

# 一类混沌系统的修正函数投影同步

李建芬<sup>1)†</sup> 李农<sup>2)</sup>

1) (空军工程大学理学院, 西安 710051)

2) (空军工程大学工程学院, 西安 710038)

(2010年10月23日收到; 2011年3月24日收到修改稿)

针对一类混沌系统, 通过构造合适的响应系统, 提出一种修正函数投影同步方法. 基于单向耦合同步原理, 给出了两种响应系统的设计方案, 由于只需向响应系统传送一个驱动变量即可实现混沌修正函数投影同步, 因而实用性更强. 利用 Lyapunov 稳定性理论给出了相应的证明. 最后以一个超混沌系统进行了数值仿真, 仿真结果进一步表明该方法的有效性.

**关键词:** 混沌系统, 修正函数投影同步, 单向耦合

**PACS:** 05.45.Xt

## 1. 引言

自 Pecora 和 Carroll 于 20 世纪 90 年代初提出混沌系统的完全同步<sup>[1]</sup>方法以来, 混沌系统的同步研究取得了巨大的进展<sup>[2-10]</sup>, 相继提出了各种同步方案. 这些方案主要有反同步、相同步<sup>[2]</sup>、滞后同步<sup>[3]</sup>、广义同步<sup>[4-8]</sup>、投影同步<sup>[9,10]</sup>、修正投影同步<sup>[11,12]</sup>、函数投影同步<sup>[13,14]</sup>等. 其中, 投影同步是指驱动和响应系统的同步向量之比为一个常数, 当将该比例常数改为某一函数或常数矩阵时, 便构成函数投影同步或修正投影同步. 最近, 有学者将修正投影同步的比例常数矩阵扩展为比例函数矩阵, 提出了新的混沌系统同步方法, 即修正函数投影同步<sup>[15-17]</sup>, 它是指驱动系统和响应系统之间按照任意给定的比例函数矩阵关系进行同步. 该同步方法应用于保密通信时, 因为对通信双方以外的第三方而言, 比例函数是不可预知的, 从而增加了混沌信号在传输过程中被截获破译的难度, 可望获得更好的安全性. 文献[15]基于主动控制法, 实现了 Lorenz 系统的修正函数投影同步; 文献[16,17]分别采用自适应方法和主动控制思想研究了不同超混沌系统之间的修正函数投影同步. 但上述方法只针对具体的混沌系统, 其适用范围较窄.

本文从一般的混沌系统出发, 通过构造合适的

响应系统, 利用单向耦合混沌同步原理, 提出一种修正函数投影同步方法, 设计的响应系统具有一定的规律性, 与现有方法相比实用性更强, 适用范围更广. 基于 Lyapunov 稳定性理论给出了相应的证明, 以 Chen, Yang, Qi 和 Yuan<sup>[18]</sup>基于著名的 Lorenz 系统提出的一个命名为 CYQY 超混沌系统为例进行了数值仿真, 仿真结果进一步表明了该方法的有效性.

## 2. 修正函数投影同步方案描述

考虑具有如下形式的同步混沌系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (2)$$

这里  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$  是  $n$  维状态向量;  $\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in R^n$  是连续光滑非线性函数, 且满足 Lipschitz 条件, 即有

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

式中  $L > 0$  为 Lipschitz 常数.

对于驱动系统(1)和响应系统(2), 任取初始值, 若存在函数矩阵

$$\mathbf{M}(t) = \text{diag}[m_1(t), m_2(t), \dots, m_n(t)],$$

使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{y}\| = 0 \quad (3)$$

† E-mail: ln2807@163.com

或

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y - Mx\| = 0, \quad (4)$$

则称系统(1)和系统(2)获得修正函数投影同步. 对于  $\forall t$ , 假设  $m_i(t) \neq 0$ , 我们称  $M(t)$  为比例函数矩阵,  $m_i(t)$  为比例函数且为连续可微的有界函数. 显然, 当  $m_1(t) = m_2(t) = \dots = m_n(t)$  时, 修正函数投影同步退化为函数投影同步.

