

# 用于频域方法测量超短电子束纵向分布的 Kramers-Krönig 变换研究\*

吴岱<sup>1)2)3)†</sup> 刘文鑫<sup>1)2)</sup> 唐传祥<sup>1)2)</sup> 黎明<sup>3)</sup>

1) (清华大学工程物理系, 北京 100084)

2) (清华大学粒子技术与辐射成像教育部重点实验室, 北京 100084)

3) (中国工程物理研究院应用电子学研究所, 绵阳 621900)

(2010年8月24日收到; 2010年12月27日收到修改稿)

Kramers-Krönig (K-K) 变换方法被广泛地应用于频域测量中还原超短电子束团分布, 成为分析电子束团形状、长度等参量的有效工具. 研究发现, 利用该方法分析电子束参量时, 自相干曲线基底的选择、低频损耗与高频截止及插值外推位置的选择, 对束团参量有重要的影响. 以清华大学加速器实验平台采用相干渡越辐射测试束团长度为例, 分析了上述参量的选取对测量结果的影响, 讨论了选择 K-K 变换的关键物理参量的方法.

**关键词:** Kramers-Krönig 变换, 频域测量, 超短电子束团, 相干渡越辐射

**PACS:** 29.27.Fh, 41.60.-m, 41.75.Ht

## 1. 引言

近年来, 随着高能正负电子对撞机、短波长自由电子激光、激光和等离子体尾场加速器等技术的发展, 对高亮度、短脉冲电子束团的诊断已成为当前国际上的一个研究热点. 短波长自由电子激光的电子束团纵向长度约为 100 fs, 为了测量这样的超短电子束团的长度和纵向分布, 国际上发展了多种新型的测量方法, 比如偏转腔方法<sup>[1]</sup>、电光采样法<sup>[2]</sup>、频域测量方法等等. 利用电子束与媒质相互作用产生相干辐射, 并由相干辐射波的频谱反推电子束纵向分布的方法, 统称为频域测量方法. 目前国际上主要的频域测量方法包括相干渡越辐射 (CTR) 法<sup>[3]</sup>、相干衍射辐射法<sup>[4]</sup>、相干斯密斯-帕塞尔辐射法<sup>[5]</sup>等等. 由于用频域测量方法所得到的束团形状因子是电子束团纵向分布傅里叶变换的模, 导致相位信息丢失, 因此要还原电子束团的纵向分布, 需要对其进行 Kramers-Krönig (K-K) 变换<sup>[6]</sup>.

文献[7, 8]采用清华大学自行研制的 Martin-Puplett 干涉仪测量得到了超短电子束产生的太赫

兹辐射, 但其时 K-K 变换技术尚未成熟, 因而未能还原束团纵向分布. 本文采用 K-K 变换处理了在清华大学加速器平台上基于 CTR 方法并采用 Martin-Puplett 干涉仪的一次束团长度测量实验数据<sup>[9]</sup>, 还原得到了均方根长度  $\sigma_l < 0.3$  ps 的电子束纵向分布, 研究了 K-K 变换的原理、数值计算以及低频损耗、分辨率等若干问题. 该研究有助于确定干涉仪的测量范围, 提高测量精度, 并为清华大学汤姆逊背散射装置的束团长度无阻拦全自动测量提供了技术储备.

## 2. CTR 方法测量束团形状因子的基本原理

CTR 方法的基本物理模型如图 1 所示, 当电子束团通过与其运动方向成  $45^\circ$  角的金属箔靶 (以下称为辐射体) 时, 在与电子束前进方向和垂直方向上将分别有前向和后向渡越辐射产生. 后向渡越辐射可以通过光路引出, 当电子束团长度小于或可比于辐射波长的时候, 此时的辐射为 CTR, 其辐射强度将大幅增加. 电子束团产生的辐射功率  $U_{\text{bunch}}$  的空间频率分布可以表示为<sup>[10]</sup>

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10905032) 资助的课题.

† E-mail: wu-d04@mails.tsinghua.edu.cn

$$\frac{d^2 U_{\text{bunch}}}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2 U_e}{d\omega d\Omega} (1 - T)^2 F(\omega). \quad (1)$$

这里  $d^2 U_e / (d\omega d\Omega)$  表示单电子渡越辐射功率分布,  $T$  是辐射体有限大尺寸效应因子,  $d^2 U_e / (d\omega d\Omega)$  和  $T$  都可以通过实验参数数值计算得出,  $\omega$  是辐射角频率,  $\Omega$  是辐射立体角,  $F(\omega)$  是束团的纵向形状因子,  $F(\omega)$  等于束团纵向分布  $\rho_{\text{long}}(t)$  的傅里叶变换的模的平方, 即

$$F(\omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\text{long}}(t) \exp(-i\omega t) dt \right|^2. \quad (2)$$

清华大学加速器实验室的束流诊断设备 Martin-Puplett 干涉仪可以通过测量自相干曲线与数值计算得到纵向形状因子, 但是要重建出电子束束团的纵向分布  $\rho_{\text{long}}(t)$  还需要还原束团的相位信息.

