

同心球之间空间电荷限制电流的简单理论*

李飞¹⁾²⁾ 肖刘¹⁾ 刘濮鲲^{1)†} 易红霞¹⁾²⁾ 万晓声¹⁾²⁾

1) (中国科学院电子学研究所, 中国科学院高功率微波源与技术重点实验室, 北京 100190)

2) (中国科学院研究生院, 北京 100049)

(2010年10月21日收到; 2010年11月22日收到修改稿)

在高功率微波二极管的设计中, 空间电荷限制电流因其与二极管的特性及虚阴极形成关系密切而显得十分重要, 虽然 Langmuir 和 Blodgett 给出的数值解十分有用, 但是在实际的应用中一个简单的函数表达式还是更为方便, 同时也可以避免当 R_c/R_a 很大时带来的级数发散问题. 第一性原理已经应用在平行板和共轴圆柱之间二维空间电荷限制电流的推导, 它的可靠性也已经得到了大量的验证. 本文利用第一性原理推导出了同心球二极管空间电荷限制电流的解析表达式, 其中的空间电荷场因子通过和经典的朗缪尔电流比较而得到.

关键词: 第一性原理, 同心球二极管, 空间电荷限制电流

PACS: 79.20.Kz, 41.75.-i, 52.25.Tx

1. 引言

在真空电子学领域高功率微波器件的设计中, 空间电荷限制电流因其与二极管特性及虚阴极形成关系密切而显得十分重要^[1-7]. 在假设同心球的阴极电压为零, 阳极电压为 V 并且电子从阴极表面发射的初始速度可以忽略的情况下, Langmuir 和 Blodgett 给出的同心球之间空间电荷限制电流的表达式为^[8]

$$I = \frac{16\sqrt{2}\pi\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{V^{3/2}}{\alpha^2}, \quad (1)$$

其中 ϵ_0, e, m, V 分别是真空介电常数、电子电荷量、电子质量和阳极电压, 而 α 是一个级数表达式, 在实际的计算中我们只取级数开始的有限多项, 但是当同心球阴极和阳极半径之比变得很大而导致级数的收敛性很难判断的时候, (1) 式中级数 α 的使用就变得不可能, 正因为如此, 对于同心球二极管空间限制电流的探索一直没有停止过.

对这个问题的探索可以分为两个阶段, 第一个阶段是对描述同心球发射系统的泊松方程及其边界条件的研究. 由于即使在一维的情况下, 描述共轴圆柱和同心球系统电势分布的泊松方程都是一个非线性的二阶微分方程, 求解这个二阶微分方程

十分困难, 无奈之下将其解写成一个无穷级数的形式, 后来又采取数值分析的办法来描述. 比如 1945 年 Page 和 Adams^[9] 采用了一个与 Langmuir 和 Blodgett 区别不算很大的方法来研究共轴圆柱间的空间电荷限制电流, 1996 年 Degond 等人^[10] 利用渐进线的解析方法来研究这个问题, 但并没有实质性的突破, 就在同一年, Luginsland 和 Lau 等人^[11] 利用数值模拟的方法研究了平板二极管之间二维空间电荷限制电流, 1998 年 Jelić 等人^[12] 利用准解析的方法将平板二极管之间的空间限制电流进行了修正. 但是同心球空间限制电流的解析解仍然没有得到, 第二个阶段开始于 2001 年 Lau^[13] 利用第一性原理来推导平板二极管之间二维空间限制电流的表达式, 正是因为第一性原理的引入, 使得对空间电荷限制下阴极热发射能力的研究进入了一个新的阶段, 但是此时该原理还都是用于将一维的朗缪尔定律向二维或者是三维推广, 而且主要是集中在对平板二极管的研究上, 2004 年 Xu 等人^[14] 利用将共轴圆柱系统和平板系统进行等效的方法近似求得了共轴圆柱一维空间限制电流的解析表达式, 然后用第一性原理的方法将这个结论推广到二维, 但是该结论只适用于阴极半径和阳极半径非常接近的情况, 因为推导中在用到共轴圆柱间真空电势分布的表达式时, 将阳极半径写成阴极半径, 才使得推

* 国家自然科学基金重点项目(批准号:60801030, 60931001)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: pkliu@mail.ie.ac.cn

导能够继续下去.

