

螺旋波动力学性质的元胞自动机 有向小世界网络研究*

田昌海¹⁾ 邓敏艺^{1)†} 孔令江¹⁾ 刘慕仁²⁾

1) (广西师范大学物理科学与技术学院, 桂林 541004)

2) (广西师范学院物理与电子工程学院, 南宁 530000)

(2010年7月1日收到; 2011年3月21日收到修改稿)

以 Greenberg-Hastings 激发介质元胞自动机模型为基础, 研究了有向小世界网络中重新连接概率 p 对螺旋波动力学行为的影响. 对于在规则网络下的稳定螺旋波, 施加有向小世界网络后发现: 当 p 值较小时, 原本稳定的螺旋波仍保持其稳定性. 随着 p 的增大, 先后观察到螺旋波持续漫游、螺旋波断裂以及螺旋波消失等现象. 通过监测系统的激发比率, 发现以上现象的产生源于介质激发性随 p 的增大而降低. 同时还发现元胞周期的变化也与 p 有关.

关键词: 元胞自动机, 螺旋波, 激发介质, 有向小世界网络

PACS: 05.45.Pq, 05.50.+q

1. 引言

自然界和社会领域中许多系统都可以用复杂网络来描述, 如科学家合作网^[1,2]、因特网^[3]、电力网^[4]、食物链网络^[5]等等. 近年来, 国内外掀起了研究复杂网络的热潮, 尤其是 Watts 和 Strogatz^[6] 在 1998 年提出小世界网络 (small-world network) 模型以及 Barabási 和 Albert^[7] 在 1999 年提出无标度网络 (scale-free network) 模型后, 复杂网络的研究更是有了重大的进展. 小世界网络的构建从规则网络开始, 以概率 p 随机重连每条边, 同时保证没有自连接和重复边. 在小世界网络模型中, 随机重新连接的边称为捷径 (short-cut) 或长程连接 (long-range link). $p = 0$ 对应着完全规则网络, $p = 1$ 对应着完全随机网络. 通过调节参数 p 的值就可以控制从规则网络到完全随机网络的过渡. 若网络中任意点对 (i, j) 与 (j, i) 对应着同一条边, 则该网络称为无向网络 (undirected network), 否则称为有向网络 (directed network). 有向网络的引入丰富了小世界网络的内容, 在模拟实际系统时起着重要的作用, 并引起了不同学科研究者的关注^[8-10].

螺旋波是复杂系统中常见的一种非平衡斑图,

它广泛地存在于物理、生物和化学系统中. 与靶波不同, 螺旋波一般不需要持续的激发源, 它是自维持的. 生物系统中出现螺旋波及其破碎常常是有害的, 如心脏中出现螺旋波时将产生心率失常或心动过速, 心室纤维颤动则与螺旋波破碎有密切关系. 怎样把心脏中的螺旋波肌电信号消除, 是当前心脏病学研究中的一个热点, 而螺旋波动力学性质的研究无疑能给螺旋波的消除提供理论依据. 随着复杂网络研究的深入, 小世界网络已成为人们对激发介质中螺旋波性质进行研究的工具之一. 何岱海等^[11] 研究了小世界网络中随机重连概率对非均匀介质中螺旋波斑图形成的影响, 发现适当的随机重连有助于非均匀激发介质中螺旋波的产生和维持, 原因在于随机重连具有降低非均匀介质的非均匀性作用. 钱郁等^[12] 则对可激发小世界网络的自持续振荡进行了研究, 并利用最短路径方法很好地解释了同步振荡现象. 这些工作丰富了激发介质研究的内容和方法. 目前对激发介质的研究主要集中在无向网络上, 而实际的神经系统和心脏系统中可能出现节点相互作用拓扑关系不对称的情况, 因此本文将构建有向的小世界网络来刻画节点连接的方向性.

元胞自动机 (cellular automata) 是一种时间、空间和状态都离散的数值模型, 由于其具有算法简

* 国家自然科学基金 (批准号: 10765002, 10962002, 81060307) 资助的课题.

