

耗散系统中实现原子态量子隐形传态的保真度*

潘长宁^{1)†} 方见树¹⁾ 彭小芳²⁾ 廖湘萍¹⁾ 方卯发³⁾

1) (湖南工业大学理学院, 株洲 412008)

2) (中南林业科技大学理学院, 长沙 410004)

3) (湖南师范大学物理与信息科学学院, 长沙 410081)

(2010年11月9日收到; 2010年11月15日收到修改稿)

本文运用全量子理论并结合数值计算方法,研究了压缩真空库中利用原子纠缠态作为量子通道实现原子态量子隐形传态的保真度,讨论了被传送的原子初态形式以及压缩库的压缩参数 r 对保真度的影响. 研究表明:当只有输入态受噪声影响,则被传送的初始态中基态概率越大的态,保真度越高;而当量子通道受影响时,则基态和激发态概率相等的原子叠加态传送的保真度最大.

关键词: 量子隐形传态, 压缩真空库, 保真度

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Lc, 42.50.Pq

1. 引言

早在1993年, Bennett等^[1]利用分离变量的量子纠缠态作为量子通道,结合经典通讯提出了量子隐形传态方案,它的奇妙之处在于在两个并非接触的系统中进行了信息的传输,是量子力学非局域特性的重要应用之一. 近20年来,量子隐形传态引起了人们极大的兴趣并在理论上和实验方面都取得了重要的进展^[2-11],成为了量子信息研究领域中的重要课题. 理论上, Vaidman^[12]在1994年将量子隐形传态推广到无限维希尔伯特空间. 1998年, Braunstein等^[13]提出了连续变量的量子隐形传态. 同时人们也提出了不同的量子隐形传态的实现方案:如囚禁离子^[14]、行波场^[15,16]、高品质的量子电动力学腔场^[17]等. 另外,实验上也取得了突破性的进展,文献[18]报道了应用纠缠光子对通过参量下转换实现了量子隐形传态,文献[19]给出了利用光子的压缩纠缠态的实现方案.

为实现两个远距离的量子隐形传态,通常有四个步骤:1)被传送量子态的制备,2)非局域量子通道的制备和分配,3)Bell测量,4)经典通讯. 然而,

量子系统总是处于一定的环境中,在量子态的制备、量子通道的分配以及Bell测量等量子操作过程中,量子系统不可避免地受到周围噪声环境(通常称之为库场)的影响,以致其保真度降低. 那么,深入地研究具体的量子噪声中量子隐形传态的保真度的变化,了解如何通过参数的调控提高保真度,对量子隐形传态的实验实现具有重要的指导意义.

本文的目的是研究压缩真空库中利用原子纠缠态作为量子通道进行原子态的量子隐形传态的保真度;运用全量子理论方法并结合数值计算,分别讨论了输入态或纠缠通道受到库的影响时,被传送的输入态初始形式和压缩参量对保真度的影响.

2. 理论基础

量子隐形传态的量子线路如图1所示,上方两根线表示Alice的系统,下方的线代表Bob的系统,并利用原子的EPR态 $|\psi_{\text{EPR}}\rangle = (|e_1g_2\rangle + |g_1e_2\rangle)/\sqrt{2}$ 作为量子通道, $|\psi_{\text{in}}\rangle$ 为输入的原子态, $|\psi_{\text{out}}\rangle$ 为输出的原子态,虚线矩形框A, B分别表示作用在输入态或通道上的量子噪声,虚线矩形框C表示重建 $|\psi_{\text{in}}\rangle$ 时所执行的么正操作. 为了便

* 湖南省教育厅项目(批准号:10C0616),湖南省自然科学基金(批准号:10JJ3088),湖南省教育厅重点项目(批准号:08A015)和湖南省教育厅重点项目(批准号:10A026)资助的课题

† E-mail: panchangning2000@sina.com

于计算,根据推迟测量原理^[20],我们把量子测量推迟到最后执行.量子线路上量子操作的执行时间按从左到右的先后顺序.