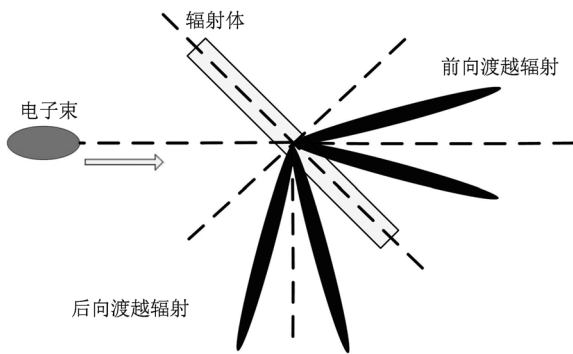


图1 利用 CTR 方法测量电子束束团纵向长度原理示意图

### 3. K-K 变换还原电子束束团的纵向分布

#### 3.1. K-K 变换基本原理

令

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\text{long}}(t) \exp(-i\omega t) dt = \rho(\omega) \exp[i\psi(\omega)], \quad (3)$$

式中  $\psi(\omega)$  是相位,  $\rho(\omega)$  是模值且满足

$$\rho(\omega) = \sqrt{F(\omega)}. \quad (4)$$

参考电子显微镜成像等领域常见的 K-K 变换方法<sup>[6,11]</sup>, 可以得到

$$\psi(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln[\rho(\mu)/\rho(\omega)]}{\mu^2 - \omega^2} d\mu. \quad (5)$$

这样由傅里叶反变换就可以得到束团的纵向分布

$$\rho_{\text{long}}(z) = \int_0^{\infty} \rho(\omega) \cos[\psi(\omega) + \omega z/c] d\omega. \quad (6)$$

在实验中, 由于基底选择、低频损耗与高频截止、数值计算存在奇点等一系列问题, 测量结果也会产生一定的误差, 本文将根据开展的实验对这些问题逐一进行讨论.

#### 3.2. 基底选择

在清华大学加速器实验室平台上, 电子束由光阴极微波电子枪产生, 经过螺线管聚焦和行波加速管加速并由行波加速管速度压缩后到达辐射体, 经过 Parmela 模拟, 电子束团纵向均方根长度估计为  $\sigma_t \approx 0.3$  ps. 通过 Martin-Puplett 干涉仪得到的自相干曲线如图 2(a) 所示, 其中纵坐标为远红外探测器高莱管(Golay cell) 的电压响应  $V$ , 横坐标为中心化后的光程差  $\delta_z$ , 中心位置位于电压响应最低位置, 单步光程差  $\delta$  为 0.02 mm, 测量点个数  $N_{\text{points}} = 32$ .