† E-mail: dengminy97@tom.com

单、平行计算性好和计算速度快等优点,已经成为研究非线性复杂系统的有效工具^[13,14],并在激发介质的研究中得到了广泛的应用^[15-19]. Greenberg 和 Hastings^[20]在 1978 年提出的元胞自动机模型是模拟激发介质的最简单模型. 张立升等^[18]在此模型基础上数值模拟和分析了行波波速随邻域半径、激发阈值的变化关系,得到了单激发态下激发介质的激发条件. 戴瑜等^[19]则利用此模型对激发介质激发性降低的原因进行了探讨. 本文将以 Greenberg-Hastings 元胞自动机模型^[20]为基础建立有向小世界网络,利用有向小世界网络研究螺旋波动力学行为;计算机数值模拟螺旋波斑图演化与重新连接概率 p 之间的关系;数值计算研究不同重新连接概率 p 对系统激发比率和元胞激发周期的影响,并简要分析产生这些影响的机理.

2. 模 型

在二维 Greenberg-Hastings 元胞自动机模型^[20]中,元胞均匀分布在正方网格上,相邻格点间距为 1,系统大小为 $L \times L$ 个格点,采用扩展的 Moor 邻居,元胞邻域半径为 R ,元胞状态总数为 n . 在 t 时刻,格位 r 处元胞的状态 $u(r,t)$ 在集合 $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ 中取值. 状态 $u(r,t) = 0$ 代表静息态, $u(r,t) = 1,2,\dots,E$ 代表激发态, $u(r,t) = E+1,E+2,\dots,n-1$ 代表不应态. 演化规则如下:如果 $u(r,t)$ 是激发态或不应态,则 $u(r,t+1) = u(r,t) + 1 \bmod n$;如果 $u(r,t)$ 是静息态,则保持不变,除非元胞 r 的邻域中至少有 k 个元胞处于激发状态,在这种情况下, $u(r,t+1) = 1$. 这里的 k 称为激发阈值.

有向小世界网络模型^[10]的构建从规则网络开始. 在规则网络中,除了边界附近的点,每个节点与其周围的 $(2R+1)^2 - 1$ 个节点相邻,每一邻对之间分别用一对相互指向的线连接,则每个节点有 $(2R+1)^2 - 1$ 条出线指向它的 $(2R+1)^2 - 1$ 个近邻节点,同时又有 $(2R+1)^2 - 1$ 条进线指向该节点. 在此规则网络的基础上对所有节点的出线以概率 p 随机重连,重连时保持始点不变,终点则为随机选择的一个点,同时保证没有自连接和重复连接,这样就得到了一个有向小世界网络. 在有向小世界网络上,每个节点的邻居是以该节点为始点,通过出线连接其他节点. 显然,有向小世界网络中节点的邻居不再是规则的.

3. 数值计算结果及分析

计算机数值模拟时取系统大小为 300×300 个格点,系统常数为 $R = 3, E = 1, K = 6, n = 9$, 采用零流边界条件. 首先在系统边界上产生一行行波,当行波运动到系统中间时,将其截断并去掉一半,剩下的一半在演化到 160 时步时形成稳定的螺旋波. 在演化 400 时步时开始施加有向小世界网络. 以重新连接概率 p 生成网络结构后,保持节点的长程连接不变.

3.1. 重新连接概率 p 对螺旋波波形的影响

为了研究重新连接概率 p 对螺旋波稳定性的影响,做相应的计算机数值模拟,发现施加有向小世界网络后,原本稳定的螺旋波的演化行为随重新连接概率 p 的不同而有所不同,如图 1 所示.

计算机模拟结果表明,取参数 $R = 3, E = 1, K = 6, n = 9$ 时,在规则网络下系统形成的螺旋波是稳定的,如图 1(a) 所示. 随着有向小世界网络的施加,螺旋波的稳定性会发生改变. 当重新连接概率 $p \in (0, 0.07]$, 即重新连接概率很小时,螺旋波经过漫游后仍处于稳定的螺旋波状态,波头位置变化很小,如图 1(b), (c) 所示. 当重新连接概率增大至 $p \in (0.07, 0.27]$, 原本稳定的螺旋波出现持续漫游,波纹间距变大,如图 1(d) 所示. 当重新连接概率 $p \in (0.27, 0.50]$, 螺旋波漫游幅度大,螺旋波波头移出边界,且 p 值越大螺旋波越容易断裂和消失,同时斑图显示螺旋波的断裂具有随机性,如图 1(e) — (h) 所示. 当重新连接概率 $p \in (0.50, 0.70]$, 螺旋波波前不稳定,斑图轮廓变得模糊,如图 1(i) 所示;在演化一段时间后,斑图中元胞状态杂乱分布,波纹扭曲严重,间隔不均匀,激发态元胞明显增多,如图 1(j) 所示;经过短暂的不应期后,激发态元胞明显减少,如图 1(k) 所示;随后螺旋波迅速消失,且从斑图中可以看出螺旋波的消失具有全局性,如图 1(l) 所示. 研究表明,当 $p > 0.5$ 时,螺旋波消失的速度随 p 值的增加而增大.

