

非线性偏微分方程边值问题的优化算法研究与应用*

侯祥林^{1)†} 刘铁林²⁾ 翟中海¹⁾

1) (沈阳建筑大学理学院, 沈阳 110168)

2) (沈阳建筑大学土木工程学院, 沈阳 110168)

(2010年10月2日收到; 2010年12月22日收到修改稿)

针对椭圆类非线性偏微分方程边值问题, 以差分法和动态设计变量优化算法为基础, 以离散网格点未知函数值为设计变量, 以离散网格点的差分方程组构建为复杂程式化形式的目标函数. 提出一种求解离散网格点处未知函数值的优化算法. 编制了求解未知离散点函数值的通用程序. 求解了具体算例. 通过与解析解对比, 表明了本文提出求解算法的有效性和精确性, 将为更复杂工程问题分析提供良好的解决方法.

关键词: 非线性偏微分方程, 边值问题, 动态设计变量优化算法, 程序设计

PACS: 02. 30. Jr, 02. 60. Lj, 02. 60. Pn

1. 引言

非线性偏微分方程包括椭圆型、抛物型、双曲型和混合型等, 分别涉及到波动理论、热传导问题、非线性力学、流体动力学、光学和控制理论等物理现象. 包括 KdV, Schrödinger 和 Sine-Gordon 等典型方程, 含初值、初边值和边值问题^[1,2]. 不同于线性偏微分方程, 尽管反散射法、齐次平衡法、函数变换法^[3,4]与目前广泛发展的多指数函数法和有理函数变换法等^[5-9]获得了许多经典非线性偏微分方程解析解法, 也解决了许多工程问题. 但仍有大量的非线性偏微分方程不能够用解析函数来表达, 需要构造数值计算方法实现. 目前, 针对初边值问题, 常采用多点差分迭代格式的数值求解方法. 近来格子法也开始引入^[10]. 对线性偏微分方程的边值问题, 通常采用高斯法求解大型疏松线性代数方程组实现求解. 但对非线性偏微分方程的边值问题, 由于此时的差分方程组已经不再是线性方程组, 运用差分方法直接计算将成为非常复杂的问题. 若将差分方程转变换为迭代方程, 难以满足迭代方程方程组苛刻的矩阵收敛条件, 而且随着离散网格节点增加, 计算就越困难.

本文基于动态设计变量优化方法的研究^[11], 针

对椭圆型类非线性偏微分方程的边值问题, 以非线性差分方程为基础, 以离散网格点未知函数值为动态设计变量, 以每个离散网格点的非线性差分方程来构建程式化的目标函数, 提出了求解离散网格点处未知函数值的非线性偏微分方程边值问题的优化算法. 与以往的算法相比, 只要实际问题的解存在, 那么当网格细化到一定要求的程度, 该算法将具有构造速度快, 计算精度高且一定收敛等优点, 这也将为非线性偏微分方程求解提供了新的有效的思想.

2. 非线性偏微分方程边值问题的差分构成

考虑如下二元二阶非线性椭圆型偏微分方程的最一般形式和第一类边界条件:

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right) = 0,$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (1)$$

其中, 函数 $u = u(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Ω 为 xy 平面中的具有边界 Γ 的一个有界区域. 在边界上 $(x, y) \in \Gamma$, $u(x, y)$ 为已知.

针对非线性偏微分方程, 可转化为相应的差分方程, 若以矩形区域如图 1 分析, 矩形区域范围 $a \leq$

* 国家自然科学基金 (批准号 10972144), 辽宁省自然科学基金 (批准号 20072011) 和辽宁省教育厅项目 (批准号: L2010445) 资助的课题.