在文献[13]中已经指出,平板二极管中的镜像电荷因子可以通过和经典的朗缪尔电流进行比较而得到,本文正是循着这条思路,用第一性原理推导了同心球系统的空间电荷限制电流的表达式.建立模型推导同心球系统的空间电荷限制电流表达式,通过和经典朗缪尔电流的比较确定了空间电荷场因子 G (包括空间镜像电荷因子),并进行了讨论.

2. 用第一性原理推导同心球间空间电荷限制电流

考虑如右图所示的同心球发射系统,外球为发射面,电位为零,半径为 R_c ,内球为收集极,电位为 V ,半径为 R_a .以某条直径为轴,在球腔中取小圆环, Q 为该小圆环上任意一点, P 为阴极面上任意一点, Q 点到球心的距离为 r ,矢量半径 r 与 \overrightarrow{OP} 的夹角为 θ .由此可知,所选小圆环的体积如下:

$$\begin{aligned} dV &= (2\pi r \sin\theta) \cdot dr \cdot (rd\theta) \\ &= 2\pi r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta. \end{aligned} \quad (2)$$

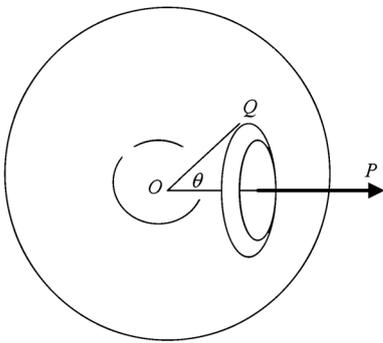


图1 同心球发射系统

根据对称性该圆环上的电荷密度应该相同,而且只是 r 的函数,假设该电荷密度为 $\rho(r)$,则该圆环上的电荷量为

$$dq = \rho dV = \rho(r) \cdot 2\pi r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta. \quad (3)$$

根据对称性,该圆环上的电荷在轴线上 P 点产生的电场强度的方向必定与 \overrightarrow{OP} 反向,其大小为

$$\begin{aligned} dE_{r,\theta} &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_c - r\cos\theta}{[(R_c - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\rho(r) \cdot r^2 dr}{2\epsilon_0} \frac{(R_c - r\cos\theta)\sin\theta \cdot d\theta}{[(R_c - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

对 θ 积分并利用积分公式

$$\int \frac{(r + Rx) dx}{(R^2 + r^2 + 2rx)^{3/2}} = \frac{R + rx}{r^2(R^2 + r^2 + 2rx)^{1/2}}, \quad (5)$$

便得到半径为 r 、厚度为 dr 的球壳在 P 点产生的电场为

$$\begin{aligned} dE_r &= \frac{\rho(r)r^2 dr}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(R_c - r\cos\theta)\sin\theta \cdot d\theta}{[(R_c - r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2]} \\ &= \frac{\rho(r)r^2 \cdot dr}{\epsilon_0 R_c^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

再对 r 积分,便得到整个球腔内的空间电荷在 P 点产生的电场

$$E_{\text{spc}} = \frac{1}{\epsilon_0 R_c^2} \int_{R_a}^{R_c} \rho(r)r^2 dr. \quad (7)$$