显然,重新连接概率 p 值越大,斑图上静息态的宽度越大,这意味着系统元胞处于静息态的时间越长,甚至出现元胞一直处于静息态的情况. 为探讨图 1 中斑图演化随 p 变化的原因,下面对元胞周期随 p 的变化关系进行计算机数值模拟和研究.

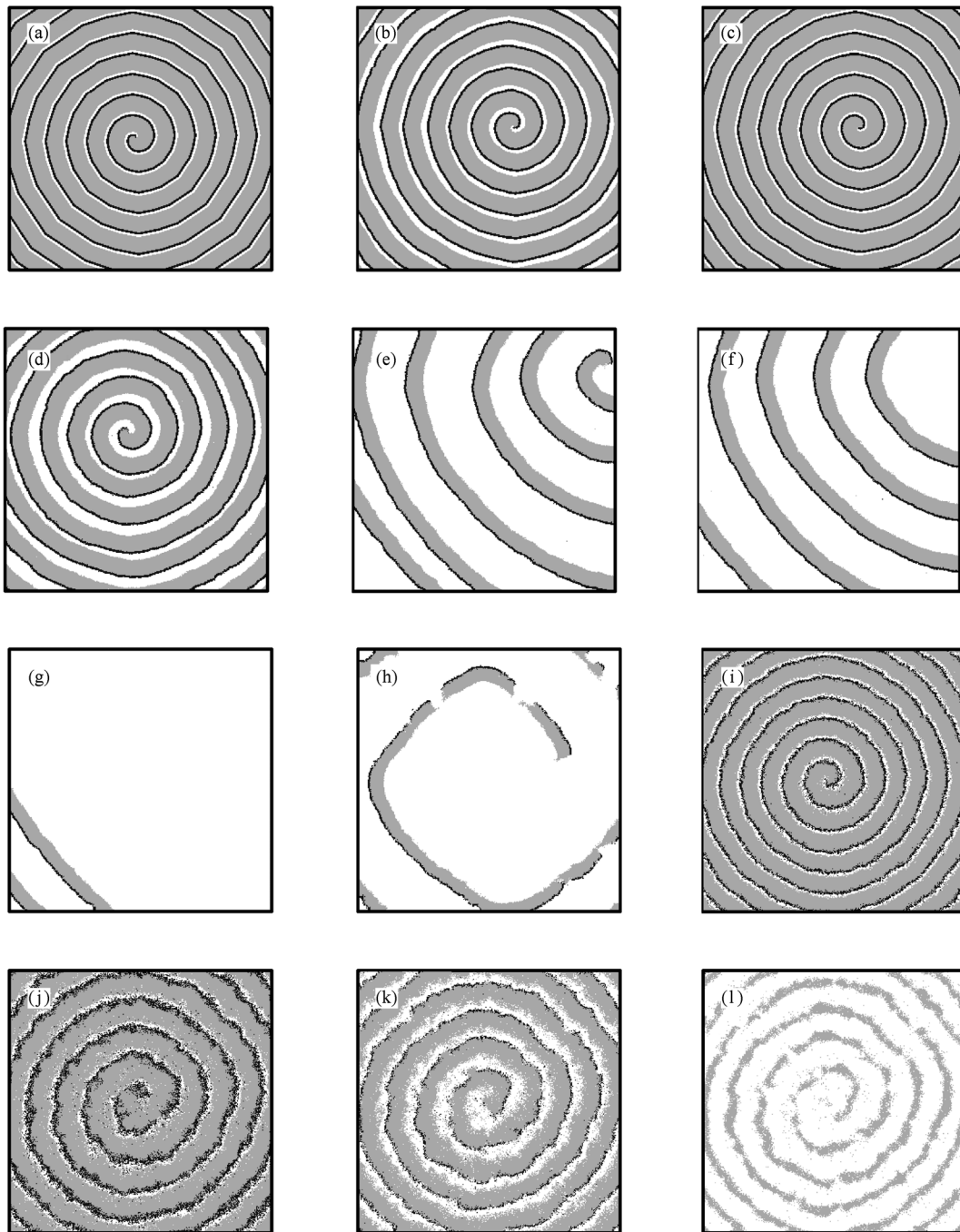


图1 不同 p 值下不同时刻的螺旋波斑图 (a) $p=0, t=40000$; (b) $p=0.05, t=8000$; (c) $p=0.05, t=40000$; (d) $p=0.20, t=40000$; (e) $p=0.27, t=30300$; (f) $p=0.27, t=30350$; (g) $p=0.27, t=30450$; (h) $p=0.35, t=660$; (i) $p=0.55, t=500$; (j) $p=0.55, t=1567$; (k) $p=0.55, t=1574$; (l) $p=0.55, t=1580$

3.2. 重新连接概率 p 对任意点周期的影响

定义任意元胞的周期 T 为该元胞处于相邻两个激发态的时差. 对系统中心位置 $(150, 150)$ 处元胞的周期进行监测, 得到不同 p 值下该位置元胞状态变化周期随时间的变化关系, 结果如 2 图所示. 研究