### 2.1. 实现 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - My\| = 0$ 的修正函数投影同步方案

以系统(1)作为驱动系统, 基于混沌系统的单方向耦合同步原理, 构造如下的响应系统:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(y, x) \\ &= M^{-1}[f(My) + K(x - My) - \dot{M}y], \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $K = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$  为反馈增益矩阵. 定义系统(1)与系统(5)的同步误差为

$$\begin{aligned} e &= x - My \\ &= [x_1 - m_1(t)y_1, x_2 - m_2(t)y_2, \dots, x_n - m_n(t)y_n], \end{aligned}$$

因而误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - M\dot{y} - \dot{M}y \\ &= f(x) - MM^{-1}[f(My) + K(x - My) \\ &\quad - \dot{M}y] - \dot{M}y \\ &= f(x) - f(My) - Ke. \end{aligned} \quad (6)$$

选择 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}e^T e,$$

那么有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T \dot{e} = e^T [f(x) - f(My) - Ke] \\ &= e^T [f(x) - f(My)] - e^T Ke \\ &\leq \|e^T\| \|f(x) - f(My)\| - e^T Ke. \end{aligned}$$

由于  $f(x)$  满足 Lipschitz 条件, 因此有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq L \|e\|^2 - e^T Ke \\ &= L \sum_{i=1}^n e_i^2 - \sum_{i=1}^n k_i e_i^2 \\ &= (L - k) \sum_{i=1}^n e_i^2, \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $\|\cdot\|$  为欧氏空间的 2 范数;  $k = \min\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ . 当  $\|e\| = 0$ , 有  $\dot{V}(t) = 0$ ; 若选择合适的  $K$ , 满足  $k > L$ , 则有  $\dot{V}(t) < 0$ . 根据 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统(6)在原点渐近稳定, 即实现了响应系统(5)全局渐近修正函数投影同步驱动系统(1).

上述基于 Lyapunov 函数推出的误差系统(6)的稳定条件, 仅是系统(5)与系统(1)实现修正函数投影同步的充分条件而非必要条件. 事实上, 许多混沌系统仅通过一个耦合项就可以获得修正函数投影同步, 即选择  $K = \text{diag}(0, \dots, k_i, \dots, 0)$ . 此时, (7)式可表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq L \|e\|^2 - e^T Ke \\ &= L \left( \sum_{i=1}^n e_i^2 \right) - k_i e_i^2 \\ &= Ln \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n} - k_i e_i^2 \\ &= Ln \tilde{e}^2 - k_i e_i^2, \end{aligned}$$

式中  $\tilde{e}^2$  为  $(e_1^2, e_2^2, \dots, e_n^2)$  的平均值. 若选择驱动系统的一个变量  $x_i$ , 使  $\tilde{e}^2 \leq e_i^2$ , 则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq Ln \tilde{e}^2 - k_i e_i^2 \\ &\leq (Ln - k_i) e_i^2. \end{aligned}$$

选择  $k_i > Ln$ , 即可使  $\dot{V}(t) < 0$ .

### 2.2. 实现 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y - Mx\| = 0$ 的修正函数投影同步方案

依然以系统(1)作为驱动系统, 构造响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= g(y, x) \\ &= M \left[ f(M^{-1}y) + K(x - M^{-1}y) - \frac{d}{dt}(M^{-1})y \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

定义系统(1)与系统(8)的同步误差为

$$\begin{aligned} e &= x - M^{-1}y \\ &= \left[ x_1 - \frac{1}{m_1(t)}y_1, x_2 - \frac{1}{m_2(t)}y_2, \dots, \right. \\ &\quad \left. x_n - \frac{1}{m_n(t)}y_n \right]. \end{aligned}$$

此时的误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - M^{-1}\dot{y} - \frac{d}{dt}(M^{-1})y \\ &= f(x) - M^{-1}M \left[ f(M^{-1}y) - \frac{d}{dt}(M^{-1})y \right. \\ &\quad \left. - K(x - M^{-1}y) \right] - \frac{d}{dt}(M^{-1})y \\ &= f(x) - f(M^{-1}y) - Ke. \end{aligned} \quad (9)$$

与(7)式比较, 可得出类似的结论. 选择合适的  $K$ , 满足  $k > L$ , 误差系统(9)在原点渐近稳定, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ x_i - \frac{1}{m_i(t)}y_i \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [y_i - m_i(t)x_i] = 0.$$

### 3. 数值仿真

以超混沌 CYQY 系统为例说明本文提出的方案. 其动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l(x_2 - x_1) + kx_2x_3, \\ \dot{x}_2 &= nx_1 - jx_1x_3 + x_2 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - mx_3, \\ \dot{x}_4 &= -sx_2. \end{aligned} \quad (10)$$

当参数  $l = 35, m = 4.9, n = 25, j = 5, k = 35, s = 100$  时, 系统呈超混沌状态.