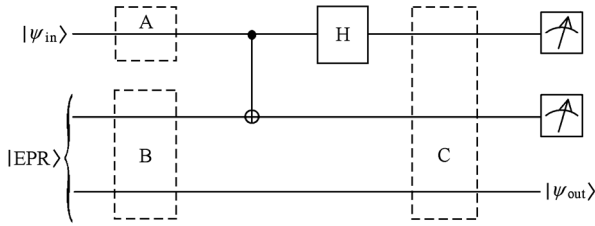


图1 量子隐形传态线路(上方两根线表示 Alice 的系统,下方的线是 Bob 的系统,EPR 态作为量子通道,虚线框 A,B 分别表示作用在输入态或通道上的噪声,虚线框 C 表示重建 $|\psi_{in}\rangle$ 的么正操作)

在 Bloch 球面上,被传输的未知量子态可表示为

$$|\psi_{in}\rangle = \cos(\theta/2)e^{i\phi/2}|g\rangle + \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2}|e\rangle, \quad (1)$$

其中极化角 $0 \leq \theta \leq \pi$, 方位角 $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $|g\rangle$ 和 $|e\rangle$ 分别表示二能级原子的基态和激发态.为了更清楚地说明环境对量子隐形传态过程的影响,我们分别讨论噪声对输入态和量子通道的作用.考虑第一种情况,即只有输入态 $|\psi_{in}\rangle$ 受到周围环境的影响,并由最初的纯态演化为混态 $\varepsilon(\rho_{in})$ 时,通过量子隐形传态后的最终输出态可表示为^[20]

$$\rho_{out} = \text{Tr}_{1,2}[U_{EPR}\varepsilon(\rho_{in}) \otimes \rho_{EPR}U_{EPR}^\dagger], \quad (2)$$

其中 $\text{Tr}_{1,2}$ 表示作用在 Alice 的比特上的偏迹, U_{EPR} 为量子线路图 1 所示的量子操作, $\rho_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$, $\rho_{EPR} = |\psi_{EPR}\rangle\langle\psi_{EPR}|$, ε 表示周围环境对系统影响的量子运算.另外一种情况,如果量子通道受到环境的影响,则最终的输出态可表示为

$$\rho'_{out} = \text{Tr}_{1,2}[U_{EPR}\rho_{in} \otimes \varepsilon(\rho_{EPR})U_{EPR}^\dagger]. \quad (3)$$

为描述量子隐形传态中信息丢失或保存的多少,我们定义保真度^[21]

$$F(\theta, \psi) = \langle\psi_{in}|\rho_{out}|\psi_{in}\rangle, \quad (4)$$

保真度 $F(\theta, \phi)$ 的值从 1 变化到 0,当 $F(\theta, \phi) = 1$ 时,表示完美的量子隐形传态, Bob 所得到的态与被传送的态完全相同;然而,当 $F(\theta, \phi)$ 越小时,表示丢失的信息就越多,输出态与输入态相差越远,被传送的量子态失真越大.

在量子隐形传态方案中,通常情况下,被传送的量子态是未知的,可以处于任意的可能态,所以计算包括所有可能被传送态的平均保真度^[21]更能

准确地度量量子信息的传送程度:

$$\bar{F} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi F(\theta, \phi) \sin\theta. \quad (5)$$

3. 结果及讨论

考虑 n 个二能级原子与库场相互作用,在相互作用绘景中,原子与库耦合系统在旋波近似下的哈密顿量为^[22]

$$H = \sum_{j=1}^n \sum_k [g_k^j e^{i(\omega-\nu_k)t} |e_j\rangle\langle g_j| a_k + \text{H. c.}], \quad (6)$$

其中 $|e_j\rangle$ 和 $|g_j\rangle$ 分别表示第 j 原子的激发态和基态, ω 为二能级原子的本征跃迁频率, a_k 表示库中第 k 模光子的湮没算符, ν_k 是库中第 k 模的光子的频率, g_k^j 是库中第 k 模光场与第 j 原子偶极共振相互作用的耦合常数.

具体地,当原子处于压缩真空库中,假设原子与库场之间是弱相互作用,令库很大,因而原子的状态随着与库场的耦合时间发生变化时,库场本身的变化很小,以致于可以忽略原子对库的反作用而认为库场的状态保持不变,而且原子和库作用时间很短,远远小于原子自发辐射衰减时间,因此在马尔可夫近似下,可以得到原子与压缩真空库场相互作用的约化密度算符的运动方程^[22]

