

奇偶二项式光场态的小波变换*

宋 军^{1)2)†} 许业军²⁾ 范洪义²⁾

1) (皖西学院材料与化工系, 六安 237012)

2) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2010年7月25日收到; 2011年3月22日收到修改稿)

利用有序算符内积分方法, 小波变换可以表示为被转换态矢 $|f\rangle$ 在压缩平移算符 $U(\mu, s)$ 作用下向母小波态矢 $\langle\psi|$ 转换的矩阵元 $\langle\psi|U(\mu, s)|f\rangle$. 在此基础上, 计算了奇、偶二项式态的小波变换, 得到小波变换谱. 结果表明, 小波变换谱可以起到识别这些量子力学态的作用, 具有直观易辨的优点.

关键词: 小波变换, 奇偶二项式态, 有序算符内积分

PACS: 42.50.-p, 42.30.Kq

1. 引言

小波变换与传统的傅里叶变换相比有其显著的特点. 傅里叶变换使用的变换基是正弦和余弦函数, 这些基函数在时间或频率域上无限延展; 而小波变换的基则局域在一定的时间、频率空间中. 正是这一特点, 使得小波变换在很多情况下比傅里叶变换更有优势^[1-5]. 数学上, 具有实参数 x 的小波 ψ 须满足下列条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (1)$$

(1)式表明, 当 $|x|$ 趋向无穷大时, 小波 $\psi(x)$ 的值迅速衰减为零. 小波变换是将信号用一系列双参数的函数基展开, 同时得到信号在时域和频域上的信息. 具体而言, 就是从某一个母小波函数 ψ 出发, 通过膨胀和平移变换, 构建一组子小波 $\psi_{(\mu, s)}$,

$$\psi_{(\mu, s)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \psi\left(\frac{x-s}{\mu}\right), \quad (2)$$

式中 μ 为膨胀参量, $\mu > 0$; s 是平移参量, $s \in R$. 利用子小波 $\psi_{(\mu, s)}$ 可以对信号函数 $f(x) \in L^2(R)$ 进行小波积分变换, 即

$$W_{\psi} f(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi^* \left(\frac{x-s}{\mu} \right) dx. \quad (3)$$

条件(1)式保证了小波变换的反变换(重构)和

Parseval 公式成立.

从量子力学么正变换的观点, 改写(3)式的经典小波积分变换, 可以定义量子力学态矢量的小波变换为^[6-9]

$$W_{\psi} f(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \psi \left| \frac{x-s}{\mu} \right\rangle \langle x | f \rangle dx = \langle \psi | U(\mu, s) | f \rangle, \quad (4)$$

式中 $\langle \psi |$ 是相对于给定母小波的态矢, $|f\rangle$ 是需要做变换的态矢, $|x\rangle$ 是坐标本征矢, $U(\mu, s)$ 是压缩平移算符,

$$U(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x-s}{\mu} \right\rangle \langle x | dx. \quad (5)$$

矩阵元 $\langle \psi | U(\mu, s) | f \rangle$ 可以看成量子力学态矢 $|f\rangle$ 的小波变换谱. 本文研究量子力学奇、偶二项式态的小波变换特性, 通过数值计算, 得到奇、偶二项式态的小波变换谱, 并对此加以分析.

2. $U(\mu, s)$ 的正规乘积表示和母小波态矢

在 Fock 空间里, 坐标本征态可以表示为

$$|x\rangle = \pi^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}xa^+ - \frac{a^{+2}}{2}\right) |0\rangle. \quad (6)$$

这里 a^+ 和 a 分别是光场的产生和湮没算符, 并满足

* 国家自然科学基金(批准号: 10775097, 10874174)资助的课题.

† E-mail: songj65@mail.ustc.edu.cn

$[a, a^+] = 1$.