表明, 系统中其他任意元胞的周期随时间的变化关系与图 2 相似.

图 2 的数值模拟结果显示, 当 p 较小时, 元胞周期发生小幅度振荡后趋于稳定且其值等于规则网络下的元胞周期, 如图 2(a), (b) 所示. 随着 p 增大, 元胞周期振荡幅度增大, 如图 2(c) 所示. 对于元胞

周期振荡幅度随 p 增大而增大的原因,我们分析如下:元胞的激发不仅受到近邻元胞状态的影响,还受到远邻元胞的作用.以系统中任意一个处于静息态的元胞为例,在随机重连边时,如果原始终点的状态为激发态,若选中节点的状态也为激发态,则重连操作对该元胞的周期没有影响;若选中节点的状态为静息态或者不应态,则可能出现与之相邻节点处于激发态的总数小于激发阈值,从而使激发周期变长.同理,可分析得知重连操作也可能使元

胞的激发周期缩短.因此,重连操作对元胞周期的影响是双重的,两者的综合作用导致元胞激发周期的振荡变化,且 p 越大周期的振荡幅度越大.当 p 增至 0.35,元胞周期随时间进行短期振荡后无法测得,如图 2(d) 所示.通过对元胞状态的观察,发现无法观测周期是因为元胞一直处于静息态.元胞一直处于静息态意味着元胞激发性的消失.为验证这个推测,下面对不同 p 值下系统激发比率的变化进行计算机数值模拟.

