌等稳态吸引子的动力学分析^[8-12], 而对于系统的不稳周期解和混沌鞍的研究甚少. 本文对 Duffing 单边碰撞系统的不稳周期解与瞬态混沌进行了细致分析. 研究表明, 系统的混沌鞍同样存在与混沌突变类似的合并激变, 从而导致混沌的复杂动力学.

2. Duffing 单边碰撞系统的稳态吸引子

考虑典型的 Duffing 单边碰撞系统, 其动力学方

程如下:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + ax + b\dot{x} + x^3 &= f\cos(\omega t) & (x < \Delta), \\ \dot{x}_+ &= -r\dot{x}_- & (x = \Delta), \end{aligned} \quad (1)$$

式中 Δ 表示间隙, 描述了系统状态的碰撞位置; r 表示碰撞恢复系数, 通常与碰撞面的材料有关, 满足 $0 < r \leq 1$; \dot{x}_- 和 \dot{x}_+ 分别表示碰撞前后时刻的瞬时速度. 令碰撞时刻为 t^* , 则有 $\dot{x}_\pm = \dot{x}(t^* \pm 0)$. 显然, 当状态变量满足 $x < \Delta$ 时, 系统由连续微分方程形式表示, 通常称之为“自由运动”; 当 $x = \Delta$ 时, 系统表现为离散的碰撞映射. 因此, 系统(1)通常又被称为混合系统.

令 $y = \dot{x}$, 固定系统(1)的部分参数为 $a = -0.5, b = 0.3, f = 0.5, r = 0.8, \Delta = 1.0$. 考虑谐和力频率 ω 对系统动力学的影响, 数值仿真的积分策略参见文献[13]. 选取 Poincaré 截面 $\Sigma = \{(x, y, \theta) \in R^2 \times S: \theta = \omega t \bmod(2\pi)\}$. 对于每个 ω 值, 在状态空间 $D = \{(x, y): -2 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$ 中随机选取服从均匀分布的 300 个初值点做 Poincaré 映射, 去掉 800 个瞬态周期点 (周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$), 保留 500 个周期点得到稳态多值分岔图, 结果如图 1 所示.

图 1 呈现了系统(1)全局稳态吸引子的演化情况及丰富的分岔和突变行为, 包括鞍结分岔(SNB)、倍周期分岔(PDB)和混沌内部激变(CIC)等. 从图 1

* 国家自然科学基金(批准号: 10872165)和陕西省教育厅科研计划(批准号: 2010JK557)资助的课题.

† E-mail: fengjinqian@mail.nwpu.edu.cn

可以看出,当 $\omega < \omega_{\text{SNB}} \approx 1.1317$ 时,系统只有一个全局稳定的周期 1 吸引子 P-1. 随着 ω 的增大,该周期吸引子 P-1 的拓扑性质保持不变. 当增大 ω 到 ω_{SNB} 时,系统(1)发生鞍结分岔,产生了一个结点型的周期 2 的吸引子 P-2 (对应的特征乘子为 $\lambda_1 = 0.8943, \lambda_2 = 0.0256$),该周期吸引子在 $\omega = \omega_{\text{PDB}}$

≈ 1.1395 处发生倍周期分岔后变为周期 4 的吸引子 P-4,最终由倍周期分岔道路形成混沌. 在此过程中,当 $\omega = \omega_{\text{CIC}} \approx 1.1424$ 时,系统(1)经历了一次 CIC,产生了一个包含两个窄带部分的 CA. 此时,三个吸引子 P-1, P-4 和 CA 共存,其相图和 Poincaré 截面图如图 2 所示.