† E-mail: drhouxl@tom.com

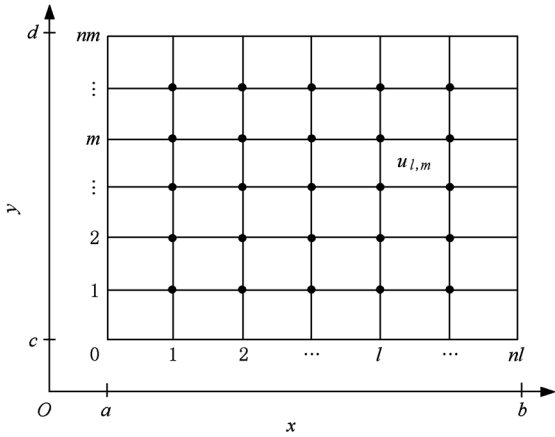


图1 差分网格区域

$x \leq b, c \leq y \leq d$. 应用等距离进行 h 网格分割, 分割线直线方程: $x_l = lh, l = 1, 2, \dots, nl, y_m = mh, m = 1, 2, \dots, nm$. 图1中, 涂黑点处函数值为未知. 未知点数为 $(nl - 1)(nm - 1)$ 个. 将方程(1)中各项转化, 以便形成差分方程组. 由函数泰勒级数展开:

$$u_{l+1,m} = \left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_{l,m},$$

$$u_{l-1,m} = \left(u - h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_{l,m},$$

$$u_{l,m+1} = \left(u + h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dots \right)_{l,m},$$

$$u_{l,m-1} = \left(u - h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dots \right)_{l,m},$$

得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{l,m} = \frac{u_{l+1,m} - u_{l-1,m}}{2h} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{l,m} = \frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2h} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{l,m} = \frac{u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}}{h^2} + O(h^2),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{l,m} = \frac{u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m}}{h^2} + O(h^2),$$

同时,

$$u_{l+1,m+1} = \left(u + h \frac{\partial u}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots \right)_{l,m},$$

$$u_{l-1,m-1} = \left(u - h \frac{\partial u}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dots \right)_{l,m},$$

得

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{l,m} = \frac{u_{l+1,m+1} + u_{l-1,m-1} + 2u_{l,m} - u_{l,m+1} - u_{l,m-1} - u_{l+1,m} - u_{l-1,m}}{2h^2} + O(h^2).$$

获得(1)式中各项的近似表达式:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{l,m} = \frac{u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{l,m} = \frac{u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{l,m} = \frac{u_{l+1,m+1} + u_{l-1,m-1} + 2u_{l,m} - u_{l,m+1} - u_{l,m-1} - u_{l+1,m} - u_{l-1,m}}{2h^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{l,m} = \frac{u_{l+1,m} - u_{l-1,m}}{2h},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{l,m} = \frac{u_{l,m+1} - u_{l,m-1}}{2h},$$

$$(u)_{l,m} = u_{l,m}.$$

(2)

将(2)式代入(1)式, 获得7点差分格式的非线性差分方程组

$$F \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{l,m}, u_{l,m} \right] \approx 0, l = 1, 2, \dots, nl - 1, m = 1, 2, \dots, nm - 1, \quad (3)$$

若(1)式为线性偏微分方程时,差分方程(3)将成为线性方程组,可以采用高斯消元法等数值程序方法直接求解;若(1)式为非线性偏微分方程时,差分方程(3)式将为 $(nl - 1)(nm - 1)$ 个方程构成非线性方程组.不能采用线性方程组求解方法,若构造数值迭代法也难以保证方程组中的每个方程都收敛,这使得未知函数值求解问题变得非常困难.下面针对这类问题,讨论在动态设计变量优化方法研究基础上,构建非线性偏微分方程边值问题的优化算法.