$U(\mu, s)$ 是在坐标表象中表示的压缩平移算符, 可以表示为

$$U(\mu, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left\{ \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-s}{\mu} \right)^2 + \sqrt{2} \left(\frac{x-s}{\mu} \right) a^+ - \frac{a^{+2}}{2} \right] \right\} \times |0\rangle\langle 0| \exp \left(-\frac{1}{2} x^2 + \sqrt{2} \lambda x - \frac{a^2}{2} \right), \quad (7)$$

式中 $|0\rangle\langle 0| = : \exp(-a^+ a) : , : :$ 为正规乘积符号. 利用有序算符内积分方法^[10-12], 可得 $U(\mu, s)$ 的正规乘积表示

$$U(\mu, s) = A \exp \left(-\frac{a^{+2}}{2} \tanh \lambda - \frac{s a^+}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda \right) \times : \exp \left[(\operatorname{sech} \lambda - 1) a^+ a \right] : \times \exp \left(\frac{a^2}{2} \tanh \lambda + \frac{a s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right), \quad (8)$$

式中

$$A = \operatorname{sech}^{1/2} \lambda \exp \left[\frac{-s^2}{2(\mu^2 + 1)} \right],$$

$$\mu = \exp(\lambda),$$

$$\operatorname{sech} \lambda = \frac{2\mu}{\mu^2 + 1},$$

$$\tanh \lambda = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}.$$

利用算符等式

$$\exp(\lambda a^+ a) = : \exp[(\exp \lambda - 1) a^+ a] : , \quad (9)$$

有

$$U(\mu, s) = A \exp \left(-\frac{a^{+2}}{2} \tanh \lambda - \frac{s a^+}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda \right) \times \exp(a^+ a \ln \operatorname{sech} \lambda) \times \exp \left(\frac{a^2}{2} \tanh \lambda + \frac{a s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right). \quad (10)$$

特别地, 当 $s = 0$ 时, $U(\mu, s)$ 退化为一般的单模压缩算符

$$U(\mu, 0) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{x}{\mu} \right\rangle \langle x | dx = \exp \left[\frac{\lambda}{2} (a^2 - a^{+2}) \right]. \quad (11)$$

坐标与动量表象之间满足傅里叶变换

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \exp(ipx) = |p\rangle. \quad (12)$$

特别地, 当 $p = 0$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle = |p = 0\rangle. \quad (13)$$

利用(13)式, 条件(1)式可以写成 Dirac 符号表示形式, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \rightarrow \langle p = 0 | \psi \rangle = 0. \quad (14)$$

现在寻找满足条件(1)式的母小波问题已经转化成了寻找满足条件(14)式的母小波态矢 $|\psi\rangle$ 问题. 例如, 当母小波为“墨西哥帽”形式

$$\psi_M(x) = (1 - x^2) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right), \quad (15)$$

可以得到相应的母小波态矢是

$$|\psi\rangle_M = \frac{1}{2} \pi^{1/4} (1 - a^{+2}) |0\rangle. \quad (16)$$

3. 奇、偶二项式态的小波变换

1985年, Stoler 等^[13] 从理论上引入一种介于 Fock 态和相干态的光场态, 即二项式态, 其定义为

$$|\eta, M\rangle = \sum_{n=0}^M C_n^M |n\rangle, \quad (17)$$

$$C_n^M = \sqrt{\binom{M}{n} \eta^n (1-\eta)^{M-n}} \quad (0 < \eta < 1),$$

式中 M 为正整数. 二项式光场态光子数分布对应于概率论中的二项式分布, 表现为亚泊松分布. 在文献[14]中, 奇、偶二项式态被分别定义为

$$|\eta, M\rangle_o = C_o \sum_{n=0}^{[\frac{M-1}{2}]} \beta_o^{n,M} |2n+1\rangle, \quad (18)$$

$$\beta_o^{n,M} = \sqrt{\binom{M}{2n+1} \eta^{2n+1} (1-\eta)^{M-(2n+1)}} \quad (0 < \eta < 1);$$

$$|\eta, M\rangle_e = C_e \sum_{n=0}^{[\frac{M}{2}]} \beta_e^{n,M} |2n\rangle, \quad (19)$$

$$\beta_e^{n,M} = \sqrt{\binom{M}{2n} \eta^{2n} (1-\eta)^{M-2n}} \quad (0 < \eta < 1).$$