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = \sum_{j=1}^n \left[-\frac{\Gamma_j}{2} \cosh^2(r_j) (S_+^j S_-^j \rho - 2S_-^j \rho S_+^j + \rho S_+^j S_-^j) \right. \\ \left. - \frac{\Gamma_j}{2} \sinh^2(r_j) (S_-^j S_+^j \rho - 2S_+^j \rho S_-^j + \rho S_-^j S_+^j) \right. \\ \left. - \Gamma_j e^{-i\varphi} \sinh(r_j) \cosh(r_j) S_-^j \rho S_+^j \right. \\ \left. - \Gamma_j e^{i\varphi} \sinh(r_j) \cosh(r_j) S_+^j \rho S_-^j \right], \quad (7) \end{aligned}$$

Γ 为原子的自发辐射衰减率, S_\pm 分别为原子的升降算符, ($S_+ = |e\rangle\langle g|$, $S_- = |g\rangle\langle e|$), r 为库的压缩参量, φ 为压缩角, n 表示原子个数.

情况 1 假设只有输入态受到噪声的影响.对于一个 ($n = 1$) 二能级原子,初始态如(1)式所示,在计算基失 $|g\rangle$, $|e\rangle$ 展开的希尔伯特空间中,由约化密度算符的运动方程(7),可以得到任意时刻原子态的密度矩阵

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其矩阵元具体的表达式如附录中 (A1a) — (A1d) 式所示,为使问题简化,上式中假设压缩角 $\varphi = 0$. 利用(4)和(5)式,通过简单地计算,我们可以得到相

应的保真度如下:

$$F = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)(\rho_{21}e^{i\varphi} + \rho_{12}e^{-i\varphi}) + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\rho_{11} + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\rho_{22}, \quad (9)$$

和

$$\bar{F} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-e^{2r}\Gamma t/2} + \frac{1}{6}e^{-e^{-2r}\Gamma t/2} + \frac{1}{6}(e^{-(e^{2r}+e^{-2r})\Gamma t/2}). \quad (10)$$

由(10)式可知,当 $t > 0$ 时,平均保真度总是大于 $\frac{1}{2}$,这是由于经典通讯而得到的保真度^[23].我们对(9)式和(10)式进行数值计算所得结果如图2和图3所示.图2描述的是不同的初始输入态(设 $\varphi = 0$,极化角 θ 在 0 和 π 之间变化)时,输出态的保真度随时间的变化情况,由图可知,不管初始 θ 处于何值,保真度随时间的演化而逐渐减小,并且在最初一段时间内减小得最快,而后慢慢地趋于平缓;另外,随着 θ 的增大,即被传送的初始态中原子激发态粒子布居概率越大时,保真度下降得更快,这一现象从物理上我们可以得到解释:因为粒子处于激发态概率越大,则原子自发辐射和受压缩真空库的影响也会越大,因而输出态的保真度也相应的降低.图3给出的是不同的压缩参数时平均保真度随时间的变化,在开始一段时间里(大概 $\Gamma t < 2.4$),随着压缩参量的增大,平均保真度下降得越快,但随时间的推移,情况刚好相反,压缩参量越大时反而下降得越慢,最终趋于 $\frac{1}{2}$,这是由于经典通讯而获得信息的传输所得到的保真度,它不受量子噪声的影响.

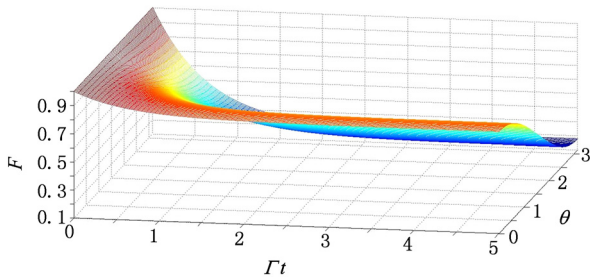


图2 压缩真空库中保真度函数 F 随原子初态中极化角 θ 和时间的演化(设方位角 $\phi = 0$)

情况2 考虑包括两个原子($n = 2$)的量子通道受到噪声环境的影响.在计算基矢 $|gg\rangle, |ge\rangle, |eg\rangle, |ee\rangle$ 展开的希尔伯特空间中,由约化密度算