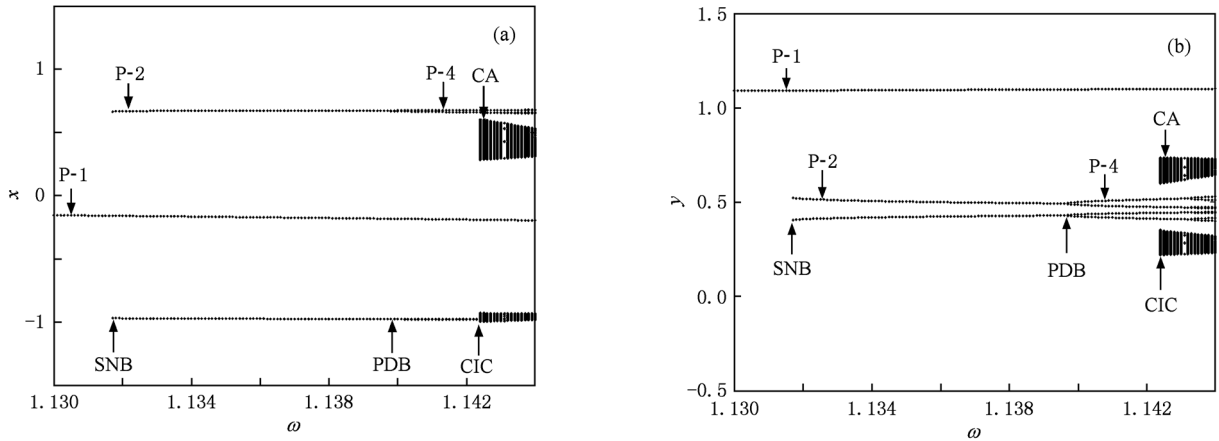


图 1 系统(1)的稳态多值分岔图 (a)位移 x 随 ω 的变化,(b)速度 y 随 ω 的变化

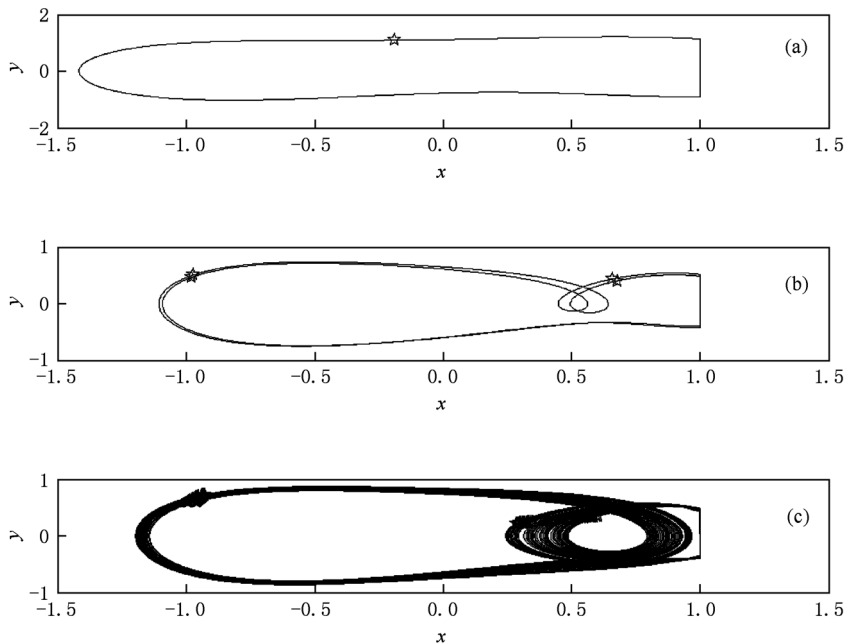


图 2 $\omega = 1.1424$ 时系统(1)中三个共存的吸引子 P-1, P-4 和 CA 的相图(实线)和 Poincaré 截面图(符号☆) (a)P-1,(b)P-4,(c)CA

当 ω 在 1.13—1.144 范围内变化时,系统(1)呈现出多吸引子共存现象. 对于共存吸引子情形,由最大 Lyapunov 指数(TLE)定义知,初始值取在不同吸引子的吸引域中,将导致不同的 TLE. 当取不同的初值条件时,TLE 随着 ω 的改变而变化,结果如图 3 所

示. 从图 3 可以看到,TLE 呈现出三个不同的分支,分别对应图 1 中的三个稳态吸引子的演化. 对比图 1 和图 3 可知,图 1 中吸引子的特性与图 3 中 TLE 的值一致. 当系统(1)发生分岔时,即 $\omega = \omega_{\text{SNB}}, \omega_{\text{PDB}}, \omega_{\text{CIC}}$ 时,相应的 TEL 分支为零或突然消失.