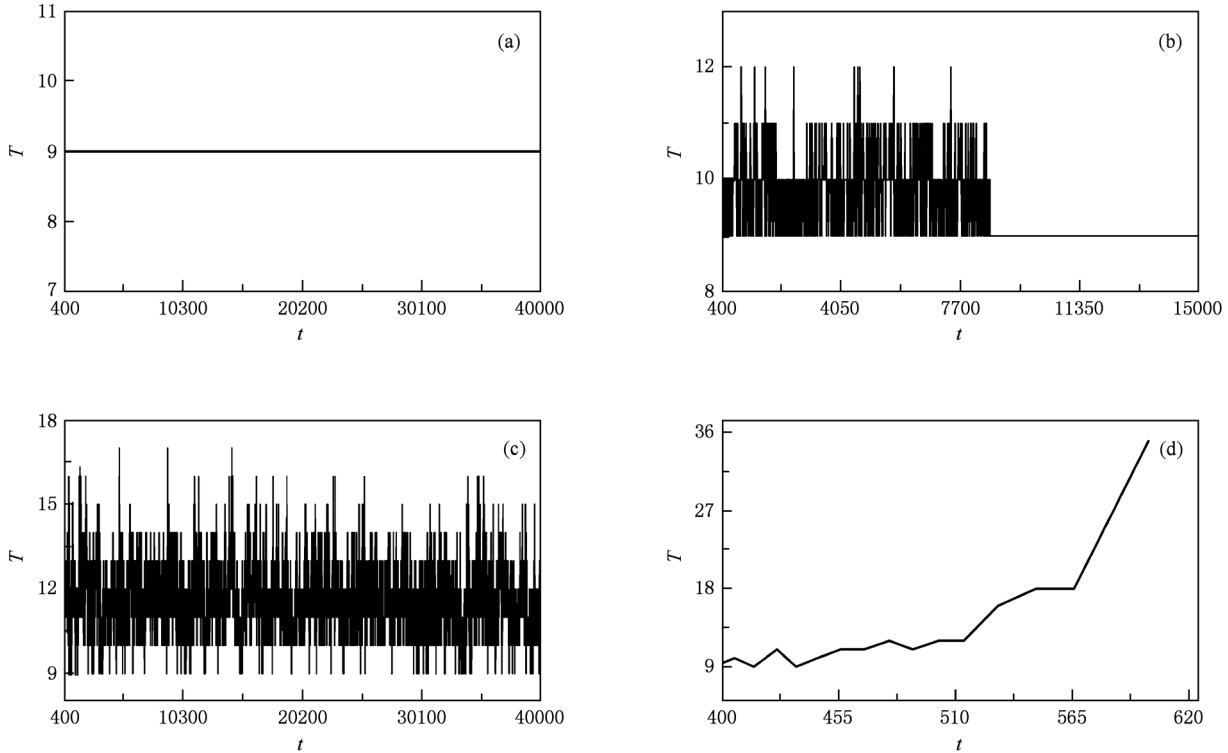


图 2 不同 p 值下元胞周期 T 随时间 t 的变化关系 (a) $p=0.0$, (b) $p=0.05$, (c) $p=0.20$, (d) $p=0.35$

3.3. 重新连接概率 p 对系统激发比率的影响

介质的激发性强弱可通过系统的激发比率来体现.定义 t 时刻系统的激发比率 $F_e(t)$ 为该时刻系统中处于激发态的元胞数与系统总元胞数之比.对系统作不同的重连,计算机数值模拟得到不同 p 值下 $F_e(t)$ 随时间 t 的变化如图 3 所示.

计算机数值模拟结果表明,在所选参数 $R = 3, E = 1, K = 6, n = 9$ 下,规则网络的激发比率随时间规则振荡,简单的数值处理后可知其均值为 0.1111,如图 3(a) 所示.随着有向小世界网络的施加,系统的激发性发生改变.当重新连接概率 $p \in (0, 0.07]$,系统激发比率经短暂调节后回到

均值为 0.1111 的规则振荡,这表明长程连接数很少时重新连接对系统的激发性影响很小,如图 3(b) 所示.当重新连接概率增大至 $p \in (0.07, 0.27)$,系统的激发比率从均值 0.1111 迅速降低,随后作无规振荡,且再不能回到 0.1111 的均值,这表明长程连接数的增多导致了系统激发性的降低,但激发比率非零表明系统还具有可激发性,如图 3(c) 所示.随着重新连接概率 p 增加至 $p \in (0.27, 0.50]$,系统激发比率无规律振荡一段时间后降至零,如图 3(d) 所示.当重新连接概率 $p \in (0.50, 0.70)$ 时,系统激发比率在小幅度振荡后出现大峰值然后迅速降低至零,系统的可激发性消失,如图 3(e) 所示.对图 3(e) 的分析如

下:重新连接概率 p 足够大时,长程连接数很多,几乎能够使所有处于静息态的元胞都被激发,于是 $F_e(t)$ 出现一个峰值. 这些被激发的元胞经过一个短暂的不应期后到达静息态,于是系统中没有足够多的激发态元胞来维持系统的激发性,导致系统迅速进入总体静息态,系统激发性消失. 当 $p \geq 0.70$ 时,激发比率迅速降低到零,系统的可激发性消失,如图 3(f) 所示. 这是因为 $p \geq 0.70$ 时重新连

接概率太大,长程连接数过多,而系统中处于激发态元胞的密度很小,以至于大多数处于静息态的元胞不能被激发. 显然,重新连接概率 p 增大使系统内部结构的随机程度增高是导致介质激发性降低的原因. 文献[11]指出,系统的均匀性是螺旋波得以维持的条件之一. 本文的系统是均匀激发介质,随机重连只会破坏系统原本的均匀性,因此重连概率的提高只会加剧对螺旋波稳定性的破坏.

