

回旋管谐振腔本征模式计算的新算法*

刘睿† 李宏福 牛新建

(电子科技大学, 大功率微波电真空器件技术国防科技重点实验室, 电子科技大学高能电子学研究所, 成都 610054)

(2010年11月18日收到; 2010年12月27日收到修改稿)

基于龙格库塔理论, 提出了一种计算回旋管谐振腔本征模式的新方法. 不同于传统计算方法, 新算法只需要通过对含有本征模式谐振频率和 Q 值, 两个变量的目标函数进行最小值优化, 就能够确定出回旋管谐振腔本征模式的所有特性. 通过实例的具体计算, 可以证明新算法的计算效率, 相对于传统计算方法有了本质上的提高.

关键词: 回旋管, 算法, 本征模式, 计算效率

PACS: 02.60.Lj, 84.40.Ik, 87.55.Kd

1. 引言

回旋管谐振腔本征模式的计算, 是一项非常重要的工作. 它不仅是合理设计回旋管谐振腔尺寸的基础, 也是进一步研究回旋管注-波相互作用和模式竞争的前提^[1-4]. 由于回旋管工作频率高, 一般的工作范围为 90GHz 到 190GHz 之间, 所以类似于 HFSS 的高频场模拟计算软件, 很难方便准确地计算和分析出本征模式的特性. 这也是世界各国学者在此领域进行研究时, 多采用数值计算方法进行求解的主要原因^[5-8]. 回旋管谐振腔本征模式必须满足的边值问题如下^[9]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_{mn}^{(i)}}{dz^2} &= [\gamma_{mn}^{(i)}]^2 V_{mn}^{(i)} + \frac{d[\ln \gamma_{mn}^{(i)} Z_{mn}^{(i)}]}{dz} \cdot \frac{dV_{mn}^{(i)}}{dz} \\ &- \frac{d[\ln \gamma_{mn}^{(i)} Z_{mn}^{(i)}]}{dz} \cdot \left[\sum_j \sum_{mn'} V_{mn'}^{(i)} \cdot C_{(n',n)}^{(j,i)} \right] \\ &- \sum_j \sum_{mn'} \left[\frac{\gamma_{mn}^{(i)} Z_{mn}^{(i)}}{\gamma_{mn'}^{(j)} Z_{mn'}^{(j)}} \cdot \frac{dV_{mn'}^{(i)}}{dz} \right] \\ &+ \sum_j \sum_{mn'} V_{mn'}^{(j)} \left[\frac{\gamma_{mn}^{(i)} Z_{mn}^{(i)}}{\gamma_{mn'}^{(j)} Z_{mn'}^{(j)}} \right] \\ &\times \left[\sum_l \sum_{mn''} V_{mn''}^{(l)} \cdot C_{(n'',n')}^{(l,j)} \right] \\ &+ \sum_j \sum_{mn'} C_{(n',n)}^{(j,i)} \cdot \frac{dV_{mn'}^{(i)}}{dz} \end{aligned}$$

$$+ \sum_j \sum_{mn'} V_{mn'}^{(i)} \cdot \frac{dC_{(n',n)}^{(j,i)}}{dz}, \quad (1a)$$

$$\frac{dV_{mn}^{(i)}}{dz} \mp \gamma_{mn}^{(i)} V_{mn}^{(i)} \Big|_{z=0,L} = 0, \quad (1b)$$

式中上标 i, j 和 l 取 1 或 2, 1 代表 TM 模式, 2 代表 TE 模式; $V_{mn}^{(i)}$ 为电压幅值函数; $Z_{mn}^{(i)}$ 为波阻抗, $Z_{mn}^{(1)} = \gamma_{mn}^{(1)} / j\omega\epsilon$ 和 $Z_{mn}^{(2)} = j\omega\mu / \gamma_{mn}^{(2)}$; $C_{(s,n)}^{(j,i)}$ 为模式耦合系数; $[\gamma_{mn}^{(i)}]^2 = [k_{mn}^{(i)}]^2 - \omega^2/c^2$, $\omega = \omega_0 [1 + i/(2Q)]$; ω_0 和 Q 分别代表本征模式的谐振频率和 Q 值, 它们也是待求变量. 通过求解 (1) 式, 就可以得到关于谐振腔本征模式的一切特性.

文献[9, 10]详细描述了关于求解 (1) 式的传统计算方法, 在传统方法中, (1) 式的边值问题被转化为如下的最优化问题:

$$\sum_i \sum_{mn} \left| \frac{dV_{mn}^{(i)}}{dz} + \gamma_{mn}^{(i)} V_{mn}^{(i)} \right|_{z=L} \rightarrow \min, \quad (2)$$

(2) 式中包含的优化变量为 $V_{mn}^{(i)}$, ω_0 和 Q (由 $\frac{dV_{mn}^{(i)}}{dz}$ 由边界条件决定), 其中 $V_{mn}^{(i)}$ 的个数随着考虑的模式数增加而增加. 传统算法中对 (2) 式的优化, 是依靠可变多面体搜索法^[11]实现的. 由于该搜索法是一种局部直接搜索法, 所以它导致传统算法具有以下两点局限性: 1) 对各变量初值的选取依赖性很强. 换言之, 如果初值的选取是在最优解附近则能得到满意解, 否则很难获得满意解; 2) 因为可变多面体搜

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 803-410-7) 资助的课题.

† E-mail: uestcjoey@126.com

索法的优化变量不宜过多,所以在谐振腔内存在的模式数较多时,很难得到有效解.

为了克服上述局限性,本文提出了一种新计算方法.该方法利用龙格库塔理论,将对(1)式的求解,转化为对只含有 ω_0 和 Q 两个变量的目标函数极小值求解问题.对于忽略谐振腔内模式耦合现象的情况,该方法能够获得全局最优解.而对于考虑模式耦合现象的情况,为了获得满意解,需要做一个合理必要的假设.

2. 新算法的描述

假设存在 s 个 TE 模式和 t 个 TM 模式的回旋管谐振腔,它的本征模式为 TE_{mn} . 令 $y_1 = V_{mn_1}^{(2)}, \dots, y_s = V_{mn_s}^{(2)}, y_{s+1} = V_{mn_{s+1}}^{(1)}, \dots, y_{s+t} = V_{mn_{s+t}}^{(1)}, y_{s+t+1} = \frac{dV_{mn_{s+t+1}}^{(2)}}{dz}, \dots, y_{2s+t} = \frac{dV_{mn_{2s+t}}^{(2)}}{dz}, y_{2s+t+1} = \frac{dV_{mn_{2s+t+1}}^{(1)}}{dz}, \dots, y_{2s+2t} = \frac{dV_{mn_{2s+2t}}^{(1)}}{dz}$, 这里, $mn_p (p = 1, 2, \dots, 2s + 2t)$ 代表不同的模式. 此时,由(1)式可得

$$\frac{dy_1}{dz} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1v}y_v,$$

$$\frac{dy_2}{dz} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2v}y_v,$$

⋮

$$\frac{dy_v}{dz} = a_{v1}y_1 + a_{v2}y_2 + \dots + a_{vv}y_v; \quad (3a)$$

$$z = 0, y_1 = \alpha_1, \quad (3b1)$$

$$y_{k+s+t} - \gamma_{mn_k}^{(2)} y_k \Big|_{z=0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, s),$$

$$y_{k+s+t} - \gamma_{mn_k}^{(1)} y_k \Big|_{z=0} = 0, \quad (k = s + 1, \dots, s + t); \quad (3b2)$$

$$z = L, y_1 = \beta_1,$$

$$S_{11}(\omega_0, Q)\alpha_1 + S_{12}(\omega_0, Q)\alpha_2 + \dots + S_{1v}(\omega_0, Q)\alpha_v = \beta_1,$$

$$S_{21}(\omega_0, Q)\alpha_1 + S_{22}(\omega_0, Q)\alpha_2 + \dots + S_{2v}(\omega_0, Q)\alpha_v = \beta_2,$$

