

磁场剪切对离子温度梯度模带状流产生的影响*

陆赫林^{1)†} 陈忠勇²⁾ 李跃勋¹⁾ 杨 恺¹⁾

1) (云南民族大学物理系, 昆明 650031)

2) (云南师范大学物理与电子信息学院, 昆明 650092)

(2010年8月12日收到; 2010年12月27日收到修改稿)

对离子温度梯度模湍流非线性流体方程进行了解耦处理, 得到包含磁场剪切效应的带状流与漂移波相互作用的非线性动力学方程. 采用调制不稳定性四波相互作用模型, 研究了磁场剪切对带状流产生的影响. 研究表明, 在 k_{\parallel} 值较小的范围内, 当 $|k_{\parallel}|$ 增加时, 带状流的增长率也呈增加的趋势.

关键词: 托卡马克等离子体, 离子温度梯度模湍流, 带状流, 磁场剪切

PACS: 52. 25. Xz, 52. 35. Kt, 52. 35. Ra

1. 引言

在磁约束聚变等离子体领域中, 对湍流的抑制和产生一直是人们的研究热点. 小尺度湍流与带状流的相互作用, 能通过剪切驱动背景湍流的涡旋来抑制径向输运^[1-4]. 这种带状流主要是指沿极向传播的径向局域流, 即波数 $k \approx (k_r, 0, 0)$, 电场扰动 $\bar{E} \approx (\bar{E}_r, 0, 0)$, 带状流功率密度谱压缩在低频区域(远远小于背景密度湍流), 其峰值接近于零频率. 由于带状流静电势的极向波数 k_{θ} 为零, 因而其没有径向运动. 这些模是线性稳定的, 其本身只能被像雷诺肋强这样的非线性源所驱动. 因为它们不和与压力径向梯度有关的自由能相互作用, 所以带状流可以通过漂移波之间的非线性相互作用自洽产生. 文献[5-7]通过解析和数值方法对此问题进行了研究.

对离子温度梯度(ITG)模湍流中带状流的产生以及对反常输运影响的研究, 已经有很多文献探讨过^[8-10], 但是有关考虑了磁场剪切的带状流产生的研究工作开展不多, 文献[11]探讨了电子温度梯度模中的磁场剪切对带状流产生的影响. 然而, 磁场剪切对带状流以及反常输运的影响却是非常重要的, Horton等在文献[12]中论述了其重要性. 文献[12]指出, 电子输运对磁场位形(安全因子 q)以及磁场剪切 $s = rq'/q$ 非常敏感, 即磁场剪切参数 s 和

在电子输运中起着关键的作用.

本文着重研究了磁场剪切对 ITG 模中带状流产生的影响. 采用文献[13-15]中的 ITG 模非线性流体力学模型, 应用参量调制不稳定性的四波相互作用(包括漂移波、带状流、上边频带和下边频带)产生带状流的方法, 初步探讨了 ITG 模湍流驱动的情况下磁场剪切对带状流产生的影响.

2. 基本方程

本文采用的模型方程为 ITG 模回旋平均后的非线性流体方程^[13-15], 此方程采用平板几何位形, 位形中的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = B \left[\mathbf{e}_z + \frac{(x - x_0)}{L_s} \mathbf{e}_y \right],$$

其中 L_s 为剪切标长. 方程在低压比 β 区可以忽略电磁效应. 压比 β 可表示为

$$\beta = \frac{p}{B_0^2 / (2\mu_0)},$$

其中 p 为等离子体压力, $B^2 / (2\mu_0)$ 为外部磁场. 对非线性流体方程按下列方式进行无量纲化:

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x/\rho_i, y/\rho_i, z/L_n, v_{ii}t/L_n),$$

$$(\phi, v_{\parallel}, p) \rightarrow (L_n/\rho_i)(e\phi/T_{i0}, v_{\parallel}/v_{ii}, p/p_{i0}),$$

其中 ρ_i, v_{ii}, T_{i0} 和 p_{i0} 分别为离子的回旋半径、热速度、平衡温度和压力, L_n 为密度标长. 有关无量纲化

* 国家自然科学基金(批准号: 11005090, 10805034)和霍英东教育基金(批准号: 111006)资助的课题.