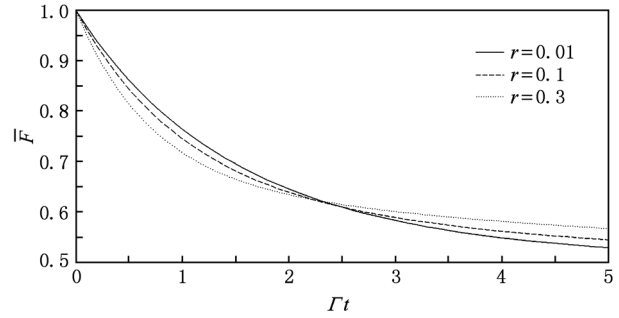


图3 压缩真空库中平均保真度函数 \bar{F} 随时间的演化(压缩参数 $r = 0.01, 0.1, 0.3$)

符的运动方程(7),通过解微分方程组,可以得到初始处于态 $|\psi_{\text{EPR}}\rangle = (|e_1g_2\rangle + |g_1e_2\rangle)/\sqrt{2}$ 的纠缠通道任意时刻的密度矩阵(设 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$)

$$\rho' = \begin{bmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & \rho'_{13} & \rho'_{14} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} & \rho'_{23} & \rho'_{24} \\ \rho'_{31} & \rho'_{32} & \rho'_{33} & \rho'_{34} \\ \rho'_{41} & \rho'_{42} & \rho'_{43} & \rho'_{44} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中矩阵元的具体表达式如附录中(A2a)~(A2g)式所示,由(4)和(5)式,通过计算,我们可以得到相应的保真度 F' 和平均保真度 \bar{F}' 如下:

$$F' = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[\rho'_{11} + 2\rho'_{23} + 2\cos(2\phi)\rho'_{14} + \rho'_{44}] + \left[\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right](\rho'_{22} + \rho'_{33}), \quad (12)$$

$$\bar{F}' = \frac{1}{3}[\rho'_{11} + 2\rho'_{22} + 2\rho'_{23} + 2\rho'_{33} + \rho'_{44}]. \quad (13)$$

对(12)式和(13)式进行数值计算生成各自的图表,图4(设 $\phi = 0$)描绘的是当量子通道受到噪声影响时不同的输入态的保真度,从图像中我们可以得知,当初始输入态中极化角 $\theta = \pi/2$ 时,即基态和激发态概率相等的态,其保真度下降得最慢,由此可知在量子隐形传态过程中其信息丢失得最少;并且当 θ 在 0 和 π 之间变化时,其他态的保真度随时间的变化关于 $\theta = \pi/2$ 成轴对称性.图5描绘的是平均保真度随时间的变化情况,由图可知其变化规律跟输入态受到噪声影响时基本相似:压缩参量越大,开始时刻导致的信息丢失越多,而经过一段时间后丢失的信息越少,只是“逆转”的时间相对于上面讨论的情况一变短.

为更清楚地分析纠缠通道受到噪声影响时保真度随输入态的变化情况,我们采用数值计算方法做出

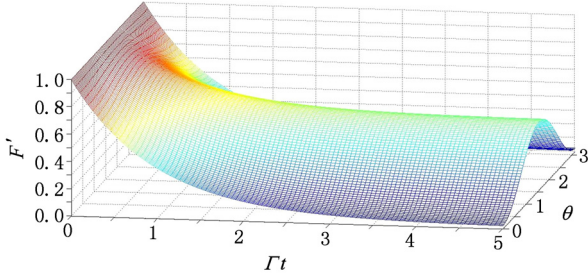


图4 压缩真空库中保真度函数 F' 随原子初态中极化角 θ 和时间的演化(设方位角 $\phi = 0$)

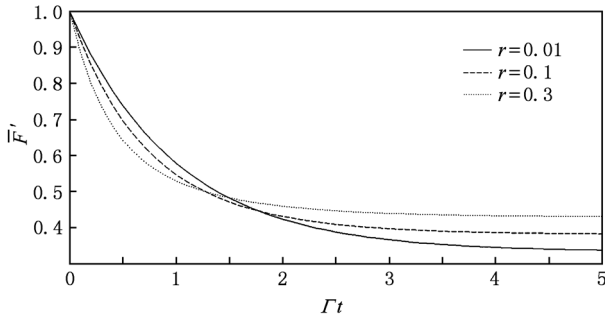


图5 压缩真空库中平均保真度函数 \bar{F} 随时间的演化(压缩参数 $r = 0.01, 0.1, 0.3$)

$\Gamma t = 0.4$ 时,保真度 F' 随 θ 和 ϕ 的变化图像,如图6所示,我们看到两个峰值出现在 $\theta = \pi/2$ 和 $\phi = \pi/2, 3\pi/2$, 即满足上述条件的被传送原子态 $|\psi_{in}\rangle$ 所受噪声量子通道的干扰最小,保真度最高;而当 θ 在 0 到 π 内取较大值或较小值时保真度相对下降.