3. 非线性偏微分方程边值问题的优化算法

3.1. 优化问题的建立

求解非线性偏微分方程边值问题中节点未知函数值的求解问题,可以描述为无约束优化问题

$$\min(f(z)), \quad (4)$$

其中, $z \in \mathbf{R}^n$ 称为设计变量,表示网格节点的未知函数值, $z_i, i = 1, 2, \dots, n, n$ 为设计变量总维数, n

$= (nl - 1)(nm - 1)$. 若定义 $f_{l,m} = F \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{l,m}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{l,m}, u_{l,m} \right], l = 1, 2, \dots, nl - 1, m = 1, 2, \dots, nm - 1$, 则目标函数表达为

$$f(z) = \sum_{l=1}^{nl-1} \sum_{m=1}^{nm-1} f_{l,m}^2. \quad (5)$$

由于节点数目随网格划分而变化,设计变量维数 n 随之改变,目标函数的构成形式也发生相应变化,非线性差分方程的求解问题,就转化为所谓动态设计变量优化问题.每个设计变量所对应未知节点函数值是在程序运行中由实际输入与排序条件决定,目标函数是由框架式程式化过程动态实现的.理想优化结果 $f^*(z^*) = \min f(z) = 0$, 等价于(3)式中每个非线性差分方程为0.以计算精度 e 来控制优化程序结束条件,一般为 $f^*(z^*) = \min f(z) < e$, 所获得的设计变量理想值 $z^* = [z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*]^T$ 即为节点上未知函数值.

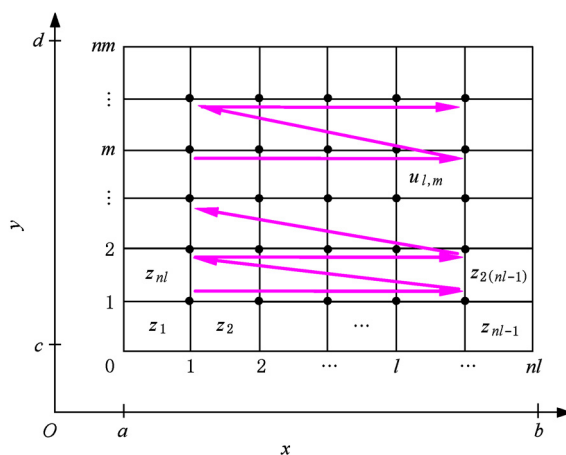


图2 未知节点函数与设计变量的关系

3.2. 未知函数值与设计变量的排序关系

动态设计变量 $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ 与未知函数值 $u_{l,m}$ 的对应关系,按图2所示顺序排列.其中设计变量下标码由 $i = l + (nl - 1)(m - 1), l = 1, 2, \dots, nl - 1, m = 1, 2, \dots, nm - 1$ 来确定.若 l, m 分别对应 x, y 两个方向的网格线序列码, $nl - 1, nm - 1$ 表示网格对应两个方向未知点数,则未知节点 (x_l, y_m) 函数值 $u_{l,m}$ 与动态设计变量的对应关系为

$$u_{l,m} = z_{l+(nl-1)(m-1)}, \quad l = 1, 2, \dots, nl - 1, m = 1, 2, \dots, nm - 1.$$

3.3. 框架式目标函数的程式化形成过程描述

$f(z)$ 框架式目标函数形成过程:

1) 赋初值: $f \leftarrow 0$.

2) 边界条件形成,其伪程序段为

for($l = 0$ to Nl), $\{x_l = l * h, u_{l,0} = \varphi(x_l, y_0), u_{l,Nm} = \varphi(x_l, y_{Nm})\}$;
for($m = 0$ to Nm), $\{y_m = m * h, u_{0,m} = \varphi(x_0, y_m), u_{Nl,m} = \varphi(x_{Nl}, y_m)\}$.

3) 设计变量排序,其伪程序段为

for($m = 1$ to $Nm - 1$), $\{for(l = 1$ to $Nl - 1), \{i = l + (m - 1) * (Nl - 1), u_{l,m} = z_i\}\}$.