† E-mail: luhelin@gmail.com

的讨论详见文献[13,15].由此可以得到如下方程:

$$(1 - \delta - \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial t} = - (1 + K \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \nabla_{\parallel} v_{\parallel} + [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} (1 - \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_{\perp} \nabla_{\perp}^4 \phi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} = - \nabla_{\parallel} \phi - \nabla_{\parallel} p - [\phi, v_{\parallel}] - \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial y} + \eta_{\perp} \nabla_{\perp}^2 v_{\parallel}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - K \frac{\partial \phi}{\partial y} - \Gamma \nabla_{\parallel} v_{\parallel} - (\Gamma - 1) \sqrt{\frac{8}{\pi}} |k_{\parallel}| (p - \phi) - [\phi, p] - \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} + \chi_{\perp} \nabla_{\perp}^2 p. \quad (3)$$

这里 δ 为调控参数, $\delta = 1$ 代表带状流部分, $\delta = 0$ 代表扰动部分; $\frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x}$ 为外源小尺度流; $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}$ 表示绝热电子对 ITG 模湍流自发产生的带状流响应; K 为离子压强平衡参数,

$$K = 1 + \eta_i,$$

其中 $\eta_i = \frac{d \ln T_i}{d \ln n}$; ∇_{\parallel} 为平行算子,

$$\nabla_{\parallel} = ik_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial z} + \hat{s} x \frac{\partial}{\partial y},$$

其中 $\hat{s} = L_n/L_s$ 为磁场剪切; μ_{\perp} , η_{\perp} 和 χ_{\perp} 为来源于经典输运理论的垂直部分的耗散系数. 泊松括号 $[f, g]$ 表示 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 的对流非线性项,

$$[f, g] = \mathbf{z} \cdot \nabla_{\perp} f \times \nabla_{\perp} g = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y},$$

其中 ∇_{\perp} 为垂直算子

$$\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y.$$

由方程(1)–(3)可以看出,磁场剪切效应包含在平行算子 ∇_{\parallel} 中,由于 ITG 模湍流在 z 方向的变化很小,所以可以忽略 $\frac{\partial}{\partial z}$ 项,平行算子变为

$$\nabla_{\parallel} = ik_{\parallel} \approx \hat{s} x \frac{\partial}{\partial y},$$

波数 k_{\parallel} 就可以表示磁场剪切. 方程(1)中不显含压力 p , 可以将方程(2)与方程(3)耦合在一起. 现在忽略方程(2)中的 $\nabla_{\parallel} p$ 项,方程(2)和温度方程(3)解耦. 所以,方程(1)与方程(3)也解除了耦合关系,即静电势 ϕ 的演化不依赖于压力 p . 本文目的在于研究磁场剪切对带状流增长率的影响,而带状流是一种静电扰动,所以在本文中忽略温度方程(3). 作局域近似

$$\begin{bmatrix} \phi(r, t) \\ p(r, t) \\ v(r, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ p \\ v \end{bmatrix} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t), \quad (4)$$

将(4)式代入方程(2),由于方程(2)中的两个非线性项不会对磁场剪切有直接的贡献,所以忽略了方程(2)中的非线性项 $[\phi, p]$ 和外源非线性项 $\frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial y}$, 由此得到关于 v_{\parallel} 和 ϕ 的简单线性关系

$$v_{\parallel} = \frac{ik_{\parallel}}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi. \quad (5)$$

令 $\delta = 0$, 将(5)式代入方程(1),可以得到 ITG 模的色散方程

$$-i\omega(1 + k_{\perp}^2) = -i(1 - Kk_{\perp}^2)k_y + \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} - \mu_{\perp} k_{\perp}^4. \quad (6)$$