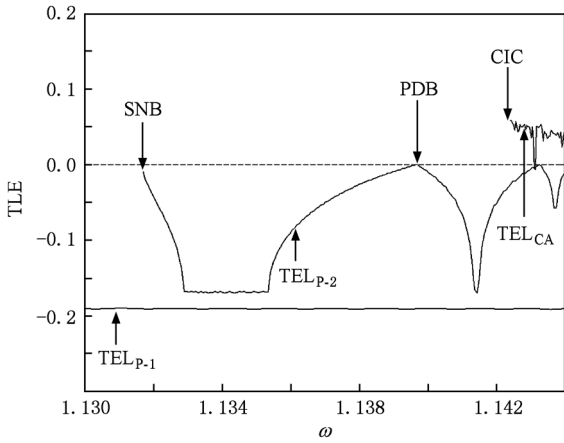


图3 TLE 随 ω 的变化

从图1和图3可以看到,当 ω 在1.13—1.144范围内变化时,系统(1)的稳态吸引子呈现了丰富的分岔现象:其中周期吸引子P-1没有发生分岔,保持拓扑性质不变;CIC的发生与鞍结分岔产生的周期鞍有着密切的联系,与激变前的混沌

鞍紧密相连,如图4所示.关于这方面的内容将另文讨论.

3. 混沌鞍的合并激变

从上述讨论可知,随着 ω 的变化,系统(1)的稳态吸引子表现出丰富的分岔现象.由混沌理论可知,通常激变诱导的混沌与系统中存在的混沌鞍有着密切的联系.在图1中,CA的产生预示着在混沌形成的前期必定存在混沌鞍的复杂动力学行为.

我们将集中研究CA产生前系统的瞬态动力学.固定初始条件 $(x_0, y_0) = (-0.95, 0.6)$,对于每个 ω 值,保留1000个周期点,得到系统(1)的瞬态分岔图,如图4所示.从图4可以看到,当 ω 在1.13—1.1424范围内变化时,系统(1)中存在瞬态混沌,这也表明系统(1)中存在混沌鞍.此外,当 ω 增大到1.13885时,瞬态混沌的带宽突然收缩,瞬态混沌尺寸的变化类似于CA的突变.当瞬态混沌突然收缩时,存在一个周期4的鞍点SP-4(对应的特征乘子为 $\lambda_1 = 81.258, \lambda_2 = 6.7 \times 10^{-6}$),构成瞬态混沌带的边界.随着 ω 远离激变临界值1.13885,小的瞬态混沌带逐渐脱离鞍点SP-4,这也暗示了两个混沌鞍的逐渐分离.