4) 目标函数形成,按给定微分方程所构成的差分方程构成,其伪程序段为

for($m = 1$ to $Nm - 1$)

$$\{ \text{for}(l = 1 \rightarrow Nl - 1), \{ f_{l,m} = f((u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m})/h^2, (u_{l+1,m+1} + u_{l-1,m-1} + 2u_{l,m} - u_{l,m+1} - u_{l,m-1} - u_{l+1,m} - u_{l-1,m})/2/h^2, (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m})/h^2, (u_{l+1,m} - u_{l-1,m})/2/h, (u_{l,m+1} - u_{l,m-1})/2/h, u_{l,m}) \}, f \leftarrow f + f_{l,m} \}.$$

3.4. 精度判断

本文是针对非线性偏微分方程边值问题的解存在条件下的有效精确算法,属于数值算法范畴.由于计算结构相当于隐式迭代,当差分网格划分足够细,应具有满足要求的精度.网格划分程度也是一个问题.针对偏微分方程求解,其精度应考虑双重因素.1)当差分网格一定时,直接由优化算法实现在有限差分条件下的结果逼近程度;2)加密差分网格,通过判断公共网格节点函数值差别,来实现对偏微分方程解的逼近.设第 k 次网格划分时所有设计变量优化计算值为 $z_i^{(k)}, i = 1, 2, \dots, n^{(k)}$.

设第 $k + 1$ 次网格划分时所有设计变量优化计算值为 $z_i^{(k+1)}, i = 1, 2, \dots, n^{(k+1)}$,其中与第 k 次网格划分所对应的设计变量(具有 x, y 坐标节点相同的函数值)优化计算值: $z_i'^{(k+1)}, i = 1, 2, \dots, n^{(k)}$.

逼近程度评定可描述为

$$\Delta = \frac{1}{n^{(k)}} \sum_{i=1}^{n^{(k)}} \| z_i'^{(k+1)} - z_i^{(k)} \| < e_3. \quad (6)$$

3.5. 程序组成

程序设计采用 Fortran-PowerStation 语言,程序结构组成包括:

1)主程序;2) Powell 无约束优化子程序;3)一维搜索的进退法和黄金分割法子程序;4)动态设计

变量目标函数子程序段.5)微分方程逼近程度判断程序段.

4. 算例分析

算例 1 椭圆型方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 0.5,$$

边界条件

$$u(0, y) = 0, u(1, y) = y,$$

$$u(x, 0) = 0, u(x, 0.5) = \frac{1}{2} x^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

1) 程序求解:

本例为线性偏微分方程,也为非线性偏微分方程的特殊情况.求解方法是一样的.

简化 $f_{l,m}$ 为

$$f_{l,m} = x_l^2 (u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}) + y_m^2 (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m}) - u_{l,m} h^2.$$

设定黄金分割精度 $e_1 = 10^{-5}$, 多维 Powell 优化精度 $e_2 = 10^{-10}$. 取初值 $z_{0i} = 0.2, i = 1, 2, \dots, n$. 当取 $nl = 4, nm = 2$, 动态设计变量 $n = (4 - 1)(2 - 1) = 3$ 个, 网格步长为 $h = 0.25$. 程序经过 11 轮, 约 $11 \times 3 = 33$ 次优化计算, 目标函数达到所设定精度. 表 1 列出了优化程序计算获得的节点函数值.

当取 $nl = 8, nm = 4$, 动态设计变量 $n = (8 - 1)(4 - 1) = 21$ 个, 网格步长为 $h = 0.125$. 优化程序经过 1951 轮, 共约 $1951 \times 21 = 40971$ 次优化计算, 达到程序所设定计算精度. 表 2 为优化程序计算获得的节点函数值.

表 1 优化程序计算的节点函数值

设计变量	$u_{l,m}$	行标 l 与对应 x 坐标				
		1	2	3		
$z_1 - z_3$	列标 m 与对应 y 坐标	1	0.2	0.02696	0.08175	0.15713

表 2 优化程序计算的节点函数值

设计变量	$u_{l,m}$	行标 l 与对应 x 坐标								
		1	2	3	4	5	6	7		
$z_1 - z_7$	1	0.125	0.00439	0.01334	0.02564	0.04079	0.05848	0.07852	0.10073	
$z_8 - z_{14}$	列标 m 与对应 y 坐标	2	0.25	0.00875	0.02662	0.05122	0.08152	0.11693	0.15701	0.20145
$z_9 - z_{21}$	3	0.375	0.01306	0.03987	0.07676	0.12221	0.17533	0.23547	0.30215	

若设定 $e_3 = 0.00025$. 由(6)式作逼近程度评定 $\Delta = 0.00023 < e_3$, 达到计算精度要求.