⋮

$$S_{v1}(\omega_0, Q)\alpha_1 + S_{v2}(\omega_0, Q)\alpha_2 + \dots + S_{vv}(\omega_0, Q)\alpha_v = \beta_v, \quad (5)$$

这里 $v = 2s + 2t$. 将(5)式代入(3c2)式中,可得

$$\sum_{k=1}^s \sum_p [\gamma_{mn_k}^{(2)} S_{k+s+t,p}(\omega_0, Q) + S_{k,p}(\omega_0, Q)] \alpha_p$$

$$y_2 = \beta_2, \dots, y_v = \beta_v; \quad (3c1)$$

$$y_{k+s+t} + \gamma_{mn_k}^{(2)} y_k \Big|_{z=L} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

$$y_{k+s+t} + \gamma_{mn_k}^{(1)} y_k \Big|_{z=L} = 0, \quad (k = s + 1, \dots, s + t). \quad (3c2)$$

上式中 $v = 2s + 2t, a_{pq} (p, q = 1, 2, \dots, 2s + 2t)$ 是 $\gamma_{mn}^{(i)}, Z_{mn}^{(i)}$ 和 $C_{(n,n')}^{(i,j)}$ 的函数,由(1)式决定.(3)式是谐振腔内所有模式都必须满足的数学模型,不论传统算法,还是本文的新算法都是基于对该模型的求解,而计算出本征模式的相关特性.下面,在给出新算法的具体计算步骤前,需要引出定理1.

定理1 在利用龙格库塔法对(3)式进行积分计算时,各变量 y_p 的每一步积分值可以表示为(证明见附录)

$$y_{p,u} = \sum_q \overbrace{f_{pq}(\dots f_{pq}(\omega_0, Q))}^{u-1} \alpha_q, \quad (p, q = 1, 2, \dots, 2s + 2t), \quad (4a)$$

其中

$$f_{pq}(\omega_0, Q) = \delta_{pq} + ha_{pq} + \frac{(h)^2}{3} \sum_l a_{pl} a_{lq} + \frac{(h)^3}{6} \sum_l a_{ll} \sum_r a_{lr} a_{rq} + \frac{(h)^4}{24} \sum_l a_{pl} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} a_{hq}, \quad (p, q, l, r, h = 1, 2, \dots, 2s + 2t), \quad (4b)$$

(4a)式中, u 为某积分步数; ω_0 和 Q 为本征模式的谐振频率和 Q 值,也是待求解; α_q 是(3b1)式中的边界值;(4b)式中,当 $p = q$ 时 δ_{pq} 为1,否则为零.

对于(3)式,如果从 $z = 0$ 到 $z = l$ 共需要进行 g 步的积分计算,那么利用定理1,可将(3c1)式中的

$$y_p \text{ 写为 } y_{p,g} = \sum_q \overbrace{f_{pq}(\dots f_{pq}(\omega_0, Q))}^{g-1} \alpha_q. \text{ 方便起见,令}$$

$$S_{pq}(\omega_0, Q) = \overbrace{f_{pq}(\dots f_{pq}(\omega_0, Q))}^{g-1}, \text{ 此时(3c1)式可以转化为}$$

$$+ \sum_{k=s+1}^{s+t} \sum_p [\gamma_{mn_k}^{(1)} S_{k+s+t,p}(\omega_0, Q) + S_{k,p}(\omega_0, Q)] \alpha_p = 0. \quad (6)$$

至此,边值问题(3)已转化为方程求解问题(6).下面,给出新算法的具体计算步骤.

第一步,将谐振腔本征模式满足的边值问题(3)转化为方程(6)的形式;

第二步,对(6)式进行求解,如果(6)式有零解,此时的 ω_0 和 Q 即为最终解;

第三步,如果(6)式没有零解,通过对它的极小值优化,确定出 ω_0 和 Q .

为了说明新算法的优势,下面以文献[6]中工作频率为 150 GHz,工作模式为 TE_{03} 的回旋管为例进行详细的计算和说明.在具体分析中,从忽略模式耦合现象和考虑模式耦合现象两个方面,对新算法和传统算法进行全面的比较.

3. 忽略模式耦合现象

3.1. 新算法

工作模式 TE_{03} 所满足的(1)式,可写为

$$\frac{d^2 V_{03}^{(2)}}{dz^2} = [\gamma_{03}^{(2)}]^2 V_{03}^{(2)}, \quad (7a)$$

$$\frac{dV_{03}^{(2)}}{dz} \mp \gamma_{03}^{(2)} V_{03}^{(2)} \Big|_{z=0,L} = 0. \quad (7b)$$

按照新算法的计算步骤如下:

第一步,令 $V_{03}^{(2)} = y_1$, $\frac{dV_{03}^{(2)}}{dz} = y_2$, (7) 式可以写为

$$\frac{dy_1}{dz} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dz} = [\gamma_{03}^{(2)}]^2 y_1; \quad (8a)$$

$$\frac{dy_1}{dz} - \gamma_{03}^{(2)} y_1 \Big|_{z=0} = 0; \quad (8b)$$

$$\frac{dy_1}{dz} + \gamma_{03}^{(2)} y_1 \Big|_{z=L} = 0. \quad (8c)$$

在 $z=0$ 处,令 $y_1 = y_0$,这里 y_0 代表 TE_{03} 在谐振腔输入端的幅值.利用定理 1,可得

$$S(\omega_0, Q) y_0 = 0, \quad (9)$$

式中的 $S(\omega_0, Q)$ 由定理 1 决定.

第二步,容易验证在 $\omega_0 \in (140 \text{ GHz}, 160 \text{ GHz})$ 和 $Q > 0$ 时, $S(\omega_0, Q)$ 无零解.此外,因为 $y_0 \neq 0$,所以可知(9)式无零解.