奇、偶二项式态的归一化系数分别为

$$C_o = \sqrt{\frac{2}{1 - (1 - 2\eta)^M}}, \quad (20)$$

$$C_e = \sqrt{\frac{2}{1 + (1 - 2\eta)^M}}.$$

当参数 $\eta \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$, 且保持平均光子数 $\bar{n} = \eta M$

为常量时,奇、偶二项式态趋向于奇、偶相干态;当 $\eta \rightarrow 1$ 时,奇、偶二项式态趋向于奇、偶粒子数态. 1987年 Dattoli 等^[15] 提出二项式态在自由电子激光中的产生机理,1992年 Agarwal^[16] 提出负二项式态的产生机理,增加了人们对这种量子态的研究兴趣^[17-24].

为了得到奇、偶二项式光场态 $|\eta, M\rangle_o$ 和 $|\eta, M\rangle_e$ 的小波变换谱,我们先计算 $U(\mu, s)$ 在 Fock 空间的矩阵元 $\langle m | U(\mu, s) | n \rangle$.

相干态 $|\alpha\rangle$ 是湮没算符 a 的本征态, $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, 归一化的相干态表达式为

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) |0\rangle. \quad (21)$$

对于玻色算符 a^\dagger 和 a 的任何函数 $f(a, a^\dagger)$, 利用 $[a, a^\dagger] = 1$ 总可以将其所有的产生算符 a^\dagger 都移到所有湮没算符 a 的左边, 这时我们称 $f(a, a^\dagger)$ 已被排列成正规乘积形式. 在相干态表象中, 容易得到

$$\langle \alpha | :f(a, a^\dagger) : | \beta \rangle = f(\alpha^*, \beta) \langle \alpha | \beta \rangle, \quad (22)$$

式中 $f(\alpha^*, \beta)$ 是将 $:f(a, a^\dagger) :$ 中的 a^\dagger, a 分别用 α^*, β 替代后得到的相空间函数. 应当注意, (22) 式对未归一化的相干态 $|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger) |0\rangle$ 也是成立的. 由(8)和(22)式可得

$$\begin{aligned} \langle \alpha | U(\mu, s) | \beta \rangle = & A \exp \left(-\frac{\alpha^{*2}}{2} \tanh \lambda - \frac{\alpha^* s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda \right. \\ & \left. + \alpha^* \beta \ln \operatorname{sech} \lambda + \frac{\beta^2}{2} \tanh \lambda \right. \\ & \left. + \frac{\beta s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right). \quad (23) \end{aligned}$$

粒子数态与未归一化相干态之间存在下列关系:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left. \frac{d^n}{d\alpha^n} |\alpha\rangle \right|_{\alpha=0}. \quad (24)$$

容易看到, $U(\mu, s)$ 在 Fock 空间的矩阵元 $\langle m | U(\mu, s) | n \rangle$ 可表示为

$$\begin{aligned} \langle m | U(\mu, s) | n \rangle = & \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \left. \frac{\partial^{m+n}}{\partial \alpha^{*m} \partial \beta^n} \langle \alpha | U(\mu, s) | \beta \rangle \right|_{\alpha^* = \beta = 0} \\ = & \frac{A}{\sqrt{m!n!}} \left. \frac{\partial^{m+n}}{\partial \alpha^{*m} \partial \beta^n} \exp \left(-\frac{\alpha^{*2}}{2} \tanh \lambda - \frac{\alpha^* s}{\sqrt{2}} \operatorname{sech} \lambda + \alpha^* \beta \ln \operatorname{sech} \lambda \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta^2}{2} \tanh \lambda + \frac{\beta s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right) \right|_{\alpha^* = \beta = 0}. \quad (25) \end{aligned}$$