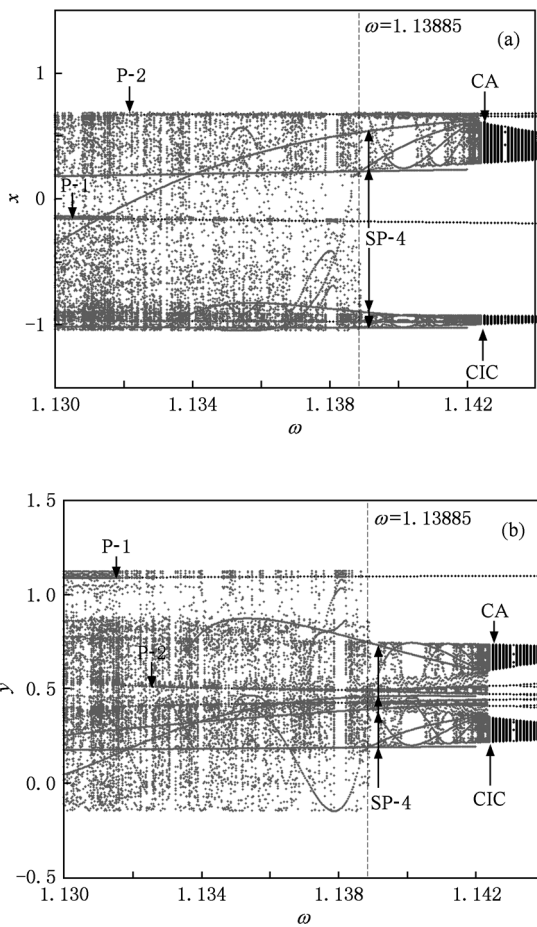


图4 系统(1)分岔图 浅色点表示瞬态,深色点表示稳态. (a)位移 x 随 ω 的变化,(b)速度 y 随 ω 的变化

对于瞬态行为与混沌鞍的复杂动力学,我们重点分析突变前后系统(1)的混沌鞍与周期鞍点SP-4的空间布局.当 $\omega = 1.13881$ 时,系统(1)存在一个较大的边界混沌鞍(BCS),如图5(a)所示.当 ω 增大到1.13885时,BCS发生破裂,演变成一个新的内部混沌鞍(ICS)和一个较小的BCS,如图5(b)所示.事实上,混沌鞍的突变可看作是由一个ICS与BCS发生碰撞合并为一个较大的BCS,这种混沌鞍的扩张类似于CA的合并激变,我们称之为混沌鞍的合并激变.此外,从图5(b)还可以看到,一个周期4的鞍点SP-4位于两个混沌鞍的交接处,连接两个混沌鞍ICS和BCS.当 $\omega = 1.13887$ 时,在交接处两个混沌鞍ICS和BCS逐渐远离,裂口越来越大,直至完全脱离后形成两个很清晰的混沌鞍,如图5(c)所示.

实际上,混沌鞍的合并激变与连接处周期鞍点SP-4的稳定流形与不稳定流形的相切有着紧密的联系.当 $\omega = \omega_{CSMC} \approx 1.13885$ 时,借助胞映射方