第三步,由于(9)式无零解,所以对(9)式进行极小值优化

$$S(\omega_0, Q) y_0 \rightarrow \min, \quad (10)$$

易知,(10)式中 y_0 与 $S(\omega_0, Q)$ 无关.所以,(10)等价于

$$S(\omega_0, Q) \rightarrow \min. \quad (11)$$

利用图解法^[12]容易求出,在 $\omega_0 = 150.116 \text{ GHz}$, $Q = 3193$ 时,(11)式有最小值 0.179.此时, TE_{03} 的场幅值分布结构如图 1 所示.

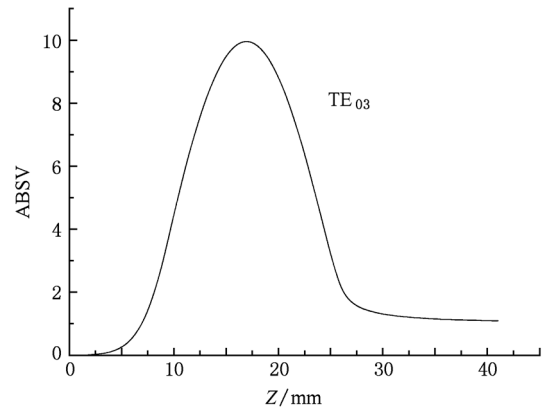


图 1 TE_{03} 的场幅值结构

图 1 中,ABS 为场幅值绝对强度, $Z(\text{mm})$ 代表谐振腔轴向长度.这里,需要明确两点:1)图 1 中 TE_{03} 的场幅值结构,是在假定 $y_0 = 1$ 时计算绘出的.容易验证, TE_{03} 的场幅值结构与 y_0 无关,只与 ω_0 和 Q 相关;2)(11)式的最小值是基于 $S(\omega_0, Q)$ 的三维图像而确定的.所以,这里获得的 ω_0 和 Q 为全局最优解.

3.2. 传统算法

对于传统算法而言,边值问题(7)的求解将被转化为

$$\left| \frac{dV_{03}^{(2)}}{dz} + \gamma_{03}^{(2)} V_{03}^{(2)} \right|_{z=L} \rightarrow \min, \quad (12)$$

(12)式中需要优化的变量共有 4 个, $V_{03}^{(2)}$ 的实部和虚部,以及模式 TE_{03} 的 ω_0 和 Q ($\frac{dV_{03}^{(2)}}{dz}$ 由边界条件确定).通过可变多面体搜索法,在满足其收敛条件时,可以确定出 ω_0 , Q 和 $V_{03}^{(2)}$ 的值分别为 150.111 GHz, 2950 和 $(1.34D - 2, -2.27D - 3)$.此时, TE_{03} 的场幅值结构如图 2 所示.

对比图 1 和图 2,容易看出后者中 TE_{03} 的波形在谐振腔输出端有明显的褶皱.从边界条件(7b)的物理意义可知,相对于新算法,传统算法没有取得 TE_{03} 模式 ω_0 和 Q 的满意解,这也直接说明了传统算

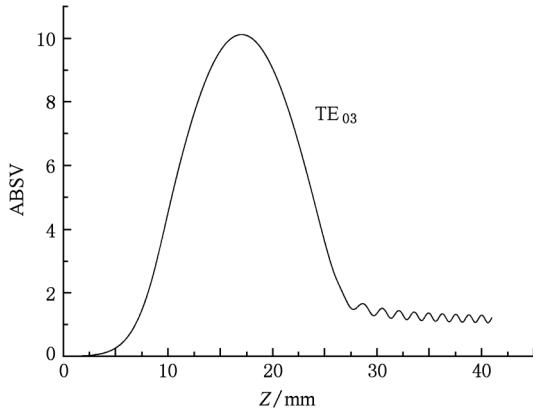


图2 传统算法时 TE₀₃ 的场幅值结构

法的计算准确度不及新算法. 将传统算法计算的 ω_0 和 Q 代入(11)式中, (11)式的值为 30.27, 而新算法中(11)式的最小值为 0.179. 这就解释了图 1 中 TE₀₃ 波形比图 2 平滑的原因, 因为由传统算法计算的 ω_0 和 Q 不是新算法的全局最优解.

4. 考虑模式耦合现象

4.1. 考虑 3 个模式的耦合

4.1.1. 新算法

考虑 TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 三个模式相互耦合的情况, 应用新算法.

第一步, 令 $V_{01}^{(2)} = y_1$, $V_{02}^{(2)} = y_2$, $V_{03}^{(2)} = y_3$, $\frac{dV_{01}^{(2)}}{dz} = y_4$, $\frac{dV_{02}^{(2)}}{dz} = y_5$, $\frac{dV_{03}^{(2)}}{dz} = y_6$, 结合(1)式, 可得

$$\frac{dy_1}{dz} = y_4, \frac{dy_2}{dz} = y_5, \frac{dy_3}{dz} = y_6,$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_4}{dz} = & \{ [\gamma_{01}^{(2)}]^2 + [C_{(2,1)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(3,1)}^{(2,2)}]^2 \} y_1 \\ & + \left\{ C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,2)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(1,2)}^{(2,2)} \right\} y_2 \\ & + \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(1,3)}^{(2,2)} \right\} y_3 \\ & + \{ 2C_{(1,2)}^{(2,2)} \} y_5 + \{ 2C_{(1,3)}^{(2,2)} \} y_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_5}{dz} = & \left\{ C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,2)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,1)}^{(2,2)} \right\} y_1 \\ & + \{ [\gamma_{02}^{(2)}]^2 + [C_{(1,2)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(3,2)}^{(2,2)}]^2 \} y_2 \\ & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,3)}^{(2,2)} \right\} y_3 \end{aligned}$$

$$+ \{ 2C_{(2,1)}^{(2,2)} \} y_4 + \{ 2C_{(2,3)}^{(2,2)} \} y_6,$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_6}{dz} = & \left\{ C_{(2,3)}^{(2,2)} C_{(2,1)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(3,1)}^{(2,2)} \right\} y_1 \\ & + \left\{ C_{(1,3)}^{(2,2)} C_{(1,2)}^{(2,2)} - \frac{da}{dz} C_{(3,2)}^{(2,2)} \right\} y_2 \\ & + \{ [\gamma_{03}^{(2)}]^2 + [C_{(1,3)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(2,3)}^{(2,2)}]^2 \} y_3 \\ & + \{ 2C_{(3,1)}^{(2,2)} \} y_4 + \{ 2C_{(3,2)}^{(2,2)} \} y_5; \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dz} - \gamma_{0i}^{(2)} y_i \Big|_{z=0} = 0, \\ (i = 1, 2, 3); \end{aligned} \quad (13b)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dz} + \gamma_{0i}^{(2)} y_i \Big|_{z=L} = 0, \\ (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (13c)$$

式中耦合系数 $C_{(s,t)}^{(p,q)}$ 的表达式见文献[15] ($p, q = 1, 2$).