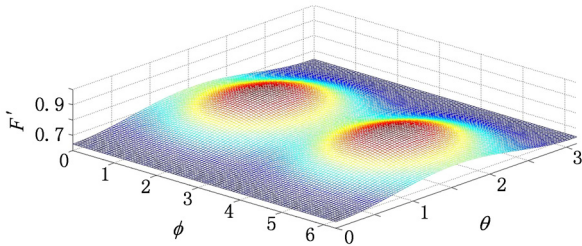


图6 压缩真空库中保真度函数 F' 随 θ 和 ϕ 变化图像(时间 $\Gamma t = 0.4$, 压缩参数 $r = 0.3$)

4. 结 论

运用全量子理论研究了压缩真空库中利用原子纠缠态作为量子通道,进行原子态的量子隐形传态的保真度,对输入态和纠缠通道受噪声的影响分别进行了研究,并对各种情况进行了数值计算,讨论了压缩参量对保真度的影响,研究结果表明:当

只有输入态受压缩真空库影响时, θ 越小,保真度越高;而当纠缠通道受到库的影响时, θ 趋近于 $\pi/2$, ϕ 趋近于 $\pi/2$ 或 $3\pi/2$ 时,保真度逐渐变大,当取等号时,达到最大值;以上讨论的两种不同情况的噪声影响,在开始演化的一段时间内,压缩库的压缩参量越大,保真度都下降得越快,但随着时间的推移,情况刚好相反,压缩参量越大,保真度下降得越慢.

附 录

$$\rho_{11} = 1 - \left\{ \frac{\sinh^2(r)}{A} [e^{A\Gamma t} - 1] + \sin^2(\theta/2) \right\} e^{-A\Gamma t}, \quad (\text{A1a})$$

$$\rho_{22} = \left\{ \frac{\sinh^2(r)}{A} [e^{A\Gamma t} - 1] + \sin^2(\theta/2) \right\} e^{-A\Gamma t}, \quad (\text{A1b})$$

$$\rho_{12} = \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \left[\cos(\phi) e^{-\left(\frac{A}{2} + B\right)\Gamma t} + i \sin(\phi) e^{-\left(\frac{A}{2} - B\right)\Gamma t} \right], \quad (\text{A1c})$$

$$\rho_{21} = \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \left[\cos(\phi) e^{-\left(\frac{A}{2} + B\right)\Gamma t} - i \sin(\phi) e^{-\left(\frac{A}{2} - B\right)\Gamma t} \right], \quad (\text{A1d})$$

$$A = \cosh^2(r) + \sinh^2(r),$$

$$B = \sinh(r) \cosh(r).$$

$$\rho'_{11} = [2D_1 D_2 + (C_1 D_2 - D_1 D_2) e^{-(C_1 + D_1)t} + (D_1 C_2 - D_1 D_2) e^{-(C_2 + D_2)t} - (D_1 C_2 + C_1 D_2) e^{-(C_1 + D_1 + C_2 + D_2)t}] / [2(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)], \quad (\text{A2a})$$

$$\rho'_{22} = [2D_1 C_2 + (C_1 C_2 - D_1 C_2) e^{-(C_1 + D_1)t} - (D_1 C_2 - D_1 D_2) e^{-(C_2 + D_2)t} + (D_1 C_2 + C_1 D_2) e^{-(C_1 + D_1 + C_2 + D_2)t}] / [2(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)], \quad (\text{A2b})$$

$$\rho'_{33} = [2C_1 D_2 - (C_1 D_2 - D_1 D_2) e^{-(C_1 + D_1)t} + (C_1 C_2 - C_1 D_2) e^{-(C_2 + D_2)t} + (D_1 C_2 + C_1 D_2) e^{-(C_1 + D_1 + C_2 + D_2)t}] / [2(C_1 + D_1)(C_2 + D_2)], \quad (\text{A2c})$$

$$\rho'_{44} = 1 - \rho'_{11} - \rho'_{22} - \rho'_{33}, \quad (\text{A2d})$$

$$\rho'_{23} = \rho'_{32} = \frac{1}{2} e^{-1/2(C_3 + C_4)t} \cosh\left[\frac{1}{2}(D_1 + D_2)t\right], \quad (\text{A2e})$$