当 $m = 0, 2$ 时, 分别有

$$\langle 0 | U(\mu, s) | n \rangle = \frac{A}{\sqrt{n!}} \left. \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \tanh \lambda + \frac{\beta s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right) \right|_{\beta=0}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle 2 | U(\mu, s) | n \rangle = & \frac{A}{\sqrt{2n!}} \left. \frac{\partial^n}{\partial \beta^n} \left\{ \left[-\tanh \lambda + \left(\beta - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \lambda \right] \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \tanh \lambda + \frac{\beta s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right) \right\} \right|_{\beta=0}. \quad (27) \end{aligned}$$

当母小波函数取“墨西哥帽”时, 利用(26)和(27)式, 分别得到奇、偶二项式光场态的小波变换为

$$\begin{aligned} \langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle_o = & \frac{C_o}{2} \sum_{n=0}^{[\frac{M-1}{2}]} \beta_o^{n,M} [\langle 0 | U(\mu, s) | 2n+1 \rangle - \sqrt{2} \langle 2 | U(\mu, s) | 2n+1 \rangle] \\ = & \frac{AC_o}{2} \sum_{n=0}^{[\frac{M-1}{2}]} \frac{\beta_o^{n,M}}{\sqrt{(2n+1)!}} \left. \frac{\partial^{2n+1}}{\partial \beta^{2n+1}} \left\{ \left[1 + \tanh \lambda - \left(\beta - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \lambda \right] \right. \right. \\ & \left. \left. \times \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \tanh \lambda + \frac{\beta s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right) \right\} \right|_{\beta=0}, \quad (28) \end{aligned}$$