令 $y_1 = y_{1,0}$, $y_2 = y_{2,0}$ 和 $y_3 = y_{3,0}$, 这里 $y_{1,0}$, $y_{2,0}$ 和 $y_{3,0}$ 分别为 TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 在谐振腔输入端的幅值. 利用定理 1, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \{ S_{i1}(\omega_0, Q) y_{1,0} + S_{i2}(\omega_0, Q) y_{2,0} \\ + S_{i3}(\omega_0, Q) y_{3,0} \} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $S_{ij}(\omega_0, Q)$ ($i, j = 1, 2, 3$) 由定理 1 决定; ω_0 和 Q 分别为 TE₀₃ 的谐振频率和 Q 值.

第二步, 为了减少(14)式的变量, 假设 TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 三个模式在谐振腔输入端的幅值相等, 即令 $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = 1$. 该假设随后会被证明, 是合理和可行的, 这时可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \{ S_{i1}(\omega_0, Q) + S_{i2}(\omega_0, Q) \\ + S_{i3}(\omega_0, Q) \} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

容易验证, 在 ω_0 和 Q 合理的取值范围内(15)式无零解.

第三步, 对(15)式进行极小值优化

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \{ S_{i1}(\omega_0, Q) + S_{i2}(\omega_0, Q) \\ + S_{i3}(\omega_0, Q) \} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (16)$$

为了验证(15)式中 $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = 1$ 的假设, 计算出在(16)式取最小值时, TE₀₃ 的谐振频率和 Q 值, 以及 TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 的场幅值结构, 如图 3 所示.

由于图 3 中各模式的波形在谐振腔输出端非常平滑, 所以可以判断 $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = 1$ 的假设是可行的. 此外, 对比文献[6]中的计算结果, TE₀₃ 的 ω_0 和 Q 分别为 150.01 GHz 和 3654, 可知与本文的

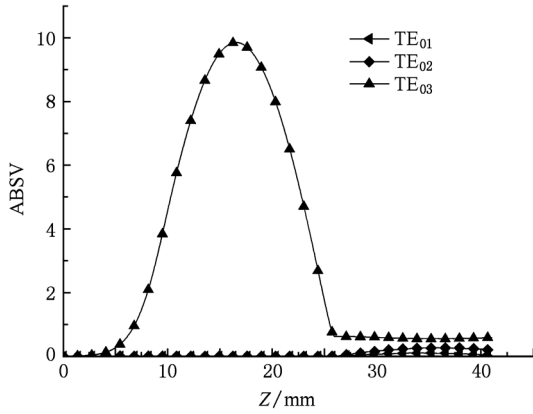


图3 TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 的场幅值结构, 此时 TE₀₃ 的 $\omega_0 = 150.13143$ GHz, $Q = 8934$, (16) 取最小值 32.7

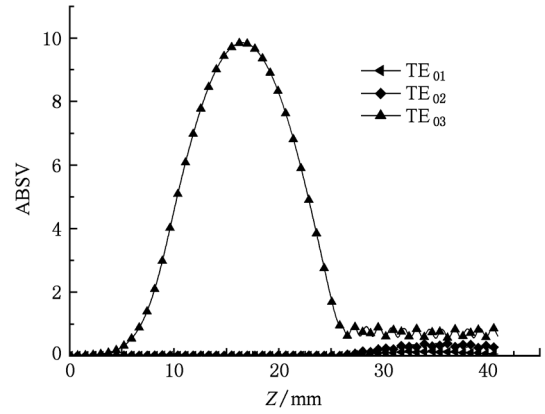


图4 传统算法时, TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 的场幅值结构. 此时 $\omega_0 = 150.01$ GHz, $Q = 3615$, $V_{01}^{(2)} = (3.17D - 3, 1.54D - 4)$, $V_{02}^{(2)} = (2.79D - 2, -5.31D - 3)$, $V_{03}^{(2)} = (2.39D - 3, 1.83D - 4)$

计算结果相差很多, 而且可以验证该文献中的所有计算结果, 均不如利用本文的新算法获得的结果准确. 特别是在 Q 值方面, 文献[6]中过低的计算结果, 将会对回旋管各方面的研究带来很大的误差, 因此可知 $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = 1$ 的假设是合理的.

4.1.2. 传统算法

对于(13)式的求解, 传统算法将其转化为

$$\sum_{i=1}^3 \left| \frac{dV_{0i}^{(2)}}{dz} + \gamma_{0i}^{(2)} V_{0i}^{(2)} \right|_{z=L} \rightarrow \min. \quad (17)$$

分析(17)式, 此时需要优化的变量为 8 个, 即 TE₀₃ 的 ω_0 和 Q , 还有 $V_{01}^{(2)}$, $V_{02}^{(2)}$ 和 $V_{03}^{(2)}$ 的实部和虚部. 利用可变多面体搜索法, 可以计算出 TE₀₃ 的 ω_0 和 Q , 以及 TE₀₁, TE₀₂ 和 TE₀₃ 的场幅值结构如图 4 所示.

对比图 3 和图 4 中各模式的波形, 可知后者在谐振腔输出端有明显的褶皱. 原因与 3.2 中情况相

同, 将图 4 的 ω_0 和 Q 值代入(16)式中, (16)式的值为 110.7, 对比新算法中(16)式的最小值 32.7, 可知传统算法的解不够准确.

4.2. 考虑 5 个模式的耦合

4.2.1. 新算法

考虑 TE₀₁, TE₀₂, TE₀₃, TE₀₄ 和 TE₀₅ 五个模式相互耦合的情况, 应用新算法.

第一步, 令 $V_{01}^{(2)} = y_1$, $V_{02}^{(2)} = y_2$, $V_{03}^{(2)} = y_3$, $V_{04}^{(2)} = y_4$, $V_{05}^{(2)} = y_5$, $\frac{dV_{01}^{(2)}}{dz} = y_6$, $\frac{dV_{02}^{(2)}}{dz} = y_7$, $\frac{dV_{03}^{(2)}}{dz} = y_8$, $\frac{dV_{04}^{(2)}}{dz} = y_9$, $\frac{dV_{05}^{(2)}}{dz} = y_{10}$, 结合(1)式可得