2) 解析解分析:

本题解析解, 可以通过椭圆型方程标准形式转化和应用多指数函数方法两个步骤完成. 由特征方程

$$x^2(dy)^2 + y^2(dx)^2 = 0,$$

获得 $\ln y \pm i \ln x = C$, 设 $\xi = \ln y, \eta = \ln x$, 将原方程转化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = u,$$

这里, $u = u(\xi, \eta)$. 应用多指数函数方法确定解析

解^[16], 设 $z = a\xi + b\eta, u = u(z)$, 得到

$$(a^2 + b^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - (a + b) \frac{du}{dz} - u = 0,$$

再设 $u = e^z$, 则

$$[(a^2 + b^2) - (a + b) - 1]e^z = 0,$$

必须满足 $(a^2 + b^2) - (a + b) - 1 = 0$.

获得解析解 $u = e^{a \ln y + b \ln x} = y^a x^b$, 且满足 $(a^2 + b^2) - (a + b) - 1 = 0$. 代入边界条件, 得到 $a = 1, b = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. 最终获得解析解 $u = e^{\ln y + \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \ln x} = yx^{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}}$.

3) 优化结果与解析解对比:

针对 $nl = 8, nm = 4$ 情况, 将解析解列于表 3.

表 3 节点函数值解析解

$u(x_l, y_m)$		行标 l 与对应 x 坐标							
		1	2	3	4	5	6	7	
		0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	
列标 m 与对应 y 坐标	1	0.125	0.00432	0.01327	0.02557	0.04072	0.05843	0.07848	0.10071
	2	0.25	0.00864	0.02653	0.05113	0.08144	0.11686	0.15696	0.20142
	3	0.375	0.01297	0.03980	0.07670	0.12217	0.17529	0.23544	0.30213

将表 2 优化程序计算结果与表 3 的解析解对比. 获得平均误差 5.96×10^{-5} . 表明具有较高精度.

算例 2 非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^2, 0 < x < 1; 0 < y < 1;$$

边界条件

$$u(0, y) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}y + 1 \right)^{-2},$$

$$u(1, y) = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{10} + \frac{2\sqrt{6}}{15}y \right)^{-2},$$

$$u(x, 0) = \left(\frac{\sqrt{6}}{10}x + 1 \right)^{-2},$$

$$u(x, 1) = \left(\frac{\sqrt{6}}{10}x + \frac{2\sqrt{6}}{15} + 1 \right)^{-2}.$$

1) 程序求解: 本例是一个 2 维 2 阶稳态热传导

型非线性偏微分方程. 这里 $f_{l,m}$ 可表示为

$$f_{l,m} = (u_{l+1,m} + u_{l-1,m} - 2u_{l,m}) + (u_{l,m+1} + u_{l,m-1} - 2u_{l,m}) - u_{l,m}^2 h^2.$$

仍取初值 $z_{0i} = 0.2, i = 1, 2, \dots, n$. 黄金分割精度 $e_1 = 10^{-5}$, 多维 Powell 优化精度 $e_2 = 10^{-10}$. 当 $nl = nm = 2$ 时, 动态设计变量 $n = (2 - 1)(2 - 1) = 1$ 个, 网格步长为 $h = 0.5$. 此时为单变量优化, 程序经过 1 轮, 共 1 次优化计算, 达到设定精度. 优化计算结果为 $u(0.5, 0.5) = 0.60537$; 当取 $nl = nm = 4$, 动态设计变量 $n = (4 - 1)(4 - 1) = 9$ 个, 网格步长为 $h = 0.25$. 程序经过 382 轮, 共约 $382 \times 9 = 3438$ 次优化计算, 达到所设定精度. 表 4 为优化程序计算获得的节点函数值.