以系统(10)作为驱动系统, 按照实现

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{x} - \mathbf{M}\mathbf{y} \| = 0$$

的修正函数投影同步方案的设计, 响应系统为

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{m_1(t)} [l(m_2y_2 - m_1y_1) + km_2y_2m_3y_3 - \dot{m}_1y_1],$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{m_2(t)} [nm_1y_1 - jm_1y_1m_3y_3 + m_2y_2 + m_4y_4$$

$$\begin{aligned} &+ k_2(x_2 - m_2y_2) - \dot{m}_2y_2], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{m_3(t)} [m_1y_1m_2y_2 - mm_3y_3 - \dot{m}_3y_3], \\ \dot{y}_4 &= \frac{1}{m_4(t)} [-sm_2y_2 - \dot{m}_4y_4]. \end{aligned} \quad (11)$$

选择函数矩阵时, 应注意使比例函数不能为零. 令

$$\mathbf{M} = \text{diag}[m_1(t), m_2(t), m_3(t), m_4(t)],$$

有

$$\dot{\mathbf{M}} = \text{diag}[\dot{m}_1(t), \dot{m}_2(t), \dot{m}_3(t), \dot{m}_4(t)],$$

其中

$$m_1(t) = 6.1 + \sin t + 2\sin(2t) + 3\sin(3t),$$

$$m_2(t) = 0.1 + 2\sin^2(2t),$$

$$m_3(t) = 0.1 + 2\sin^2(2t) + 3\sin^2(3t),$$

$$m_4(t) = 10.1 + \sin t + 2\sin(2t) + 3\sin(3t)$$

$$+ 4\sin(4t).$$

$m_1(t), m_2(t), m_3(t), m_4(t)$  的时域波形见图 1.