$$\frac{dy_1}{dz} = y_6, \frac{dy_2}{dz} = y_7, \frac{dy_3}{dz} = y_8, \frac{dy_4}{dz} = y_9, \frac{dy_5}{dz} = y_{10}, \quad (18a1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_6}{dz} = & \{ [\gamma_{01}^{(2)}]^2 + [C_{(2,1)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(3,1)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(4,1)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(5,1)}^{(2,2)}]^2 \} y_1 \\ & + \left\{ C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,2)}^{(2,2)} + C_{(4,1)}^{(2,2)} C_{(4,2)}^{(2,2)} + C_{(5,1)}^{(2,2)} C_{(5,2)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(1,2)}^{(2,2)} \right\} y_2 \\ & + \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,3)}^{(2,2)} + C_{(4,1)}^{(2,2)} C_{(4,3)}^{(2,2)} + C_{(5,1)}^{(2,2)} C_{(5,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(1,3)}^{(2,2)} \right\} y_3 \\ & + \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,4)}^{(2,2)} + C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,4)}^{(2,2)} + C_{(5,1)}^{(2,2)} C_{(5,4)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(1,4)}^{(2,2)} \right\} y_4 \\ & + \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,5)}^{(2,2)} + C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,5)}^{(2,2)} + C_{(4,1)}^{(2,2)} C_{(4,5)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(1,5)}^{(2,2)} \right\} y_5 \\ & + \{ C_{(1,2)}^{(2,2)} - C_{(2,1)}^{(2,2)} \} y_7 + \{ C_{(1,3)}^{(2,2)} - C_{(3,1)}^{(2,2)} \} y_8 + \{ C_{(1,4)}^{(2,2)} - C_{(4,1)}^{(2,2)} \} y_9 \\ & + \{ C_{(1,5)}^{(2,2)} - C_{(5,1)}^{(2,2)} \} y_{10}, \quad (18a2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_7}{dz} = & \left\{ C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,2)}^{(2,2)} + C_{(4,1)}^{(2,2)} C_{(4,2)}^{(2,2)} + C_{(5,1)}^{(2,2)} C_{(5,2)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,1)}^{(2,2)} \right\} y_1 \\
 & + \left\{ [\gamma_{02}^{(2)}]^2 + [C_{(1,2)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(3,2)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(4,2)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(5,2)}^{(2,2)}]^2 \right\} y_2 \\
 & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,3)}^{(2,2)} + C_{(4,2)}^{(2,2)} C_{(4,3)}^{(2,2)} + C_{(5,2)}^{(2,2)} C_{(5,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,3)}^{(2,2)} \right\} y_3 \\
 & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,4)}^{(2,2)} + C_{(3,2)}^{(2,2)} C_{(3,4)}^{(2,2)} + C_{(5,2)}^{(2,2)} C_{(5,4)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,4)}^{(2,2)} \right\} y_4 \\
 & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,5)}^{(2,2)} + C_{(3,2)}^{(2,2)} C_{(3,5)}^{(2,2)} + C_{(4,2)}^{(2,2)} C_{(4,5)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,5)}^{(2,2)} \right\} y_5 \\
 & + \{ C_{(1,2)}^{(2,2)} - C_{(2,1)}^{(2,2)} \} y_6 + \{ C_{(2,3)}^{(2,2)} - C_{(3,2)}^{(2,2)} \} y_8 + \{ C_{(2,4)}^{(2,2)} - C_{(4,2)}^{(2,2)} \} y_9 \\
 & + \{ C_{(2,5)}^{(2,2)} - C_{(5,2)}^{(2,2)} \} y_{10},
 \end{aligned} \tag{18a3}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_8}{dz} = & \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,3)}^{(2,2)} + C_{(4,1)}^{(2,2)} C_{(4,3)}^{(2,2)} + C_{(5,1)}^{(2,2)} C_{(5,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(3,1)}^{(2,2)} \right\} y_1 \\
 & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,3)}^{(2,2)} + C_{(4,2)}^{(2,2)} C_{(4,3)}^{(2,2)} + C_{(5,2)}^{(2,2)} C_{(5,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(2,3)}^{(2,2)} \right\} y_2 \\
 & + \{ [\gamma_{03}^{(2)}]^2 + [C_{(1,3)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(2,3)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(4,3)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(5,3)}^{(2,2)}]^2 \} y_3 \\
 & + \left\{ C_{(1,4)}^{(2,2)} C_{(1,3)}^{(2,2)} + C_{(2,4)}^{(2,2)} C_{(2,3)}^{(2,2)} + C_{(5,4)}^{(2,2)} C_{(5,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(3,4)}^{(2,2)} \right\} y_4 \\
 & + \left\{ C_{(1,5)}^{(2,2)} C_{(1,3)}^{(2,2)} + C_{(2,5)}^{(2,2)} C_{(2,3)}^{(2,2)} + C_{(4,5)}^{(2,2)} C_{(4,3)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(3,5)}^{(2,2)} \right\} y_5 \\
 & + \{ C_{(1,3)}^{(2,2)} - C_{(3,1)}^{(2,2)} \} y_6 + \{ C_{(3,2)}^{(2,2)} - C_{(2,3)}^{(2,2)} \} y_7 + \{ C_{(3,4)}^{(2,2)} - C_{(4,3)}^{(2,2)} \} y_9 \\
 & + \{ C_{(3,5)}^{(2,2)} - C_{(5,3)}^{(2,2)} \} y_{10},
 \end{aligned} \tag{18a4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_9}{dz} = & \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,4)}^{(2,2)} + C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,4)}^{(2,2)} + C_{(5,1)}^{(2,2)} C_{(5,4)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(4,1)}^{(2,2)} \right\} y_1 \\
 & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,4)}^{(2,2)} + C_{(3,2)}^{(2,2)} C_{(3,5)}^{(2,2)} + C_{(5,2)}^{(2,2)} C_{(5,4)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(4,2)}^{(2,2)} \right\} y_2 \\
 & + \left\{ C_{(1,3)}^{(2,2)} C_{(1,4)}^{(2,2)} + C_{(2,3)}^{(2,2)} C_{(2,4)}^{(2,2)} + C_{(5,3)}^{(2,2)} C_{(5,4)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(3,4)}^{(2,2)} \right\} y_3 \\
 & + \{ [\gamma_{04}^{(2)}]^2 + [C_{(1,4)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(2,4)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(3,4)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(5,4)}^{(2,2)}]^2 \} y_4 \\
 & + \left\{ C_{(1,5)}^{(2,2)} C_{(1,4)}^{(2,2)} + C_{(2,5)}^{(2,2)} C_{(2,4)}^{(2,2)} + C_{(3,5)}^{(2,2)} C_{(3,4)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(4,5)}^{(2,2)} \right\} y_5 \\
 & + \{ C_{(4,1)}^{(2,2)} - C_{(1,4)}^{(2,2)} \} y_6 + \{ C_{(4,2)}^{(2,2)} - C_{(2,4)}^{(2,2)} \} y_7 + \{ C_{(4,3)}^{(2,2)} - C_{(3,4)}^{(2,2)} \} y_8 \\
 & + \{ C_{(4,5)}^{(2,2)} - C_{(5,4)}^{(2,2)} \} y_{10},
 \end{aligned} \tag{18a5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_{10}}{dz} = & \left\{ C_{(2,1)}^{(2,2)} C_{(2,5)}^{(2,2)} + C_{(3,1)}^{(2,2)} C_{(3,5)}^{(2,2)} + C_{(4,1)}^{(2,2)} C_{(4,5)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(5,1)}^{(2,2)} \right\} y_1 \\
 & + \left\{ C_{(1,2)}^{(2,2)} C_{(1,5)}^{(2,2)} + C_{(3,2)}^{(2,2)} C_{(3,5)}^{(2,2)} + C_{(4,2)}^{(2,2)} C_{(4,5)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(5,2)}^{(2,2)} \right\} y_2 \\
 & + \left\{ C_{(1,3)}^{(2,2)} C_{(1,5)}^{(2,2)} + C_{(2,3)}^{(2,2)} C_{(2,5)}^{(2,2)} + C_{(4,3)}^{(2,2)} C_{(4,5)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(5,3)}^{(2,2)} \right\} y_3 \\
 & + \left\{ C_{(1,4)}^{(2,2)} C_{(1,5)}^{(2,2)} + C_{(2,4)}^{(2,2)} C_{(2,5)}^{(2,2)} + C_{(3,4)}^{(2,2)} C_{(3,5)}^{(2,2)} - \frac{da/dz}{a} C_{(4,5)}^{(2,2)} \right\} y_4 \\
 & + \{ [\gamma_{05}^{(2)}]^2 + [C_{(1,5)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(2,5)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(3,5)}^{(2,2)}]^2 + [C_{(5,5)}^{(2,2)}]^2 \} y_5 \\
 & + \{ C_{(5,1)}^{(2,2)} - C_{(1,5)}^{(2,2)} \} y_6 + \{ C_{(5,2)}^{(2,2)} - C_{(2,5)}^{(2,2)} \} y_7 + \{ C_{(5,3)}^{(2,2)} - C_{(3,5)}^{(2,2)} \} y_8
 \end{aligned}$$