表 4 优化程序计算的节点函数值

设计变量	$u_{l,m}$	行标 l 与对应 x 坐标			
		1	2	3	
		0.25	0.50	0.75	
$z_1 - z_3$	1	0.25	0.76571	0.68983	0.62465
$z_4 - z_6$	2	0.50	0.66702	0.60503	0.55123
$z_7 - z_9$	3	0.75	0.58621	0.5349	0.49000

为描述真实优化计算过程,在表 5 中,给出 $nl = nm = 4$ 时,9 个设计变量的优化计算过程部分结果. 当取 $nl = nm = 8$, 动态设计变量 $n = (8 - 1)$

表 5 优化计算过程描述

轮次	本轮计算次数	设计变量			目标函数目标	轮次	本轮计算次数	设计变量			目标函数目标
0	0	0.20000	0.20000	0.20000	3.18685600000	100	9	0.76556	0.68964	0.62373	0.00035161360
		0.20000	0.20000	0.20000				0.66711	0.60644	0.55258	
		0.20000	0.20000	0.20000				0.58706	0.53756	0.48792	
1	9	0.43433	0.30702	0.37986	1.56714700000	200	10	0.76581	0.68992	0.62461	0.00000366557
		0.29058	0.15290	0.23228				0.66718	0.60511	0.55123	
		0.35632	0.22012	0.28593				0.58593	0.53455	0.48967	
5	9	0.76070	0.68686	0.62671	0.00524287900	300	9	0.76572	0.68983	0.62465	0.00000000050
		0.65865	0.61039	0.56918				0.66702	0.60503	0.55123	
		0.58636	0.54353	0.50099				0.58621	0.53490	0.49001	
10	10	0.76428	0.68567	0.61683	0.00172902700	381	9	0.76572	0.68983	0.62465	0.00000000040
		0.66814	0.60676	0.55597				0.66702	0.60503	0.55123	
		0.58852	0.53764	0.49340				0.58621	0.53490	0.49001	
50	9	0.76479	0.68613	0.61664	0.00162545400	382	9	0.76571	0.68983	0.62465	0.00000000006
		0.66839	0.60656	0.55528				0.66702	0.60503	0.55123	
		0.58780	0.53638	0.49250				0.58621	0.53490	0.49000	

$(8 - 1) = 49$ 个,网格步长为 $h = 0.125$. 优化程序经过 9837 轮,共约 $9837 \times 49 = 482013$ 次优化计算,目标达到所设定精度. 表 6 为程序计算获得的设计变量值与所对应的节点函数值.

表 6 优化程序计算的节点函数值

计变量	$u_{l,m}$	行标 l 与对应 x 坐标								
		1	2	3	4	5	6	7		
		0.125	0.25	0.375	0.50	0.625	0.75	0.875		
$z_1 \sim z_7$	1	0.125	0.87111	0.82338	0.77947	0.73897	0.70156	0.66691	0.63476	
$z_8 \sim z_{14}$	2	0.25	0.80834	0.76562	0.72619	0.68973	0.65595	0.62458	0.59541	
$z_{15} \sim z_{21}$	3	0.375	0.75212	0.71372	0.67819	0.64525	0.61464	0.58616	0.5596	
$z_{22} \sim z_{28}$	列标 m 与对应 y 坐标	4	0.50	0.70156	0.66693	0.63479	0.60492	0.57711	0.55116	0.52693
$z_{29} \sim z_{35}$	5	0.625	0.65593	0.62458	0.59542	0.56825	0.5429	0.51921	0.49703	
$z_{36} \sim z_{42}$	6	0.75	0.61461	0.58614	0.5596	0.53482	0.51165	0.48995	0.46961	
$z_{43} \sim z_{49}$	7	0.875	0.57708	0.55115	0.52692	0.50426	0.48302	0.46310	0.44439	

若设定 $e_3 = 0.0001$, 按逼近程度评定 $\Delta = 0.000022 < e_3$, 达到计算精度要求.