驱动系统(1)与响应系统(5)的初始点分别选取为

$$\mathbf{x}(0) = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0.5],$$

$$\mathbf{y}(0) = [1 \quad -3 \quad 0 \quad 0];$$

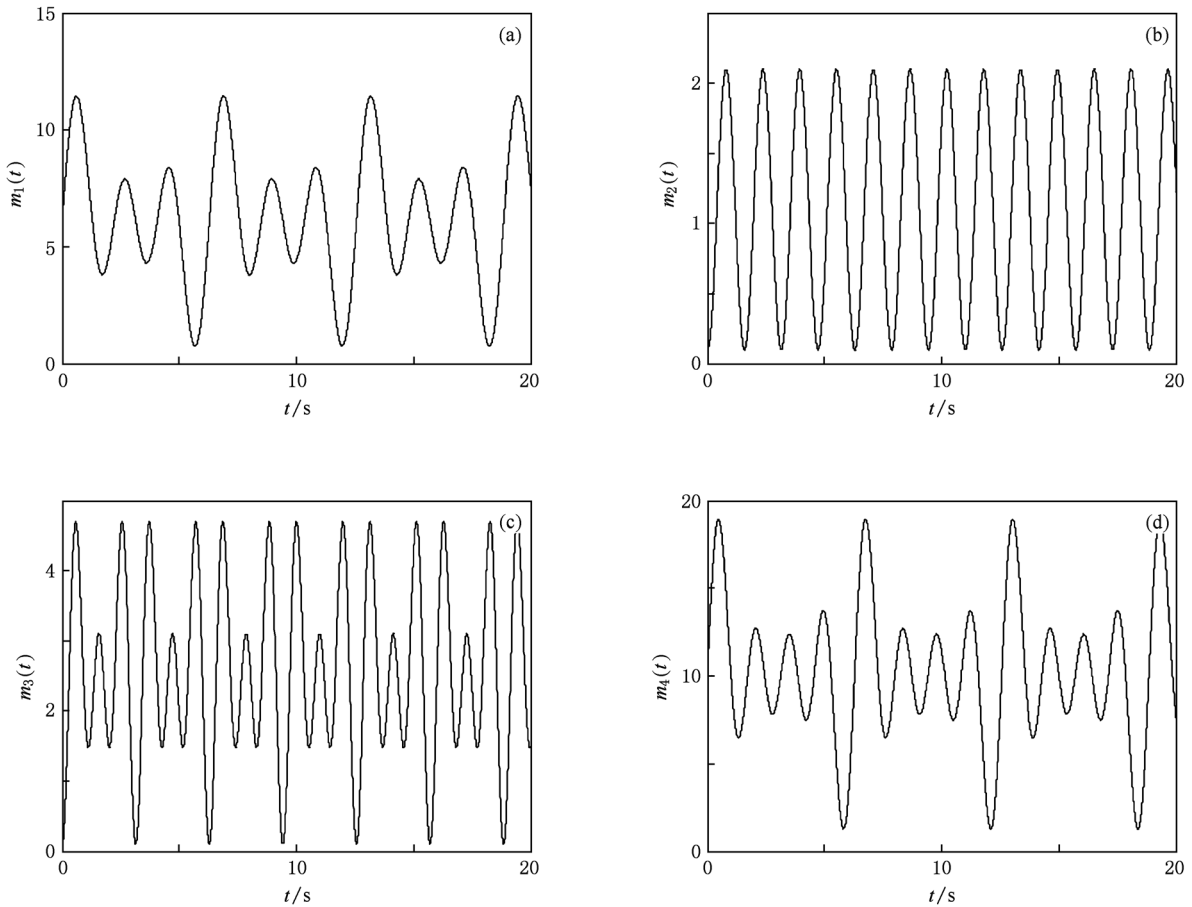


图 1 比例函数  $M(t)$  的时域波形 (a)  $m_1(t)$ , (b)  $m_2(t)$ , (c)  $m_3(t)$ , (d)  $m_4(t)$

反馈系数  $k_2 = 30$ . 系统(10)与系统(11)实现修正投影同步的模拟结果见图2和图3.