$$+ \{ C_{(5,4)}^{(2,2)} - C_{(4,5)}^{(2,2)} \} y_9, \quad (18a6)$$

$$\left. \frac{dy_i}{dz} - \gamma_{0i}^{(2)} y_i \right|_{z=0} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (18b)$$

$$\left. \frac{dy_i}{dz} + \gamma_{0i}^{(2)} y_i \right|_{z=L} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad (18c)$$

上式中的 $C_{(s,t)}^{(p,q)}$ 详见文献[15] ($p, q = 1, 2$). 令 $y_1 = y_{1,0}, y_2 = y_{2,0}, y_3 = y_{3,0}, y_4 = y_{4,0}$ 和 $y_5 = y_{5,0}$, 这里 $y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}$ 和 $y_{5,0}$ 分别为 $TE_{01}, TE_{02}, TE_{03}, TE_{04}$ 和 TE_{05} 在谐振腔输入端的幅值. 利用定理 1, 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^5 \{ S_{i1}(\omega_0, Q) y_{1,0} + S_{i2}(\omega_0, Q) y_{2,0} \\ & + S_{i3}(\omega_0, Q) y_{3,0} + S_{i4}(\omega_0, Q) y_{4,0} \\ & + S_{i5}(\omega_0, Q) y_{5,0} \} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $S_{ij}(\omega_0, Q)$ ($i, j = 1, 2, \dots, 5$) 由定理 1 决定; ω_0 和 Q 分别为 TE_{03} 的谐振频率和 Q 值.

第二步, 为了减少 (19) 式中的变量, 假设 $TE_{01}, TE_{02}, TE_{03}, TE_{04}$ 和 TE_{05} 在谐振腔输入端的幅值相等, 即令 $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = y_{4,0} = y_{5,0} = 1$, 这时可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^5 \{ S_{i1}(\omega_0, Q) + S_{i2}(\omega_0, Q) \\ & + S_{i3}(\omega_0, Q) + S_{i4}(\omega_0, Q) \\ & + S_{i5}(\omega_0, Q) \} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

容易验证, 在 ω_0 和 Q 的合理取值范围内 (20) 式无零解.

第三步, 对 (20) 式进行极小值优化

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^5 \{ S_{i1}(\omega_0, Q) + S_{i2}(\omega_0, Q) \\ & + S_{i3}(\omega_0, Q) + S_{i4}(\omega_0, Q) \\ & + S_{i5}(\omega_0, Q) \} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (21)$$

为了验证 (20) 式中 $y_{1,0} = y_{2,0} = y_{3,0} = y_{4,0} = y_{5,0} = 1$ 的假设, 下面计算出在 (21) 式取最小值时, TE_{03} 的谐振频率和 Q 值, 以及 $TE_{01}, TE_{02}, TE_{03}, TE_{04}$ 和 TE_{05} 的场幅值结构, 如图 5 所示.

4.2.2. 传统算法

对于 (18) 式的求解, 传统算法将其转化为

$$\sum_{i=1}^5 \left| \frac{dV_{0i}^{(2)}}{dz} + \gamma_{0i}^{(2)} V_{0i}^{(2)} \right|_{z=L} \rightarrow \min. \quad (22)$$

观察 (22) 式, 需要优化的变量为 12 个, 即 TE_{03} 的 ω_0 和 Q , 还有 $V_{01}^{(2)}, V_{02}^{(2)}, V_{03}^{(2)}, V_{04}^{(2)}$ 和 $V_{05}^{(2)}$ 的实部和虚部. 因为可变多面体搜索法对含有 10 个及以上变量的目标函数进行优化时, 效率是很低的^[11]. 所以, 传统算法很难得到 (22) 式的有效解. 至此, 传统

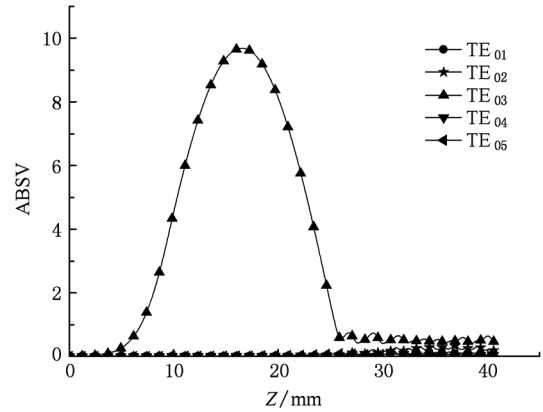


图 5 新算法时, $TE_{01}, TE_{02}, TE_{03}, TE_{04}$ 和 TE_{05} 的场幅值结构. 这里, TE_{03} 的 $\omega_0 = 150.1314 \text{GHz}$, $Q = 9885$, (21) 式取最小值 150.154

算法的最大局限性突显出来, 即它不能够对考虑 5 个及以上模式相互耦合的谐振腔, 进行本征模式特性的计算.

5. 新算法和传统算法的比较

通过上面的计算和分析, 可以看出新算法与传统算法明显的不同. 为了进一步阐述这两种算法的区别, 利用表 1 进行说明.