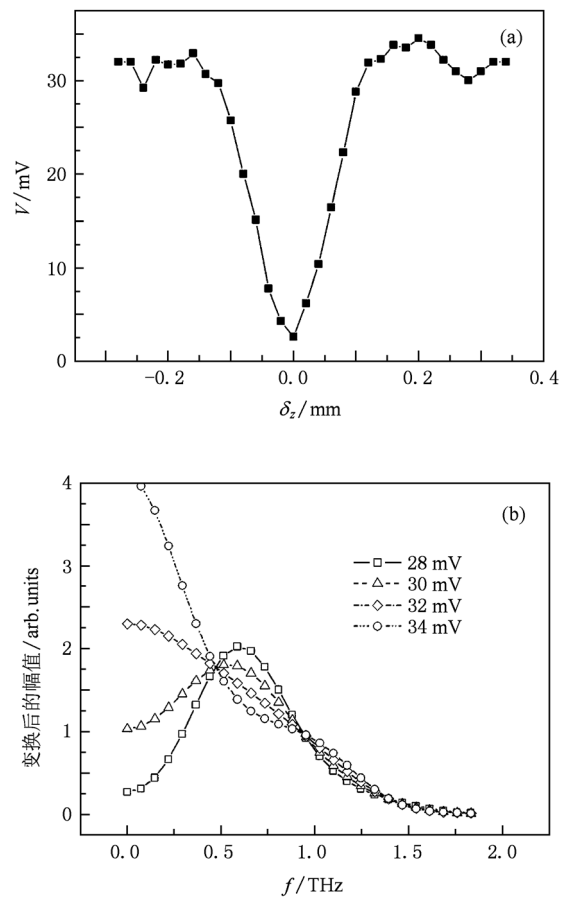


图2 自相干曲线及经快速傅里叶变换后的信号幅值频谱 (a) 自相干曲线, (b) 选择不同基底的频谱

当  $|\delta_z|$  足够大时, 理论上图 2(a) 所示的自相干曲线将与  $\delta_z$  无关并趋于直线, 这一直线对应的电

压响应值就是自相干曲线的基底. 实际测量中由于设备行程限制、噪声以及太赫兹衰减等原因, 无法得到准确的基底值, 需要人为选择适当的基底.

图 2(b) 给出了选择不同基底得到的经快速傅里叶变换后的信号幅值频谱, 其中的  $f$  是频率,  $f = \omega/(2\pi)$ . 由图 2(b) 可见, 基底的选择给测量结果引入了较大误差, 因此需要尽可能多测量一些点, 并对两边的点取算术平均值. 本文中基线测量点数量偏少, 根据算术平均结果基底选取为 32 mV.

### 3.3. 低频外推与高频截止

实验中, 由于探测器不可能测量电磁场所有频率分量的功率, 因此测量得到的频谱在低于或高于探测器响应频率的部分都是失真的部分. 高莱管的响应频率范围大约是 0.1—100 THz, 对于低频部分, 假设束团在纵向为高斯分布, 其均方根长度为  $\sigma_t$ , 将(2)式在  $k = 0$  处进行泰勒展开可以得到

$$F(\omega) = 1 - k^2\sigma_t^2 + O(k^4), \quad (7)$$

式中  $k$  是 CTR 的波数,  $k = \omega/c$ . 由于任何束团分布都可以分解为若干个不同均方根长度的高斯分布之和, 因而, 在低频部分可以按照二次函数  $F = 1 - ak^2$  (其中  $a$  为待定系数) 的形式对形状因子进行外推, 外推起始位置即为外推频率. 外推起始位置的选择除了要考虑探测器因素以外, 还要考虑装置接收角、相干辐射色散以及测量点数量等因素.

由(1)式可知, CTR 存在色散, 当电子束作用在垂直于电子束方向上的辐射体时, 不同频率的 CTR 辐射功率角分布不同, 如图 3 所示, 其中  $\theta$  是辐射观测点和 CTR 作用中心的连线与辐射体平面所成的角度.

Martin-Puplett 干涉仪的最小接收角由第一个抛物面镜的直径及其与辐射体中心之间的距离所决定, 本次实验采用的抛物面镜直径为 51 mm, 距离为 190.5 mm. 图 4 为本实验中收集到不同频率分量 99% 能量所需要的接收角, 水平虚线标注的是实验中的最大接收角(0.27 rad). 由此可知, 外推频率应该选在 0.2 THz 附近.

对于高频部分, 根据采样定理, 步进电机的步长决定了频谱的截止频率, 同时也决定了最终束团长度的时间分辨率, 而采样点个数决定了频谱分辨率. 截止频率  $f_{up} = c/\delta$ , 由此可以得到频谱分辨率  $f_r$  为