由色散方程(6)可得

$$\omega = \frac{i}{2} - \frac{i(1 - Kk_{\perp}^2)k_y - \mu_{\perp} k_{\perp}^4 - \eta_{\perp} k_{\perp}^2 - \eta_{\perp} k_{\perp}^4}{1 + k_{\perp}^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k_{\parallel}^2}{1 + k_{\perp}^2} - \left(\frac{\eta_{\perp} k_{\perp}^2 + \eta_{\perp} k_{\perp}^4 - i(1 - Kk_{\perp}^2)k_y - \mu_{\perp} k_{\perp}^4}{1 + k_{\perp}^2} \right)^2}. \quad (7)$$

当 $\delta = 1$ 时,方程(1)为描述带状流-漂移波的非线性动力学演化方程

$$- \nabla_{\perp}^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] + \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi$$

$$-\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_{\perp} \nabla_{\perp}^4 \phi. \quad (8)$$

当 $\delta = 0$ 时, 方程(1)为描述 ITG 模湍流扰动非线性动力学演化方程

$$\begin{aligned} & (1 - \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= - (1 + K \nabla_{\perp}^2) \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi \\ &+ [\phi, \nabla_{\perp}^2 \phi] - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \mu_{\perp} \nabla_{\perp}^4 \phi. \quad (9) \end{aligned}$$

利用调制不稳定性的四波相互作用模型来产生带状流, 在带状流-漂移波湍流系统的研究领域, 此方法应用得比较广泛^[5,16]. 这四种相互耦合的波按如下方式选取: 与带状流有关的静电势为

$$\phi_z(t) = \exp(iqx - i\Omega t) + c. c., \quad (10)$$

与漂移波有关的静电势为

$$\phi_d = \phi_d \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t) + c. c., \quad (11)$$

与两个边频带有关的静电势为

$$\begin{aligned} \phi_{\pm} &= \phi_{\pm} \exp(i(q \pm k_x)x \pm ik_y y - i\omega_{\pm} t) \\ &+ c. c., \quad (12) \end{aligned}$$

其中

$$k_{\pm} = q \pm k_x,$$

$$\omega_{\pm} = \Omega \pm \omega.$$

系统的单色漂移波通过和边频带耦合驱动带状流

$$\phi_+ = \frac{qk_y(k^2 - q^2)}{-i\omega_+(1 + k_+^2) + i(1 - Kk_+^2)k_y - \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} + \mu_{\perp} k_+^4} \phi_z \phi_d. \quad (17)$$

由方程(16)可得

$$\phi_- = \frac{-qk_y(k^2 - q^2)}{-i\omega_-(1 + k_-^2) - i(1 - Kk_-^2)k_y - \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} + \mu_{\perp} k_-^4} \phi_z \phi_d^*. \quad (18)$$

将方程(17)和(18)代入方程(13)后, 可得到带状流的色散方程

$$\Omega = k_y(q - 2k_x)\alpha_- |\phi_d|^2 - k_y(q + 2k_x)\alpha_+ |\phi_d|^2 \quad \text{其中}$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \frac{qk_y(k^2 - q^2)}{-i\omega_+(1 + k_+^2) + i(1 - Kk_+^2)k_y - \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} + \mu_{\perp} k_+^4}, \\ \alpha_- &= \frac{-qk_y(k^2 - q^2)}{-i\omega_-(1 + k_-^2) - i(1 - Kk_-^2)k_y - \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} + \mu_{\perp} k_-^4}. \end{aligned}$$

的产生. 所以, 带状流是一种二次模, 即由二次不稳定性产生.