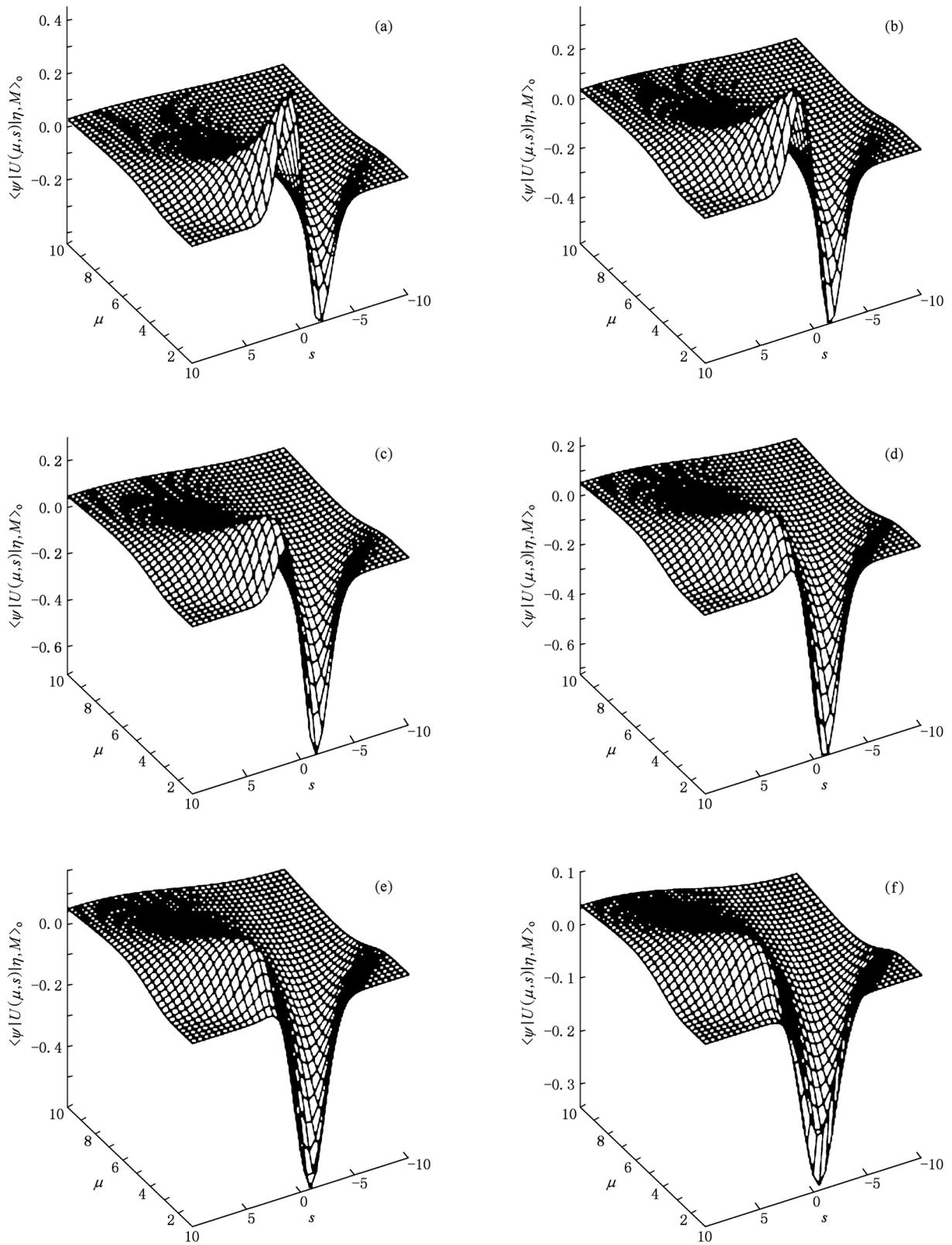


图1 奇二项式光场态的小波变换谱 $M = 5$. (a) $\eta = 0.01$, (b) $\eta = 0.2$, (c) $\eta = 0.4$, (d) $\eta = 0.6$, (e) $\eta = 0.8$, (f) $\eta = 0.99$