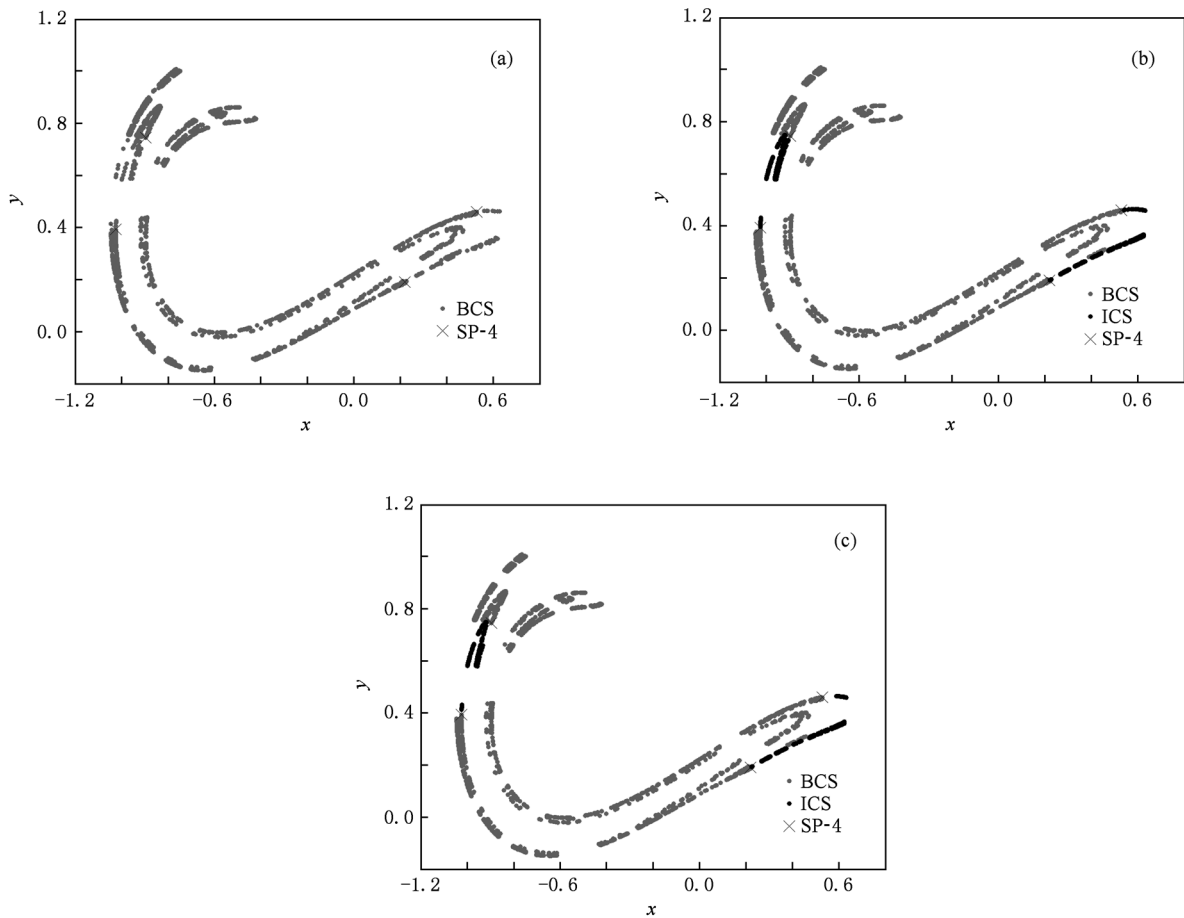


图5 系统的混沌鞍与边界周期鞍 (a) $\omega = 1.13881$, (b) $\omega = 1.13885$, (c) $\omega = 1.13887$

法^[14]计算周期鞍 SP-4 的稳定流形与不稳定流形, 结果如图 6 所示. 从图 5(b) 和图 6 可以看到, 周期鞍点 SP-4 的不稳定流形的两支分别构成 BCS 和 ICS. 此外, 我们还可以看到, SP-4 的稳定流形的一支与不稳定流形的一支相交缠绕形成 BCS, 而稳定流形的另一支与不稳定流形的另一支发生相切, 类似于 Smale 马蹄混沌的产生, 这种相切导致了 ICS 的出现.

当 ω 在临界值 ω_{CSMC} 附近变化时, 计算 SP-4 的稳定流形与不稳定流形, 其局部结构如图 7 所示. 从图 7 可以看到, 当 $\omega = 1.13887 > \omega_{\text{CSMC}}$ 时, $\text{SP}_{(1)}$ (符号 $\text{SP}_{(i)}$ 表示 SP-4 的第 i 个周期点, $i = 1, 2, 3, 4$) 的稳定流形的一支 $W_{\text{SP}_{(1)}}^{\text{S}}$ 与 $\text{SP}_{(4)}$ 不稳定流形的一支 $W_{\text{SP}_{(4)}}^{\text{U}}$ 没有相交, 如图 7(a) 所示. 随着 ω 减小到 1.13881 时, $W_{\text{SP}_{(1)}}^{\text{S}}$ 和 $W_{\text{SP}_{(4)}}^{\text{U}}$ 经历了相离、相切到相交的过程, 如图 7(a) — (c) 所示. 稳定流形与不稳定流形的相切到相交导致了缠绕结