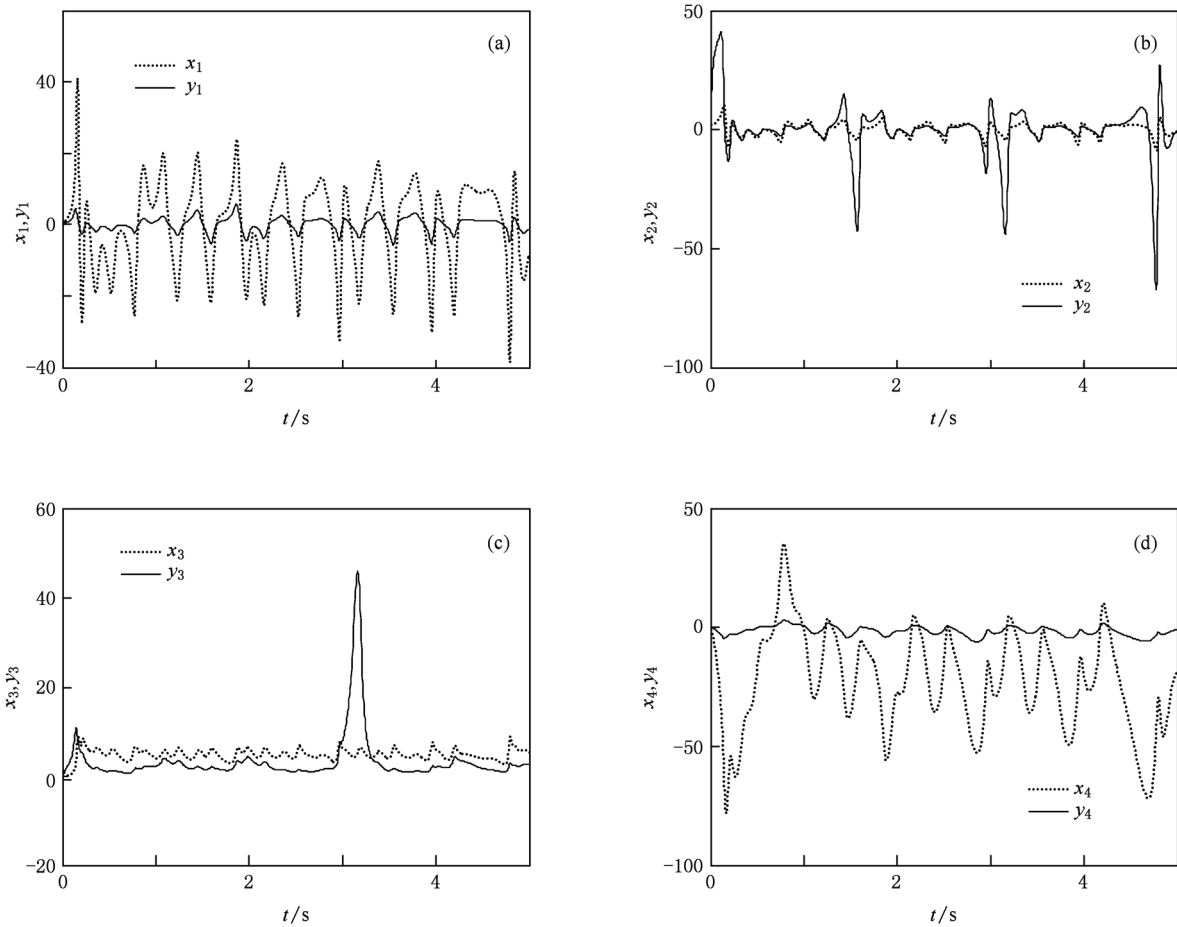


图2 系统(10)与系统(11)状态变量  $x$  和  $y$  的时域波形 (a)  $x_1(t)$  和  $y_1(t)$ , (b)  $x_2(t)$  和  $y_2(t)$ , (c)  $x_3(t)$  和  $y_3(t)$ , (d)  $x_4(t)$  和  $y_4(t)$

以系统(10)作为驱动系统,按照实现  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y} - \mathbf{M}\mathbf{x}\| = 0$  的修正函数投影同步方案的设计,响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= m_1(t) \left[ l \left( \frac{1}{m_2} y_2 - \frac{1}{m_1} y_1 \right) + k \frac{1}{m_2} y_2 \frac{1}{m_3} y_3 \right] \\ &\quad + \frac{\dot{m}_1}{m_1} y_1, \\ \dot{y}_2 &= m_2(t) \left[ n \frac{1}{m_1} y_1 - j \frac{1}{m_1} y_1 \frac{1}{m_3} y_3 + \frac{1}{m_2} y_2 + \frac{1}{m_4} y_4 \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left( x_2 - \frac{1}{m_2} y_2 \right) \right] + \frac{\dot{m}_2}{m_2} y_2, \\ \dot{y}_3 &= m_3(t) \left[ \frac{1}{m_1} y_1 \frac{1}{m_2} y_2 - m \frac{1}{m_3} y_3 \right] + \frac{\dot{m}_3}{m_3} y_3, \end{aligned}$$

$$\dot{y}_4 = m_4(t) \left[ -s \frac{1}{m_2} y_2 \right] + \frac{\dot{m}_4}{m_4} y_4. \quad (12)$$

比例函数矩阵  $\mathbf{M}$ , 系统状态变量的初值  $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)$  及反馈系数  $k_2$  的选取同上. 图4为系统(12)与(10)之间的同步误差  $e_i = y_i - m_i(t)x_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的时域波形.

从图3和图4可以看出,随着时间  $t$  的增长,两种函数投影同步方案的误差信号都渐近衰减到零. 由响应系统(11)和(12)可知,所设计的两种同步方案,其同步系统均采用一个耦合项,即驱动系统只需向响应系统传递一个驱动变量  $x_2$ , 便实现了驱动、响应系统的全变量修正函数投影同步.