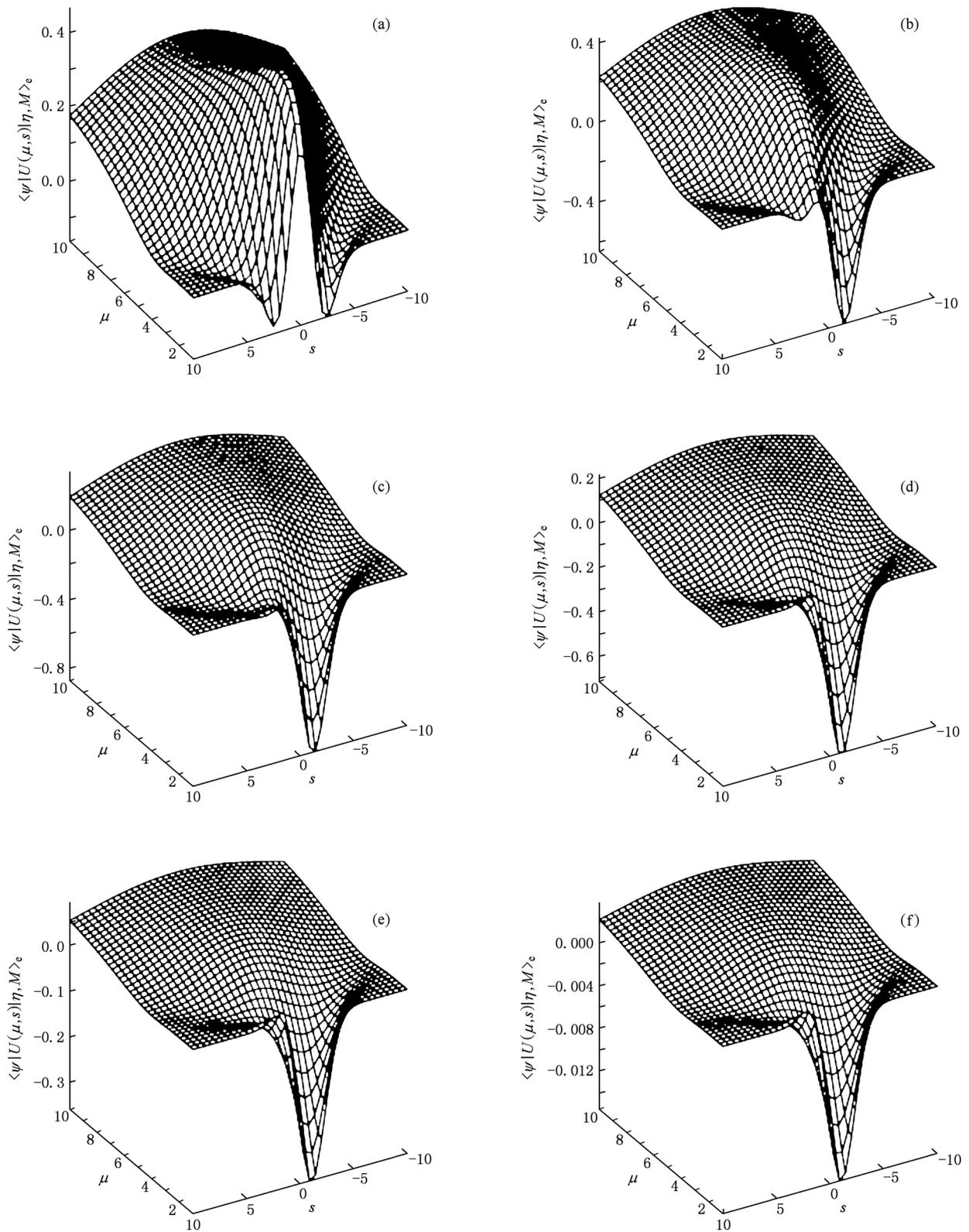


图2 偶二项式光场态的小波变换谱 $M = 5$. (a) $\eta = 0.01$, (b) $\eta = 0.2$, (c) $\eta = 0.4$, (d) $\eta = 0.6$, (e) $\eta = 0.8$, (f) $\eta = 0.99$

$$\begin{aligned}
\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M_e \rangle &= \frac{C_e}{2} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \beta_e^{n, M} [\langle 0 | U(\mu, s) | 2n \rangle - \sqrt{2} \langle 2 | U(\mu, s) | 2n \rangle] \\
&= \frac{AC_e}{2} \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \frac{\beta_e^{n, M}}{\sqrt{(2n)!}} \frac{\partial^{2n}}{\partial \beta^{2n}} \left\{ \left[1 + \tanh \lambda - \left(\beta - \frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \lambda \right] \right. \\
&\quad \left. \times \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \tanh \lambda + \frac{\beta s}{\sqrt{2\mu}} \operatorname{sech} \lambda \right) \right\} \Big|_{\beta=0}. \quad (29)
\end{aligned}$$

4. 奇、偶二项式态的小波变换谱

利用(28), (29)式的结果, 通过数值计算可以得到奇、偶二项式态在取母小波为“墨西哥帽”函数时的小波变换谱 $\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle$ 和 $\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle$ 随 μ, s 的变化情况. 以膨胀参量 μ 和平移参量 s 为坐标, $\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle$ 和 $\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle$ 随 μ, s 的变化如图1和图2所示. 计算中, 取 $M = 5$, η 分别取 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 和 0.99. 图1所示为奇二项式光场态的小波变换谱. 从图1可以看到, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, 小波谱趋向单粒子态的小波变换谱, 沿 s 轴呈奇对称分布, 但随着 η 的增加, 奇对称分布逐渐减弱. 图2所示为偶二项式光场态的小波变换谱. 从图2同样可以看到, 当 $\eta \rightarrow 0$ 时, 小波谱趋向真空态的小波变换谱, 沿 s 轴呈偶对称分布, 但随着 η 的增加, 偶对称分布也被破坏. 图1和图2

都显示出峰值狭窄、局域分布的小波变换的共同特征, 且这些峰值的位置和形状都随参数 η 和 M 的变化而变化.

5. 结 论

本文从量子力学么正变换的观点出发, 定义量子力学态矢量的小波变换 $\langle \psi | U(\mu, s) | f \rangle$, 利用有序算符内积分方法, 计算得到奇、偶二项式态的小波变换, 数值计算了奇、偶二项式态的小波变换谱 $\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle$ 和 $\langle \psi | U(\mu, s) | \eta, M \rangle$ 随 μ, s 的变化情况. 小波变换谱显示出峰值狭窄、局域分布的小波变换的共同特征, 且这些峰值的位置和形状都随参数 η 和 M 的变化而变化. 结果表明, 小波变换谱可以起到识别这些量子力学态的作用, 有直观易辩的优点. 小波变换谱应该在量子领域得到重视.