将(10)–(12)式代入方程(8)和(9)后, 得到如下方程:

$$\begin{aligned} -q^2 \Omega \phi_z &= -qk_y(k_-^2 - k^2)\phi_d \phi_- + qk_y(k_+^2 - k^2)\phi_d^* \phi_+ \\ &+ \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi_z - \mu_{\perp} q^4 \phi_z, \quad (13) \\ &- i\omega(1 + k_{\perp}^2)\phi_d \\ &= -i(1 - Kk^2)k_y \phi_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi_d - qk_y(k_+^2 - q^2)\phi_z^* \phi_+ \\ &+ qk_y(k_-^2 - q^2)\phi_z \phi_-^* - \mu q^4 \phi_d + qk_y \phi_z \phi_-^*, \quad (14) \end{aligned}$$

$$-i\omega_+(1 + k_+^2)\phi_+$$

$$= -i(1 - Kk_+^2)k_y \phi_+$$

$$+ \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi_+ - \mu_{\perp} k_+^4 \phi_+$$

$$+ qk_y \phi_z \phi_d + qk_y(k^2 - q^2)\phi_z \phi_d, \quad (15)$$

$$-i\omega_-(1 + k_-^2)\phi_-$$

$$= i(1 - Kk_-^2)k_y \phi_- + \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} \phi_- - \mu_{\perp} k_-^4 \phi_-$$

$$-qk_y \phi_z \phi_d^* + qk_y(k^2 - q^2)\phi_z \phi_d^*. \quad (16)$$

由方程(15)可得

$$-\frac{1}{q^2} \frac{k_{\parallel}^2}{i\omega - \eta_{\perp} k_{\perp}^2} + \mu_{\perp} q^2, \quad (19)$$

此时,由于等离子体的湍流处于饱和态,所以在湍流饱和区漂移波幅度为^[17]

$$\tilde{\phi}_d \propto \frac{1}{k_x L_{T_i}}. \quad (20)$$

3. 数值结果

将(20)式代入带状流的色散方程,然后对色散方程(19)进行数值求解.求解时参数的取值为 $k_x = 0.05, k_y = 0.2, q = 0.75, K = 3.5, \eta_{\perp} = 2.5, L_{T_i} = 0.2$. 图1所示为对色散方程(19)求解所得到的带状流增长率与磁场剪切的关系,图中纵坐标 γ_z 表示带状流增长率,横坐标 k_{\parallel}^2 表示磁场剪切.从图1可

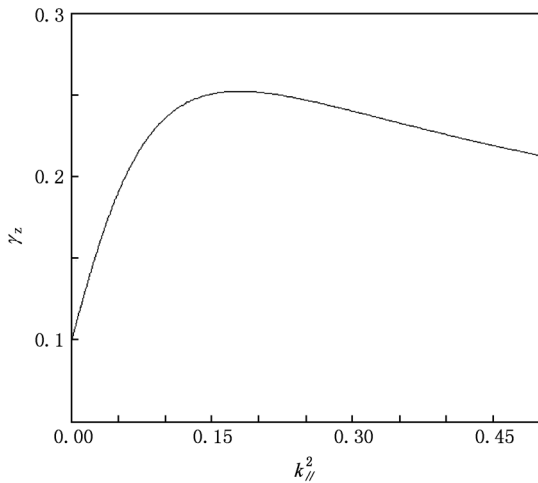


图1 带状流增长率 γ_z 随 k_{\parallel}^2 的变化关系

以看出:当 k_{\parallel}^2 从0增大到0.15附近时,带状流增长率 γ_z 迅速增大,随着 k_{\parallel}^2 的进一步增大,带状流的增长率稍微下降,但带状流的增长率还是比无剪切时大.这说明随着磁场剪切的增大,带状流的增长率呈变大的趋势,即磁场剪切对 ITG 模湍流中带状流的增长率有影响,在一定范围内 k_{\parallel} 的绝对值越大,带状流的增长率越大,但两者并不呈线性关系.