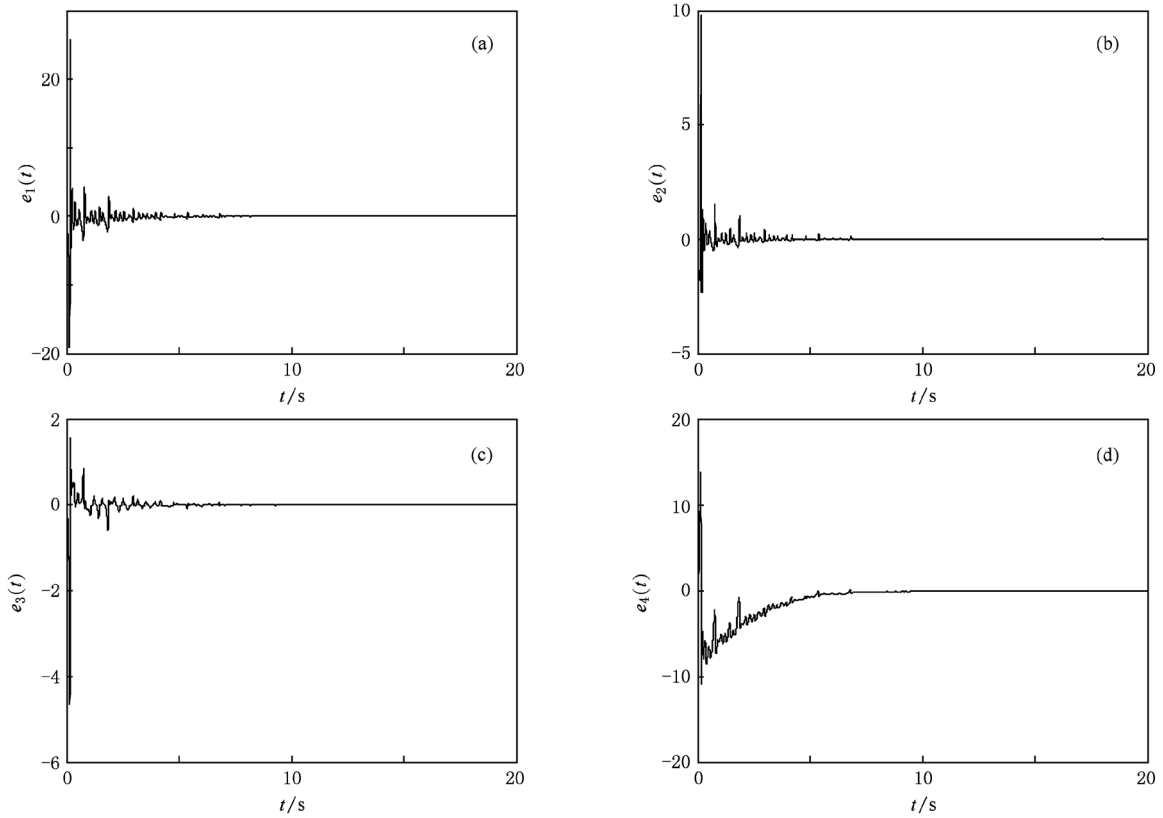


图3 系统(10)与系统(11)的修正函数投影同步误差  $e_i = x_i - m_i(t)y_i$  的时域波形 (a)  $x_1 - m_1(t)y_1$ , (b)  $x_2 - m_2(t)y_2$ , (c)  $x_3 - m_3(t)y_3$ , (d)  $x_4 - m_4(t)y_4$