- [1] Daubechies I 1992 *Ten Lectures on Wavelet* (Philadelphia: SIAM)
- [2] Jaffard S, Meyer Y, Ryan R D 2001 *Wavelet, Tools for Science and Technology* (Philadelphia: SIAM)
- [3] Chui C K 1992 *An Introduction to Wavelets* (New York: Academic)
- [4] Burrus C S, Gopinath R A, Guo H T 1998 *Introduction to Wavelet and Wavelet Transformation (A Primer)* (New Jersey: Prentice Hall)
- [5] Pinsky M A 2002 *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets* (Pacific Grove: Brooks/Cole)
- [6] Fan H Y, Lu H L 2006 *Opt. Lett.* **31** 407
- [7] Song J, Fan H Y 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 024210
- [8] Fan H Y, Lu H L 2007 *Opt. Lett.* **32** 554
- [9] Fan H Y, Liu S G 2007 *Opt. Lett.* **32** 1507
- [10] Fan H Y, Zaidi H R, Klauder J R 1987 *Phys. Rev. D* **35** 1831
- [11] Fan H Y, Zaidi H R 1988 *Phys. Rev. A* **37** 2985
- [12] Fan H Y 2003 *J. Opt. B* **5** R147
- [13] Stoler D, Saleh B E A, Teich M C 1985 *Opt. Acta* **32** 345
- [14] Fan H Y, Jing S C 2001 *Mod. Phys. Lett. B* **23** 1047
- [15] Dattoli G, Galarde J, Torre A 1987 *J. Opt. Soc. Am. B* **2** 185
- [16] Agarwal G S 1992 *Phys. Rev. A* **45** 1787
- [17] Fan H Y, Jing S C 1994 *Phys. Rev. A* **50** 1909
- [18] Barranco A V, Roversi J 1994 *Phys. Rev. A* **50** 5233
- [19] Wang X G, Yu R J, Li W 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1798 (in Chinese) [王晓光、于荣金、李文 1998 物理学报 **47** 1798]
- [20] Song J, Cao Z L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 696 (in Chinese) [宋军、曹卓良 2005 物理学报 **54** 696]
- [21] Hu Y H, Fang M F, Liao X P, Zheng X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4631 (in Chinese) [胡要花、方卯发、廖湘萍、郑小娟 2006 物理学报 **55** 4631]
- [22] Zhang X Y, Wang J S, Meng X G, Su J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 604
- [23] Jiang N Q, Zheng Y Z 2006 *Phys. Rev. A* **74** 012306
- [24] Jiang N Q, Jin B Q, Zhang Y, Cai G C 2008 *Eur. Phys. Lett.* **84** 14002

Wavelet transform of odd- and even-binomial states^{*}

Song Jun^{1)2)†} Xu Ye-Jun²⁾ Fan Hong-Yi²⁾

1) (Department of Material and Chemical Engineering, West Anhui University, Lu'an 237012, China)

2) (Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 25 July 2010; revised manuscript received 22 March 2011)

Abstract

In the context of quantum mechanics the classical wavelet transform of a function f with the mother wavelet ψ can be recast into a matrix element of the squeezing-displacing operator $U(\mu, s)$ as $\langle \psi | U(\mu, s) | f \rangle$. The technique of integral within an ordered product of operators is used to support this theory. Based on this, wavelet transforms are done for even- and odd-binomial states, and the corresponding numerical calculation leads to the spectrum of wavelet transform, which is helpful for recognizing the difference between even- and odd-states.

Keywords: wavelet transform, odd- and even-binomial states, integration within an ordered product of operators

PACS: 42. 50.- p, 42. 30. Kq

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10775097, 10874174).

[†] E-mail: songj65@mail.ustc.edu.cn