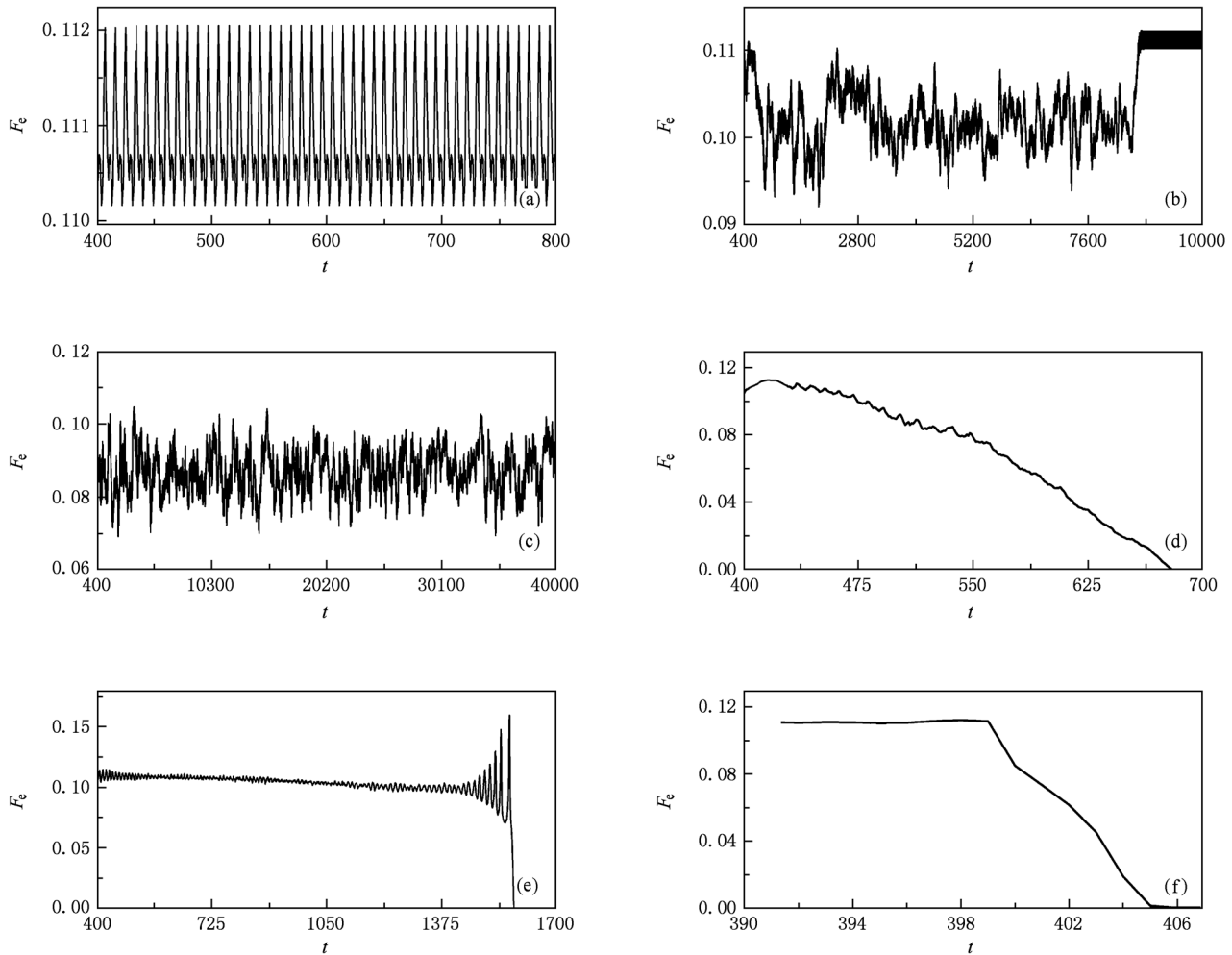


图3 不同 p 值下系统激发比率 $F_e(t)$ 随时间 t 的变化关系 (a) $p=0.0$, (b) $p=0.05$, (c) $p=0.20$, (d) $p=0.35$, (e) $p=0.55$, (f) $p=0.73$