表 1 新算法与传统算法的比较

算法特征	新算法	传统算法
优化变量个数	2	大于 2
优化方式	图解法 ^[13]	可变多面体直接搜索法 ^[11]
收敛性	全局收敛	局部收敛 (在模式数大于 5 时, 无法收敛)
全局最优解	是	否
初值猜测	不需要	需要
计算时间	5—10 min	1 天—2 周
计算准确度	高	低

由表 1 可知, 新算法只需对二元变量 (本征模式的谐振频率和 Q 值) 的目标函数进行极小值优化, 就能获得本征模式的所有特性. 并且, 在不考虑

模式耦合现象时,可以通过图解法获得全局最优解. 反观传统算法,在对多元变量(本征模式的谐振频率, Q 值和各模式的场幅值)的目标函数进行优化时,只能依靠可变多面体搜索法. 由于该搜索法对变量初值的依赖性很强,这就决定了即便获得了满足收敛条件的解,也很有可能不是满意解,类似 3.2 和 4.1.2 中的情况. 特别地,在谐振腔内所考虑的模式数为 5 个时,由于需要对 12 个变量进行优化,传统算法很难得到有效解. 此外,从计算时间来看,由于新算法是对二元函数进行极小值优化,所以可以采用图解法在绘出目标函数的三维图像后,直观快速地确定出全局最优解的位置,计算时间非常短. 而传统算法则依靠各变量初值的猜测来寻找最优解,这是一件费时费力而又充满不确定性的计算工作,因为有时即便获得了满足收敛条件的解,也有可能是处于鞍点位置的解. 综上所述,可知传统算法的计算效率是根本无法与新算法相提并论的.

6. 结 论

本文提出的计算回旋管谐振腔本征模式的新算法,可以计算出在不考虑模式耦合现象时,本征模式谐振频率和 Q 值的最优解. 而对于考虑模式耦合现象的情况,通过一个合理的假设-各模式在谐振腔输入端幅值相等,就能够获得令人满意的结果.

相对于传统算法,新算法减少了优化变量的个数,提高了计算时间和效率. 最重要的是,对于回旋管模式竞争和同轴纵向内开槽谐振腔表面热损耗问题的研究中,需要对考虑十多个甚至二十多个模式的谐振腔进行本征模式计算的情况,不论采用传统算法还是类似 HFSS 的模拟软件,都是很难实现的,但是利用本文提出的新算法则能方便计算出相应情况中本征模式的特性.

从实验角度来看,基于新算法我们成功研制出了工作模式为 TE_{62} ,工作频率为 94 GHz,连续波输出为 20 kW 的回旋管. 其中,利用新算法对该回旋管谐振腔本征模式进行计算时,所得结果为 Q 值 2560,工作频率 94 GHz,实际测量结果为 Q 值 2537,工作频率 94.0001GHz. 因此可见,利用新算法计算的谐振腔本征模式特性与实验结果几乎完全一致. 此外,文献[14]中所示的同轴纵向内开槽谐振腔本征模式的计算结果,也验证了新算法的可行性.

最后,对于那些在电磁场理论,振动理论和微波理论中,经常出现的类似于(1)的边值问题,此算法也具有极高的参考价值.

附录

这里,利用数学归纳法对定理 1 进行证明. 龙格库塔的积分计算公式可以写为^[15]

$$y_{p,u+1} = y_{p,u} + \frac{h}{6} [k_{1p} + 2k_{2p} + 2k_{3p} + k_{4p}]$$

$$p = 1, 2, \dots, 2s + 2t; \tag{A1a}$$

$$k_{1p} = f_p(z_u, y_{1u}, y_{2u}, \dots, y_{vu}),$$

$$k_{2p} = f_p\left(z_u + \frac{h}{2}, y_{1u} + \frac{h}{2}k_{11}, y_{2u} + \frac{h}{2}k_{12}, \dots, y_{vu} + \frac{h}{2}k_{1v}\right),$$

$$k_{3p} = f_p\left(z_u + \frac{h}{2}, y_{1u} + \frac{h}{2}k_{21}, y_{2u} + \frac{h}{2}k_{22}, \dots, y_{vu} + \frac{h}{2}k_{2v}\right),$$

$$k_{4p} = f_p(z_u + h, y_{1u} + hk_{31}, y_{2u} + hk_{32}, \dots, y_{vu} + hk_{3v}), \tag{A1b}$$

式中 u 是积分步数, $v = 2s + 2t$. 由(3b1)式,在 $u = 1$ 时,可得

$$y_{p,1} = \alpha_p, \tag{A2}$$

(A2)式也可以写为

$$y_{p,u} = \sum_q \overbrace{f_{pq}(\dots f_{pq}(\omega_0, Q))}^{u-1} \alpha_q, \quad u = 1, \tag{A3}$$

这里, $\overbrace{f_{pq}(\dots f_{pq}(\omega_0, Q))}^0 = 1$ ($p, q = 1, 2, \dots, 2s + 2t$). 从(A3)式易知,在 $u = 1$ 时定理 1 成立. 联立(A2)和(A3),可得

$$k_{11} = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1v}\alpha_v,$$

$$k_{12} = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2v}\alpha_v,$$

$$\vdots$$

$$k_{1v} = a_{v1}\alpha_1 + a_{v2}\alpha_2 + \cdots + a_{vv}\alpha_v; \tag{A4a}$$

$$k_{21} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{1q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{1l} a_{l1} \right\},$$

$$k_{22} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{2q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{2l} a_{l1} \right\},$$

⋮

$$k_{2v} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{vq} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{vl} a_{l1} \right\}; \tag{A4b}$$

$$k_{31} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{1q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{1l} a_{lq} + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} a_{rq} \right\},$$

$$k_{32} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{2q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{2l} a_{lq} + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \sum_l a_{2l} \sum_r a_{lr} a_{rq} \right\},$$

⋮

$$k_{3v} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{vq} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{vl} a_{lq} + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \sum_l a_{vl} \sum_r a_{lr} a_{rq} \right\}; \tag{A4c}$$

$$k_{41} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{1q} + \hbar \sum_l a_{1l} a_{lq} + \frac{(\hbar)^2}{2} \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} a_{rq} + \frac{(\hbar)^3}{4} \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} a_{hq} \right\},$$

$$k_{42} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{2q} + \hbar \sum_l a_{2l} a_{lq} + \frac{(\hbar)^2}{2} \sum_l a_{2l} \sum_r a_{lr} a_{rq} + \frac{(\hbar)^3}{4} \sum_l a_{2l} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} a_{hq} \right\},$$

⋮

$$k_{4v} = \sum_q \alpha_q \left\{ a_{vq} + \hbar \sum_l a_{vl} a_{lq} + \frac{(\hbar)^2}{2} \sum_l a_{vl} \sum_r a_{lr} a_{rq} + \frac{(\hbar)^3}{4} \sum_l a_{vl} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} a_{hq} \right\}. \tag{A4d}$$

式中 q, l, r 和 $h = 1, 2, \dots, 2s + 2t$. 将(A4)代入(A1)式, 可得

$$y_{p,2} = \sum_q \overbrace{f_{pq}(f_{pq}(\omega_0, Q))}^1 \alpha_q, \tag{A5}$$

其中

$$f_{pq}(f_{pq}(\omega_0, Q)) = \delta_{pq} + \hbar a_{pq} + \frac{(\hbar)^2}{3} \sum_l a_{pl} a_{lq} + \frac{(\hbar)^3}{6} \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} a_{rq} + \frac{(\hbar)^4}{24} \sum_l a_{pl} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} a_{hq},$$

δ_{pq} 在 $p = q$ 时, 取 1, 否则 $\delta_{pq} = 0$. 从(A5)易知, 在 $u = 2$ 时, 定理 1 成立.