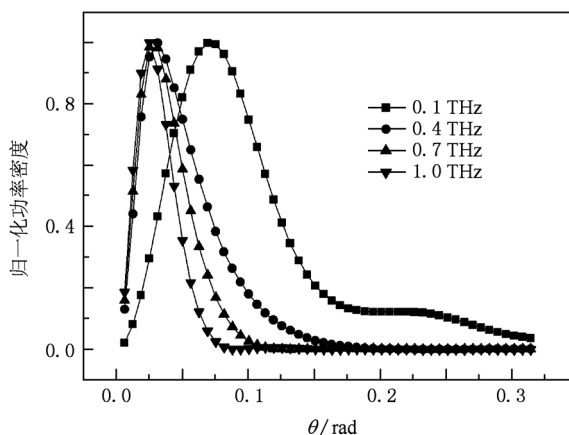


图 3 不同频率 CTR 的归一化功率密度的角分布

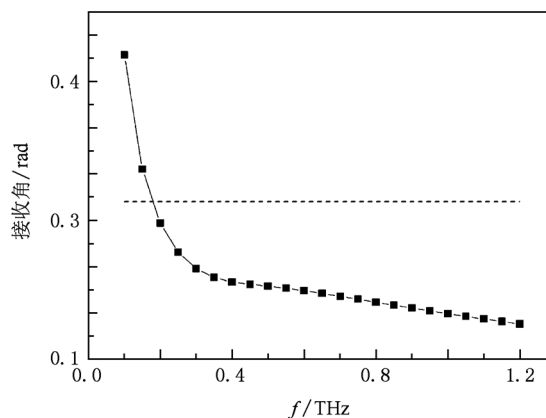


图 4 收集到 99% 能量的接收角随频率  $f$  的变化

$$f_r = f_{up}/N_{points}, \quad (8)$$

束团长度分辨率  $\sigma_{tr}$  为

$$\sigma_{tr} = 1/f_{up}. \quad (9)$$

将  $N_{points} = 32$  代入(8)式, 得到  $f_r = 0.234$  THz, 再由(9)式得到  $\sigma_{tr} = 0.13$  ps. 然而由于束团的长度有限, 因此高频部分会很快趋于零, 而且束团越短, 频谱趋于零越快. 由此可知, 傅里叶变换中在截止频率后补零是有效的, 所以理论上束团长度的分辨率应小于上述值(0.13 ps).

### 3.4. 纵向形状因子

将外推频率选取为 0.234 THz, 并采用这一位置标准  $\sigma_t = 0.3$  ps 的高斯束团形状因子的值, 按照(7)式进行外推, 所得结果如图 5 所示. 由图 5 可以看出, 实验得到的形状因子略大于  $\sigma_t = 0.3$  ps 的标

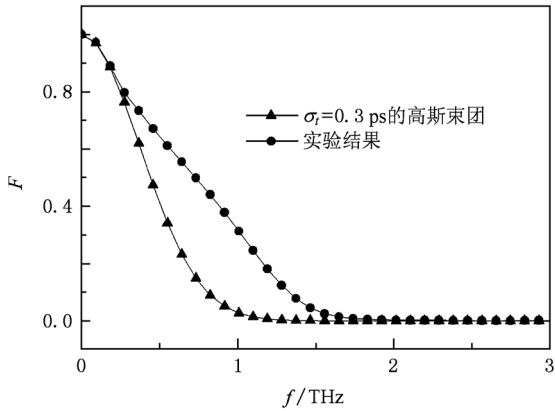


图5 束团纵向形状因子

准高斯分布的形状因子,这主要是由于束团越短,形状因子越宽,因此实验中电子束团的均方根长度应小于 0.3 ps.

### 3.5. 离散化数值计算及束团纵向分布还原

利用(4)式,将图5所示的束团形状因子开平方就可以得到  $\rho(\omega)$ ,再利用其进行 K-K 变换时将会遇到奇点.对于这种情况,将采取如下离散化数值计算的方法<sup>[4]</sup>:

$$\psi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln \rho_j, \quad (10)$$

其中

$$a_{ij} = \begin{cases} \ln |2\omega_i - \omega_j - \omega_{j+1}| / (2\omega_i + \omega_j + \omega_{j+1}) & (j = 1), \\ \frac{\ln |2\omega_i - \omega_j - \omega_{j+1}|}{2\omega_i + \omega_j + \omega_{j+1}} - \frac{\ln |2\omega_i - \omega_{j-1} - \omega_j|}{2\omega_i + \omega_{j-1} + \omega_j} & (j = 2, 3, \dots, n-1), \\ \ln |2\omega_i - \omega_{j-1} - \omega_j| / (2\omega_i + \omega_{j-1} + \omega_j) & (j = n). \end{cases} \quad (11)$$

按照(10)和(11)式的方法进行离散处理,还原得到的束团纵向分布如图6所示.由图6可以看出:束团纵向的均方根长度约为 0.26 ps,还原出的束团纵向分布存在着负的伪起伏,这主要是因为外推影响了束团形状因子的低频部分.此外,还原出的纵向分布在时间  $t$  较大处还存在一个较大的起伏,这主

要是因为形状因子的低频部分对应束团纵向分布的  $t$  较大部分,同时也可能是因为光阴极表面处的激光本身存在着纵向微结构.