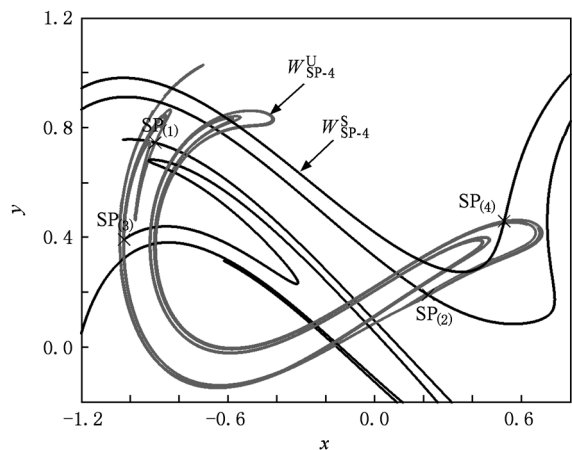


图6 周期鞍 SP-4 的稳定流形与不稳定流形 浅色表示不稳定流形 $W_{\text{SP-4}}^{\text{U}}$, 深色表示稳定流形 $W_{\text{SP-4}}^{\text{S}}$

构的出现, 关于这方面的理论分析还有待进一步的深入研究.

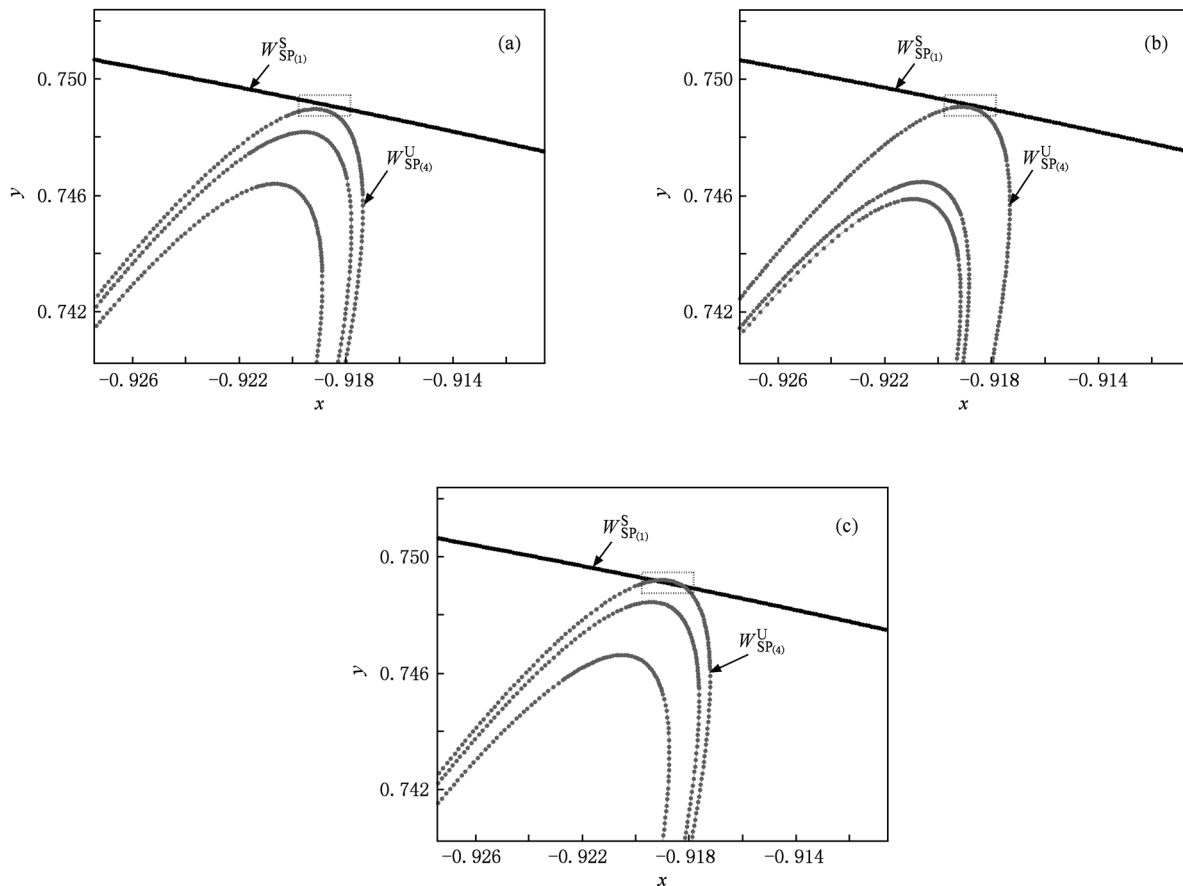


图7 SP-4 的稳定流形与不稳定流形的局部结构 (a) $\omega = 1.13887$ (相离), (b) $\omega = 1.13885$ (相切), (c) $\omega = 1.13881$ (相交)