2) 解析解求解与计算精度比较

从理论上,针对非线性偏微分方程,最好是获得解析解. 目前 Multi exp-function method 和 Transformed rational function method 等方法,给出了

良好的获得非线性偏微分方程解析解的思想. 通过合理的中间变量设计,将偏微分方程转化为常微分方程,并通过求解常微分方程,来获得非线性偏微分方程的解析解.

按 Transformed rational function method 分析^[12], 若设 $u = u(\xi)$, $\xi = ax + by + c$, 其中, a, b, c 为待定参数. 则原方程可以转化为常微分方程

$$(a^2 + b^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} - u^2 = 0, \quad = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{10} + \frac{2\sqrt{6}}{15}y\right)^{-2},$$

显然只要选取 $u(\xi) = \frac{d}{\xi^2}$, 其中 d 为常数. 则方程可

$$u(x, 0) = \frac{d}{(ax + c)^2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{10}x + 1\right)^{-2},$$

以化为

$$[6d(a^2 + b^2) - d^2] \frac{1}{\xi^4} = 0,$$

必须满足

$$u(x, 1) = \frac{d}{(ax + b + c)^2} = \left(\frac{\sqrt{6}}{10}x + \frac{2\sqrt{6}}{15} + 1\right)^{-2},$$

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{6d} = 0.$$

则

$$u(x, y) = \frac{d}{(ax + by + c)^2},$$

得到

$$a = \frac{\sqrt{6}}{10}\sqrt{d}, b = \frac{2\sqrt{6}}{15}\sqrt{d}, c = \sqrt{d}.$$

且

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{6d}$$

可以获得解析解

$$u(x, y) = \left(\frac{\sqrt{6}}{10}x + \frac{2\sqrt{6}}{15}y + 1\right)^{-2}.$$

代入条件边界条件

$$u(0, y) = \frac{d}{(by + c)^2} = \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}y + 1\right)^{-2},$$

可见, 对存在解析解的非线性偏微分方程. 通常可用恰当化简方法, 通过非线性偏微分方程的常微分方程化思路, 获得解析解. 解析解表达问题准确结果. 将 $nl = nm = 8$ 情况的对应的节点函数解析解列于表 7.

$$u(1, y) = \frac{d}{(a + by + c)^2}$$

表 7 节点函数值解析解

$u(x_l, y_m)$		行标 l 与对应 x 坐标							
		1	2	3	4	5	6	7	
		0.125	0.25	0.375	0.50	0.625	0.75	0.875	
列标 m 与对应 y 坐标	1	0.125	0.87109	0.82336	0.77944	0.73895	0.70154	0.66689	0.63475
	2	0.25	0.80832	0.76559	0.72616	0.68970	0.65591	0.62456	0.59539
	3	0.375	0.75209	0.71369	0.67815	0.64520	0.61460	0.58612	0.55958
	4	0.50	0.70154	0.66689	0.63475	0.60488	0.57707	0.55113	0.52691
	5	0.625	0.65591	0.62456	0.59539	0.56823	0.54288	0.51919	0.49701
	6	0.75	0.61460	0.58612	0.55958	0.53480	0.51163	0.48994	0.46959
	7	0.875	0.57707	0.55113	0.52691	0.50424	0.48301	0.46309	0.44438

将表 6 与表 7 的 49 个节点优化计算的函数值与解析函数值比较, 平均绝对误差只有 0.0000295. 这充分表明, 本文优化算法对非线性问题具有较高的计算精确. 若增加网格节点数目, 可获得更准确的结果.

问题分析. 通过推广, 将拓展解决更多工程问题.