$$\rho'_{14} = \rho'_{41} = -\frac{1}{2} e^{-1/2(C_3 + C_4)t} \sinh\left[\frac{1}{2}(D_1 + D_2)t\right], \quad (\text{A2f})$$

$$\rho'_{12} = \rho'_{13} = \rho'_{21} = \rho'_{24} = \rho'_{31} = \rho'_{34} = \rho'_{42} = \rho'_{43} = 0, \quad (\text{A2g})$$

$$C_\alpha = \Gamma_\alpha \cosh^2(r_\alpha),$$

$$D_\alpha = \Gamma_\alpha \sinh^2(r_\alpha) \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$C_\beta = \Gamma_\beta \cosh^2(2r_\beta),$$

$$D_\beta = \Gamma_\beta \sinh^2(2r_\beta) \quad (\beta = 3, 4).$$

- [1] Bennett C H, Brassard G 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [2] Ye L, Guo G C 2004 *Phys. Rev. A* **70** 054303
- [3] Feng M *et al* 2003 *Phys. Rev. A* **67** 014306
- [4] Manzoor Ikram, Li F L, Zubairy M S 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062336
- [5] Zhang Q, Li F L, Li H R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2275 (in Chinese) [张茜, 李福利, 李宏荣 2006 物理学报 **55** 2275]
- [6] Wu Y, Payne M G, Hagle E W, Deng L 2004 *Phys. Rev. A* **69** 063803
Wu Y, Deng L 2004 *Opt. Lett.* **29** 1144
- [7] Zheng Y Z, Dai L Y, Guo G C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2678 (in Chinese) [郑亦庄, 戴玲玉, 郭光灿 2003 物理学报 **52** 2678]
- [8] Zhai Z H, Li Y M, Wang S K, Guo J, Zhang T C, Gao J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2710 (in Chinese) [翟泽辉, 李永明, 王少凯, 郭娟, 张天才, 郜江瑞 2005 物理学报 **54** 2710]
- [9] Pan C N, Fang M F 2008 *Chin. Phys. B* **17** 34
- [10] Ji X, Li K, Zhang S 2006 *Chin. Phys.* **15** 478
- [11] Xia Y J, Wang G H, Du S J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4331 (in Chinese) [夏云杰, 王光辉, 杜少将 2007 物理学报 **56** 4331]
- [12] Vaidman L 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1473
- [13] Braunstein S L, Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869
- [14] Solano E, Cesar C L 2001 *Phys. J. D* **13** 121
- [15] Lee H W and Kim J 2000 *Phys. Rev. A* **63** 012305
- [16] Lee H W 2001 *Phys. Rev. A* **64** 014302
- [17] Moussa M H Y 1997 *Phys. Rev. A* **55** R3287
- [18] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, Eibl M, Weinfurters H, Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575
- [19] Furusawa A, Sorensen J L, Braunstein S L 1998 *Science* **282** 706
- [20] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [21] Oh S, Lee S, Lee H W 2002 *Phys. Rev. A* **66** 022316
- [22] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge University Press)
- [23] Massar S, Popescu S 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1259

Fidelity of quantum teleportation of atomic-state in dissipative environment^{*}

Pan Chang-Ning^{1)†} Fang Jian-Shu¹⁾ Peng Xiao-Fang²⁾ Liao Xiang-Ping¹⁾ Fang Mao-Fa³⁾

1) (School of Science, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412008, China)

2) (College of Science, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China)

3) (College of Physics and Information Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

(Received 9 November 2010; revised manuscript received 15 November 2010)

Abstract

The atomic-state quantum teleportation in a dissipative environment is investigated by the quantum theory of damping - density operator approach and the numerical calculations. The effects of fidelity for different initial atomic-states are discussed. The results show that, when only the input atomic-state is exposed to the squeezed vacuum reservoirs, the fidelity of atomic-state with larger probability in the ground state is larger than that of other state; on the other hand, when the quantum channel is exposed to the reservoirs, the input state with equal probability in the ground state and the excited state has the largest fidelity in all the teleported states.

Keywords: quantum teleportation, fidelity, squeezing vacuum reservoir

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Lc, 42.50.Pq

^{*} Project supported by the Funds of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 10C0616), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 10JJ3088), the Key Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 08A015), and the Key Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 10A026).

[†] E-mail: panchangning2000@sina.com