根据数学归纳法, 假设 $u = e$ 时, 定理 1 依然成立, 此时 $y_{p,e}$ 可以表示为

$$y_{p,e} = \sum_q \overbrace{f_{pq}(\cdots f_{pq}(\omega_0, Q))}^{e-1} \alpha_q. \tag{A6}$$

方便起见, 令 $w_{pq}(\omega_0, Q) = \overbrace{f_{pq}(\cdots f_{pq}(\omega_0, Q))}^{e-1}$, 联立(A1)和(A6), 可得

$$k_{11} = b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \cdots + b_{1v}\alpha_v,$$

$$k_{12} = b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \cdots + b_{2v}\alpha_v,$$

⋮

$$k_{1v} = b_{v1}\alpha_1 + b_{v2}\alpha_2 + \cdots + b_{vv}\alpha_v; \tag{A7a}$$

$$k_{21} = \sum_q \alpha_q \left\{ b_{1q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{1l} b_{l1} \right\},$$

$$k_{22} = \sum_q \alpha_q \left\{ b_{2q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{2l} b_{l1} \right\},$$

⋮

$$k_{2v} = \sum_q \alpha_q \left\{ b_{vq} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{vl} b_{l1} \right\}; \tag{A7b}$$

$$k_{31} = \sum_q \alpha_q \left\{ b_{1q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{1l} b_{lq} + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} b_{rq} \right\},$$

$$k_{32} = \sum_q \alpha_q \left\{ b_{2q} + \frac{\hbar}{2} \sum_l a_{2l} b_{lq} + \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \sum_l a_{2l} \sum_r a_{lr} b_{rq} \right\},$$

⋮

$$\begin{aligned}
 k_{3v} &= \sum_q \alpha_q \left\{ b_{vq} + \frac{h}{2} \sum_l a_{vl} b_{lq} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \sum_l a_{vl} \sum_r a_{lr} b_{rq} \right\}; \tag{A7c} \\
 k_{41} &= \sum_q \alpha_q \left\{ b_{1q} + h \sum_l a_{1l} b_{lq} + \frac{(h)^2}{2} \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} b_{rq} + \frac{(h)^3}{4} \sum_l a_{1l} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} b_{hq} \right\}, \\
 k_{42} &= \sum_q \alpha_q \left\{ b_{2q} + h \sum_l a_{2l} b_{lq} + \frac{(h)^2}{2} \sum_l a_{2l} \sum_r a_{lr} b_{rq} + \frac{(h)^3}{4} \sum_l a_{2l} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} b_{hq} \right\}, \\
 &\vdots \\
 k_{4v} &= \sum_q \alpha_q \left\{ b_{vq} + h \sum_l a_{vl} b_{lq} + \frac{(h)^2}{2} \sum_l a_{vl} \sum_r a_{lr} b_{rq} + \frac{(h)^3}{4} \sum_l a_{vl} \sum_r a_{lr} \sum_h a_{rh} b_{hq} \right\}. \tag{A7d}
 \end{aligned}$$

式中 $b_{pq} = \sum_q a_{pq} w_{qp} (p, q, l, r \text{ 和 } h = 1, 2, \dots, 2s + 2t)$. 将 (A7) 代入 (A1) 式, 可得

$$y_{p,e+1} = \sum_q \alpha_p \overbrace{f_{pq}(\dots f_{pq}(a_{pq}))}^e, \tag{A8}$$

分析上式, 可知 $u = e + 1$ 时定理 1 依然成立. 因此, 根据数学归纳法, 可以判断定理 1 完全成立.

[1] Dumbrajs O, Nusinovich G S 2004 *IEEE Tran. Plasma Sci.* **32** 934

[2] Yu S, Li H F, Xie Z L, Luo Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1979 (in Chinese) [喻 胜, 李宏福, 谢仲怜, 罗 勇 2008 物理学报 **50** 1979]

[3] Xu Y C, Xue S W, Liu Y, Xu D M, Guo G C, Ding X T, Chen M W, Yu L M, Jiang X F, Li X D, Deng X W, Wang E Y, Yang S Z, Yao X Z, Rozhdestvensky V V, Shishkin B V, Malygin V I 1995 *Chin. Phys.* **4** 39

[4] Du C H, Liu P K, Xue Q Z 2010 *Chin. Phys. B* **19** 048703

[5] Nusinovich G S, Read M E, Dumbrajs O, Kreischer K E 1994 *IEEE Tran. Elec. Dev.* **41** 433

[6] Borie E, Dumbrajs O 1986 *International Journal of Electronics* **60** 143

[7] Fliflet A W, Lee R C, Read M E 1988 *International Journal of Electronics* **65** 273

[8] Dumbrajs O, Borie E, Read M E 1988 *International Journal of Electronics* **65** 285

[9] Yang S, Li H F, 1996 *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **16** 1895

[10] Yang S W 2000 *Ph. D. Dissertation* (Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China) (in Chinese) [杨仕文 2000 博士学位论文(成都: 电子科技大学)]

[11] Chen B L 2005 *Optimization Theory and Algorithm* (2st ed) (Beijing: Tsinghua University Press) p349 (in Chinese) [陈宝林 2005 最优化理论与算法(北京: 清华大学出版社) 第 349 页]

[12] He G Y, Gao Y L 2002 *Visual Fortran Common Numerical Algorithm Set* (Beijing: Science Press) p423 (in Chinese) [何光渝 高永利 2002 Visual Fortran 常用数值算法集(北京: 科学出版社) 第 423 页]

[13] Li H F, Xie Z L, Wang W 2003 *IEEE Tran. Plasma Sci.* **31** 264

[14] Liu R, Li H F, 2010 *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* **31** 995

[15] Ma Z H 2003 *Modern Applied Mathematics Manual* (Computation And Numerical Analysis Volume) (3st ed) (Beijing: Tsinghua University Press) p611 (in Chinese) [马振华 2007 现代应用数学手册(计算与数值分析卷)(北京: 清华大学出版社) 第 611 页]

A new algorithm of calculating eigenmodes of gyrotron resonators *

Liu Rui[†] Li Hong-Fu Niu Xin-Jian

(*Vacuum Electronics National Laboratory, Institute of High Energy Electronics, UESTC, Chengdu 610054, China*)

(Received 18 November 2010; revised manuscript received 27 December 2010)

Abstract

According to Runge-Kutta theory, in this paper we present a new algorithm of calculating the eigenmodes of gyrotron resonators. Different from in the traditional algorithm, all properties of the eigenmodes can be determined by solving the minimum of a function with two variables, namely the resonant frequency and Q factor, in the new algorithm. Through examples of numerical calculation, it is verified that the calculation efficiency of the new algorithm is much higher than the traditional algorithm.

Keywords: gyrotron, algorithm, eigenmode, calculation efficiency

PACS: 02. 60. Lj, 84. 40. Ik, 87. 55. Kd

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 803-410-7).

[†] E-mail: uestcjoey@126.com