4. 结 论

本文以 Greenberg-Hastings 元胞自动机模型为基础,对有向小世界网络中螺旋波的动力学行为进行了计算机数值模拟,探讨重新连接概率 p 对螺旋波动力学行为的影响. 在所选参数 $R = 3, E = 1, K = 6, n = 9$ 下,规则网络下的螺旋波是稳定的. 施加

有向小世界网络后,计算机模拟结果发现:当 p 较小时,原本稳定的螺旋波仍保持其稳定性. 随着 p 的增大,依次观察到螺旋波漫游、螺旋波断裂和螺旋波消失等现象. 随着有向小世界网络的施加,原本稳定的元胞周期发生振荡变化,且振幅随 p 值增大而增大. 元胞周期随时间发生振荡的原因在于有向小世界网络的施加对元胞周期有增长和缩短两方面的影响. 介质的激发性随着重新连接概率 p 的增

大而减低,正是这个原因导致 p 增大时原本稳定的螺旋波依次出现漫游、断裂乃至消失等现象. 这些

结果进一步证实了小世界网络中螺旋波稳定性对系统均匀性的依赖^[11,12].

- [1] Newman M E J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016131
- [2] Newman M E J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016132
- [3] Huberman B A, Adamic L A 1999 *Nature* **401** 131
- [4] Amaral L A N, Scala A, Barthelemy M, Stanley H E 2000 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **97** 11149
- [5] Williams R J, Martinez N D 2000 *Nature* **404** 180
- [6] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [7] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [8] Parisi G J 1986 *Physica A* **19** L675
- [9] Crisanti A, Falcioni M, Vulpiani A 1993 *Physica A* **26** 3441
- [10] Sánchez A D, López J M, Rodríguez M A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 048701
- [11] He D H, Hu G, Zhan M, Ren W, Gao Z 2002 *Phys. Rev. E* **65** 055204
- [12] Qian Y, Liao X H, Huan X D, Mi Y Y, Zhang L S, Hu G 2010 *Phys. Rev. E* **82** 026107
- [13] Bai K Z, Tan H L, Kong L J, Liu M R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040510
- [14] Li Q, Guo Q Y, Li R D 2006 *Chin. Phys. B* **15** 778
- [15] Nishiyama A, Tanaka H, Tokihiro T 2008 *Physica A* **387** 3129
- [16] Markus M, Hess B 1990 *Nature* **347** 56
- [17] Bub G, Shrier A, Glass L 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 028105
- [18] Zhang L S, Deng M Y, Kong L J, Liu M R, Tang G N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4493 (in Chinese) [张立升、邓敏艺、孔令江、刘慕仁、唐国宁 2009 物理学报 **58** 4493]
- [19] Dai Y, Tang G N 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1491 (in Chinese) [戴瑜、唐国宁 2009 物理学报 **58** 1491]
- [20] Greenberg J M, Hastings S P 1978 *SIAM J. Appl. Math.* **34** 515

Cellular automaton simulation with directed small-world networks for the dynamical behaviors of spiral waves^{*}

Tian Chang-Hai¹⁾ Deng Min-Yi^{1)†} Kong Ling-Jiang¹⁾ Liu Mu-Ren²⁾

1) (College of Physics and Technology, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

2) (College of Physics and Electronic Engineering, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530000, China)

(Received 1 July 2010; revised manuscript received 21 March 2011)

Abstract

In this paper, we study the influence of the rewiring probability p of the directed small-world network on dynamical behavior of spiral wave using the Greenberg-Hastings cellular automaton model. The computer simulation results show that when p is small enough, the stable spiral wave under the regular networks keeps its stability unchanged, and when p is increased, the phenomenon such as meandering, breakup and disappearance of the spiral waves appears. The relation between the excitability and p leads to the conclusion that the occurrence of the above phenomenon originates from the reducing of the excitability. On the other hand, the period of cell is also related to p .

Keywords: cellular automaton, spiral wave, excitable media, directed small-world network

PACS: 05.45.Pq, 05.50.+q

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10765002, 10962002, 81060307).

[†] E-mail: dengminy97@tom.com