4. 结 论

对于碰撞型的非光滑系统的不稳动力学和瞬态行为(如周期鞍、不稳定周期解、瞬态混沌与混沌鞍等)的研究所见文献较少,本文以典型的 Duffing 单边碰撞系统为研究对象,深入分析了系统中混沌鞍的演化.随着系统参数的变化,系统稳态吸引子呈现出诸多丰富的分岔与突变现象.事实上,混沌

的演化与混沌鞍的演化有着紧密的联系.而系统的混沌鞍同样存在类似于混沌突变的合并激变行为.通过对连接两个混沌鞍的周期鞍的稳定流形与不稳定流形的分析,阐明这种混沌鞍合并激变的发生机理.研究表明,当系统参数跨过临界值时,周期鞍的稳定流形与不稳定流形经历了相切到相交的演化,类似于 Smale 马蹄混沌的形成.本文的数值结果将对进一步的理论分析具有一定的指导意义.

[1] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
 [2] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1284
 [3] Hong L, Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese) [洪灵、徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]
 [4] Hong L, Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
 [5] Dai D, Ma X K, Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2729 (in Chinese) [戴栋、马西奎、李小峰 2003 物理学报 **52** 2729]

[6] He Q, Xu W, Li S, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 743 (in Chinese) [贺群、徐伟、李爽、肖玉柱 2008 物理学报 **57** 743]
 [7] He Q, Xu W, Li S, Xiao Y Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4021 (in Chinese) [贺群、徐伟、李爽、肖玉柱 2008 物理学报 **57** 4021]
 [8] Nordmark A B 1991 *J. Sound Vib.* **2** 279
 [9] Dankowicz H, Nordmark A B 1999 *Physica D* **136** 280

- [10] di Bernardo M, Budd C J, Champneys A R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2553
- [11] Chin W, Ott E, Nusse H E, Grebogi C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 4427
- [12] Virgin L N, Begley C J 1999 *Physica D* **130** 43
- [13] Feng J Q, Xu W, Niu Y J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 157 (in Chinese) [冯进钤、徐伟、牛玉俊 2010 物理学报 **59** 157]
- [14] Xu W, He Q, Li S 2007 *Symposium on Dynamics and Control of Nonlinear Systems with Uncertainty* (Vol. 2, Part 2) (Dordrecht: Springer) p117

Merging crisis of chaotic saddle in a Duffing unilateral vibro-impact system *

Feng Jin-Qian^{1)†} Xu Wei²⁾

1) (School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

2) (College of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 18 October 2010; revised manuscript received 15 April 2011)

Abstract

A computational investigation of chaotic saddles in a Duffing vibro-impact system is presented. Chaotic saddle crisis is investigated in a duffing vibro-impact system considered. This crisis is due to the tangency of the stable and unstable manifolds of period saddle connecting two chaotic saddles. The threshold of tangency induces the merging crisis of chaotic saddle, that is, as the system parameter crosses the critical value, a larger boundary chaotic saddle appears due to the merging of two chaotic saddles located on the basin boundary and in the internal basin respectively. In fact, this chaotic saddle crisis is responsible for the merging crisis of chaotic attractors eventually.

Keywords: Duffing vibro-impact system, chaotic saddle, period saddle, stable and unstable manifold

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872165) and the Scientific Research Program of the Education Bureau of Shanxi Province, China (Grant No. 2010JK557).

† E-mail: fengjinqian@mail.nwpu.edu.cn