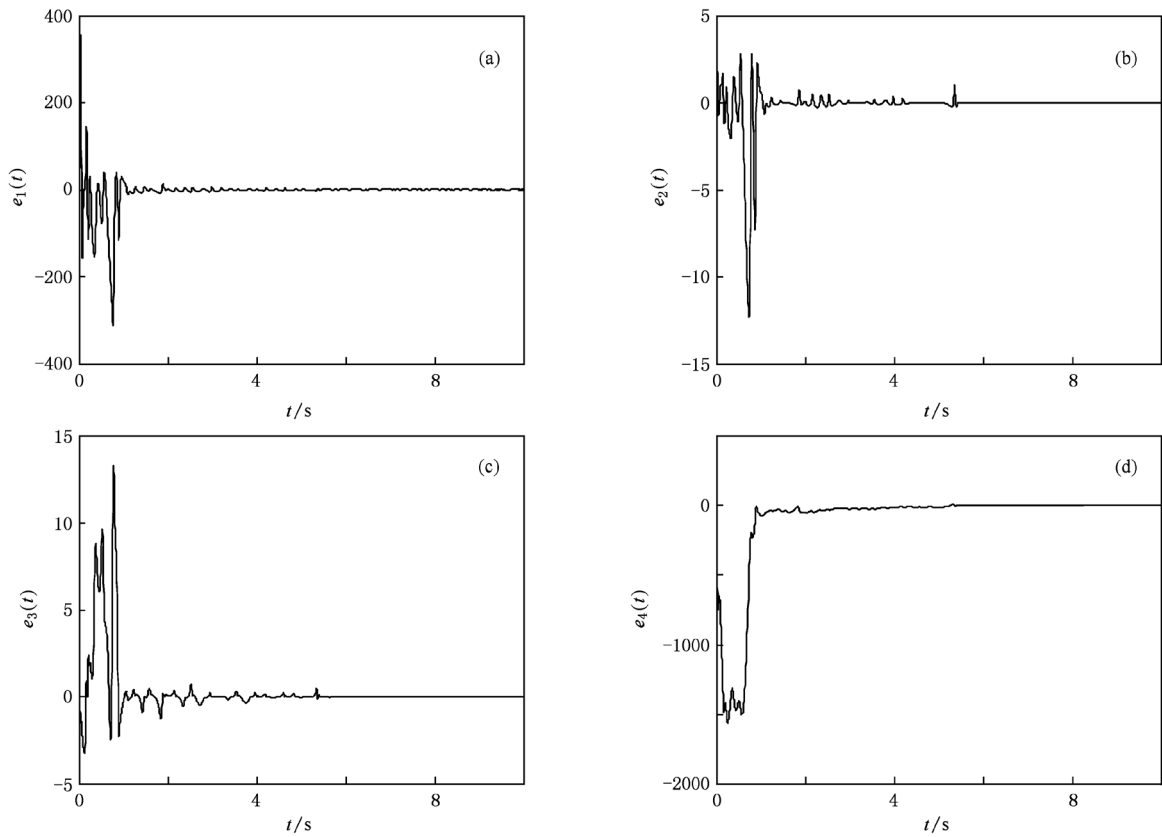


图4 系统(12)与系统(10)的修正函数投影同步误差  $e_i = y_i - m_i(t)x_i$  的时域波形 (a)  $y_1 - m_1(t)x_1$ , (b)  $y_2 - m_2(t)x_2$ , (c)  $y_3 - m_3(t)x_3$ , (d)  $y_4 - m_4(t)x_4$

## 4. 结 论

通过构造合适的响应系统,实现了驱动系统与响应系统之间两种方式的混沌修正函数投影同步,给出了相应的理论证明,并以超混沌 CYQY 系统为例进行了数值仿真. 因为构造的响应系统结构简

单,且只需向响应系统传递一个驱动变量即可实现混沌系统的修正函数投影同步,与已有方法相比具有构造方法简单、适用范围广、实用性强等特点,适用于一类满足单向耦合同步条件的混沌系统. 已知的大多数混沌系统均满足这一条件,如著名的 Chua's 电路、Lorenz 系统以及近年来新提出的 Chen 系统、非线性电路中的多卷波系统<sup>[19,20]</sup>等等.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [3] Taherionl S, Lai Y C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6247
- [4] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [5] Yang S S, Duan K 1998 *Chaos Solitons Fract.* **10** 1703
- [6] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [7] Zhang W P, Tang G N, Luo X S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3497 (in Chinese) [张伟平、唐国宁、罗晓曙 2005 物理学报 **54** 3497]
- [8] Wang X Y, Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese) [王兴元、孟娟 2008 物理学报 **57** 726]
- [9] Liu J, Chen S H, Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [10] Wang X Y, Wang Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2498 (in Chinese) [王兴元、王勇 2007 物理学报 **56** 2498]
- [11] Li G H 2007 *Chaos Solitons Fract.* **32** 1454
- [12] Li G H 2007 *Chaos Solitons Fract.* **32** 1786
- [13] Du H, Zeng Q, Wong C 2008 *Phys. Lett. A* **372** 5402
- [14] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1847
- [15] Du H, Zeng Q, Wong C 2009 *Chaos Solitons Fract.* **42** 2399
- [16] Sudheer K S, Sabir M 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3743
- [17] Wang J A, Liu H P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2264 (in Chinese) [王健安、刘贺平 2010 物理学报 **59** 2264]
- [18] Chen Z, Yang Y, Qi Q, Yuan Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [19] Lu J, Han F L, Yu X H, Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677
- [20] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 775

## Modified function projective synchronization of a class of chaotic systems

Li Jian-Fen <sup>1)†</sup> Li Nong <sup>2)</sup>

1) (*College of Science, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China*)

2) (*College of Engineering, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China*)

(Received 23 October 2010; revised manuscript received 24 March 2011)

### Abstract

A general method of modifying function projective synchronization of a class of chaotic systems is proposed in this paper by designing a suitable response system. The two schemes of obtaining the response system from chaotic system are established based on unidirectional coupled synchronization. Since chaos synchronization can be achieved by transmitting only a single variable from driving system to response system, this method is more practical. The stability analysis in the paper is proved using Lyapunov stability theory. Numerical simulations of a hyperchaotic system verify the effectiveness of the proposed method.

**Keywords:** chaotic system, modified function projective synchronization, unidirectionally coupled

**PACS:** 05.45.Xt

---

† E-mail: ln2807@163.com