4. 结 论

本文采用非局域方法和调制不稳定性四波相互作用模型,并对 ITG 模湍流模型方程进行了解耦处理.为了突出磁场剪切效应,忽略了其他一些次要的参量,得到含磁场剪切效应的带状流与漂移波相互作用的非线性动力学方程,进一步研究了磁场剪切效应对带状流产生的影响.研究表明,在 k_{\parallel} 较小的范围内,当 $|k_{\parallel}|$ 增加时,托卡马克等离子体中的带状流的增长率也随之增加.这说明强的磁场剪切能促使带状流快速地产生,而带状流能有效地抑制托卡马克等离子体中的反常输运,因此,提高磁场剪切对托卡马克是有利的.在托卡马克等离子体中的漂移波与带状流相互作用的非线性动力学系统中,磁场剪切效应对系统的反常输运其他参数的影响、使用更理想的模型来处理没有解耦的 ITG 模系统等工作都是很有意义的,有待于进一步研究.

- [1] Hasegawa A, Macalennan C G, Kokama Y 1979 *Phys. Fluids* **22** 2122
- [2] Diamond P H, Itoh S I, Itoh K, Hahn T S 2005 *Plasma Phys. Control. Fusion* **47** R35
- [3] Biglari H, Diamond P H, Terry P W 1990 *Phys. Fluids B* **2** 1
- [4] Qiu X M, Peng X D, Li J Q, Wang X G 2005 *Nucl. Phys. Rev.* **22** 334 (in Chinese) [邱孝明、彭晓东、李继全、王晓刚 2005 原子核物理评论 **22** 334]
- [5] Chen L, Lin Z, White R B 2000 *Phys. Plasmas* **7** 3129
- [6] Guzdar P N, Kleva R G, Chen L 2001 *Phys. Plasmas* **8** 459
- [7] Yin S Q, Peng X D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3094 (in Chinese) [尹绍全、彭晓东 2004 物理学报 **53** 3094]
- [8] Hu G, Horton W 1997 *Phys. Plasmas* **4** 3262
- [9] Anderson J, Kishimoto Y 2007 *Phys. Plasmas* **14** 012308
- [10] Lu H L, Wang S J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 354 (in Chinese) [陆赫林、王顺金 2009 物理学报 **58** 354]
- [11] Li J Q, Kishimoto Y 2005 *Phys. Plasmas* **12** 054505
- [12] Horton W, Hoang G T, Bourdelle C, Garbet X, Ottaviani M, Colas L 2004 *Phys. Plasmas* **11** 2600
- [13] Hamaguchi S, Horton W 1990 *Phys. Fluids B* **2** 3040
- [14] Li J Q, Kishimoto Y 2003 *Phys. Plasmas* **10** 683
- [15] Wang Z X, Li J Q, Dong J Q, Kishimoto Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 015004
- [16] Manfredi G, Roach C M, Dendy R O 2001 *Plasma Phys. Control. Fusion* **43** 825
- [17] Yoshizawa A, Itoh S I, Itoh K, Nobumisu Y 2001 *Plasma Phys. Control. Fusion* **43** R1

Magnetic shear effect on zonal flow generation in ion-temperature-gradient mode turbulence *

Lu He-Lin^{1)†} Chen Zhong-Yong²⁾ Li Yue-Xun¹⁾ Yang Kai¹⁾

1) (*Department of Physics, Yunnan Nationalities University, Kunming 650031, China*)

2) (*School of Physics and Electronic Information Technology, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China*)

(Received 12 August 2010; revised manuscript received 27 December 2010)

Abstract

By decoupling the nonlinear fluid equations of ion-temperature-gradient (ITG) mode, the zonal flow-drift wave nonlinear dynamical equation including magnetic shear is derived. The role of magnetic shear for zonal flow generation by ITG mode turbulence is studied using a four-wave interaction model of modulational instability. Finally we can draw the conclusion that within a smaller range of k_{\parallel} , as $|k_{\parallel}|$ increases, the growth rate of zonal flow is also increased.

Keywords: tokamak plasmas, ion-temperature-gradient mode turbulence, zonal flow, magnetic shear

PACS: 52. 25. Xz, 52. 35. Kt, 52. 35. Ra

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11005090, 10805034) and the Fok Ying Tung Education Foundation, China (Grant No. 111006).

† E-mail: luhelin@gmail.com