分析表明, 若非线性偏微分方程, 不存在解析解, 或者存在解析解, 但其表达式不能有初等函数直接表述时, 数值方法是一种良好的补充. 本文正是针对这类问题, 构造的一种精度较高的非线性偏微分方程优化数值求解方法, 并针对二阶边值问题

5. 结 论

本文基于差分方程原理和动态设计变量优化方法, 针对非线性偏微分方程的边值问题, 探讨一种高精度优化算法. 以通过合理排序, 使得离散网格点未知函数值为设计变量, 以每个离散网格点的非线性差分方程满足条件来构建复杂框架式目标函数, 建立了求解离散网格点处未知函数值的优化

问题,并给出具体求解方法与步骤.同时给出了逼近程度评定方法,以满足网格精度要求.应用 Fortran-PowerStation 编制求解非线性偏微分方程未知离散点函数值的通用优化程序,求解了一个线性偏微分方程和稳定热传导问题的非线性偏微分方程算例,并按多指数函数和有理函数变换法进行解析解分析,并给出优化计算结果与解析解的对比.所获得具有 4 位有效小数准确度,表明本文所提出

方法可获得高精度的计算结果.将针对难以获得解析解的偏微分方程问题的一种良好补充.鉴于工程中大量的非线性偏微分方程问题,本文所提出新的有效优化数值算法,为更复杂理论与工程实际中的非线性偏微分方程的分析提供条件.在此基础上,将通过进一步算法改进,将推广到复杂高阶非线性偏微分方程的应用.

- [1] Gu C H, Li D Q, Shen W X 1994 *Applied partial differential equations* (Beijing: Higher Education Press) pp161—192 (in Chinese)[谷超豪、李大潜、沈玮熙 1994 应用偏微分方程(北京:高等教育出版社)第 161—192 页]
- [2] Liu S K, Liu S D 2000 *Nolinear equations in physics* (Beijing: Beijing University Press) pp7—15 (in Chinese)[刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程(北京:北京大学出版社)第 7—15 页]
- [3] Li W, Xie F D 2004 *Chin. Phys.* **13** 1639
- [4] Zhang W G 1998 *Acta Math. Appl.* **21** 249 (in Chinese)[张卫国 1998 应用数学学报 **21** 249]
- [5] Ma W X, Lee J H 2009 *Chaos, Solitons & Fractals* **42** 1356
- [6] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417
- [7] Ma W X, Huang T W, Zhang Y 2010 *Phys. Ser.* **82** 065003
- [8] Li Y Z, Feng W G, Li K M, Lin C 2007 *Chin. Phys.* **16** 2510
- [9] Ma W X, Gu X, Gao L 2009 *Adv. Appl. Math. & Mech.* **1** 573
- [10] Chen L J, Ma C F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010504
- [11] Hou X L, Qian Y, Wu H T 2010 *Acta Math. Eng.* **27** 663 (in Chinese)[侯祥林、钱颖、吴海涛 2010 工程数学学报 **27** 663]

Study and application of optimization algorithm about nonlinear partial differential equations with boundary value problem *

Hou Xiang-Lin^{1)†} Liu Tie-Lin²⁾ Zhai Zhong-Hai¹⁾

1) (School of Science, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China)

2) (School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China)

(Received 2 October 2010; revised manuscript received 22 December 2010)

Abstract

For elliptic nonlinear partial differential equations with boundary value problem, based on difference method and dynamic design variable optimization method, by taking unknown function value on discrete net point as design variables, difference equation of all the discrete net points is constructed as an objective function. A kind of optimization algorithm about solving unknown function value on discrete net point is proposed. Universal computing program is designed. Practical example is analyzed. By comparing the computing result with the analytical solution, effectiveness and feasibility are verified. Thus complicated nonlinear mathematical physics equations can be solved by the numerical calculation method.

Keywords: nonlinear partial differential equations, boundary value problem, dynamic design variables optimization method, program design

PACS: 02. 30. Jr, 02. 60. Lj, 02. 60. Pn

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10972144), the Natural Science Foundation of Liaoning Province (Grant No. 20072011) and the Science Research Projects of Education Department of Liaoning Province (Grant No. L2010445).

† E-mail: drhouxl@tom.com