## 4. 结 论

本文研究了在频域测量方法中还原超短电子束纵向分布的 K-K 变换的若干问题,包括基本原理、基底的选择、低频外推与高频截止和离散化数值计算.结果表明,K-K 变换对于超短电子束团具有很好的分辨率,能够准确地还原具有较为简单的纵向结构的电子束分布.本文对清华大学汤姆逊背散射装置上的 CTR 测量速度压缩后的束团纵向分布的自相干曲线数据进行了 K-K 变换处理,直观地还原得到了均方根长度约为 0.26 ps 的束团分布,并在处理中详细讨论了 K-K 变换中各个关键参数的选择及其对最终结果的影响.本文的研究为超短电子束团长度测量提供了技术储备.

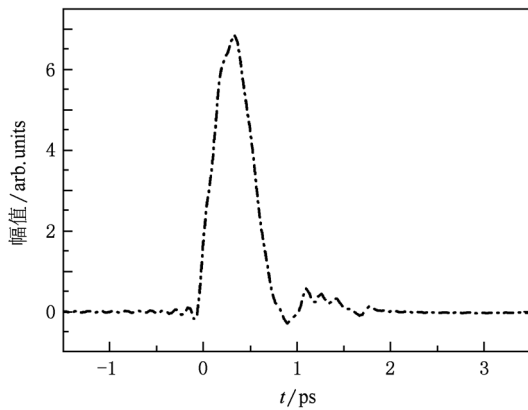


图6 还原得到的束团纵向分布

[1] Shi J R, Chen H B, Tang C X, Huang W H, Du Y C, Zheng S X, Li R K 2009 *Chin. Phys. C* **33**(S2) 161  
 [2] Steffen B 2007 *Ph. D. Dissertation* (Hamburg; University of Hamburg)

[3] Shibata Y, Takahashi T, Kanai T, Ishi K, Ikezawa M, Ohkuma J, Okuda S, Okada T 1994 *Phys. Rev. E* **50** 1479  
 [4] Xiang D 2008 *Ph. D. Dissertation* (Beijing; Tsinghua University) (in Chinese) [向 导 2008 博士学位论文(北

- 京: 清华大学]
- [5] Blackmore V, Doucas G, Perry C, Ottewell B, Kimmitt M, Woods M, Molloy S, Arnold R 2009 *Phys. Rev. Spec. Top. Accel. Beams* **12** 032803
- [6] Lai R, Happek U, Sievers A J 1994 *Phys. Rev. E* **50** R4294
- [7] Liu W X, Wu D, Wang Y X, Tang C X 2010 *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A* **614** 313
- [8] Liu W X, Tang C X, Huang W H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 062902
- [9] Liu W X 2010 *Postdoctoral Research Report* (Beijing: Tsinghua University) (in Chinese) [刘文鑫 2010 博士后研究报告 (北京: 清华大学)]
- [10] Casalbuoni S, Schmidt B, Schmäser P 2005 *Tesla Report* 15 (Hamburg: Deutsches Elektronen Synchrotron)
- [11] Wang Y X, Wang C L, Zhong W L, Zhao M L, Li J C, Xue X Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 214 (in Chinese) [王渊旭、王春雷、钟维烈、赵明磊、李吉超、薛旭艳 2004 物理学报 **53** 214]

## Research of Kramers-Krönig relationship for reconstruction of ultrashort electron longitudinal bunch profile by means of frequency domain measurements \*

Wu Dai<sup>1)2)3)†</sup> Liu Wen-Xin<sup>1)2)</sup> Tang Chuan-Xiang<sup>1)2)</sup> Li Ming<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> (Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

<sup>2)</sup> (Key Laboratory of Particle and Radiation Imaging of Ministry of Education, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

<sup>3)</sup> (Institute of Applied Electronics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900, China)

(Received 24 August 2010; revised manuscript received 27 December 2010)

### Abstract

Kramers-Krönig (K-K) relationship is widely used in diagnostics of longitudinal bunch distribution with frequency domain measurement, and it has been used as a powerful tool in analysis of bunch profile and length. The study results show that the bunching beam parameters are severely affected by the choosing of the baseline of autocorrelation curve, power loss at low frequency and cutoff at high frequency, as well as extrapolation point, etc. As an example, the longitudinal bunching length is measured by means of coherent transition radiation in accelerator laboratory of Tsinghua University. We analyze the influence of the choice of parameters on measured experiment results and discuss the method of choosing the key parameters for the K-K transform.

**Keywords:** Kramers-Krönig relationship, frequency domain measurements, ultrashort electron bunch, coherent transition radiation

**PACS:** 29.27.Fh, 41.60.-m, 41.75.Ht

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10905032).

† E-mail: wu-d04@mails.tsinghua.edu.cn