同时若假设在空间电荷限制下,阴极表面的最大发射电流为 I_c ,则当阴极的发射电流达到 I_c 时,空间电荷在阴极面产生的电场 E_{spc} 与真空时阴极面的电场 E_0 一定大小相等、方向相反而相互抵消为零.根据电流连续方程

$$J = \rho v = \frac{I}{S}, \quad (8)$$

我们不难得到在发射电流达到 I_c 时的空间电荷密度分布为

$$\rho(r) = \frac{I_c}{4\pi r^2 v(r)}. \quad (9)$$

先忽略掉空间电荷(包括运动电荷及其镜像电荷)场的作用,并且假设电子发射的初始速度与加速电压相比可以忽略不计,则由动能定理便可以得到电子的速度分布为

$$v(r) = \left(\frac{2e}{m} \frac{R_a}{R_c - R_a} V \right)^{1/2} \left(\frac{R_c}{r} - 1 \right)^{1/2}. \quad (10)$$

将(9)式代入(7)式就得到

$$\begin{aligned} E_{\text{spc}} &= \frac{I_c}{4\pi\epsilon_0 R_c^2} \int_{R_a}^{R_c} \frac{dr}{\left(\frac{2e}{m} \frac{R_a}{R_c - R_a} V \right)^{1/2} \left(\frac{R_c}{r} - 1 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{I_c}{4\pi\epsilon_0 R_c} \left(\frac{R_c - R_a}{\frac{2e}{m} R_a V} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{R_a}{R_c} \right) \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\frac{R_a}{R_c} \left(1 - \frac{R_a}{R_c} \right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

同时我们知道真空同心球系统中阴极处的电场为

$$E_0 = \frac{R_a}{\epsilon_0 R_c (R_c - R_a)} V. \quad (12)$$

考虑空间电荷效应并使得(11)式和(12)式相等,就

得到

$$GE_{\text{spc}} = E_0, \quad (13)$$

其中 G 为空间电荷场因子,它包括运动电荷产生的场及由这些运动电荷产生的镜像电荷产生的场. 结合(11), (12)和(13)式我们得到

$$I_c = \frac{16\pi\epsilon_0}{9} \left(\frac{2e}{m}\right)^{1/2} \frac{V^{3/2}}{Gf(R_c/R_a)}, \quad (14)$$

其中

$$f\left(\frac{R_c}{R_a}\right) = \frac{1}{9\pi} \left(\frac{R_c}{R_a} - 1\right)^{3/2} \times \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{R_a}{R_c}} + \sqrt{\frac{R_a}{R_c} \left(1 - \frac{R_a}{R_c}\right)}\right). \quad (15)$$

(14)式已经和同心球系统中经典朗缪尔电流的形式非常相似了,所不同的是(1)式中的级数由一个新的函数表达式来替代了,而且空间电荷场因子只和同心球系统的阴极半径和阳极半径之比有关.

3. 决定空间电荷场因子 G

当外球发射电子时,运动的电子将会在阳极球腔内产生数目少于运动电子的正的镜像电荷,这一部分镜像电荷也会对运动电荷产生作用. 实际上,电子是在真空电场、运动电荷自身产生的场以及镜像电荷产生的场三者的复合场中运动. 在前面的推导中,我们认为电子在真空电场中运动,而没有考虑运动电荷的自场及镜像电荷场的作用. Lau^[13]已经指出在平板二极管中,镜像电荷的作用可以通过与经典朗缪尔电流的比较而得到,按照 Lau 的思路,我们将运动电荷的自场与镜像电荷场合并,统一地利用空间电荷场因子 G 来描述.

通过比较可以看出,(14)式与(1)式的区别在于:(14)式用第二部分得出的新函数表达式 $Gf(R_c/R_a)$ 代替了(1)式中的无穷级数 α^2 . (1)式的可靠性已经得到了大量的验证,通过将 $f(R_c/R_a)$ 与 α^2 进行比较,便可得出空间电荷场因子 G 的表达式. 为此,这里先把 α^2 与 $f(R_c/R_a)$ 随 R_c/R_a 的变化表示于图 2 中. 其中,由 α^2 计算得到的数据来自文献[8].

从图中可以看出,随着 R_c/R_a 的增加, α^2 的数值曲线处在 $f(R_c/R_a)$ 函数图像的上方,这是由于后者没有考虑空间电荷场效应的缘故. 为了定量地研究空间电荷场效应,将 G 写成如下形式:

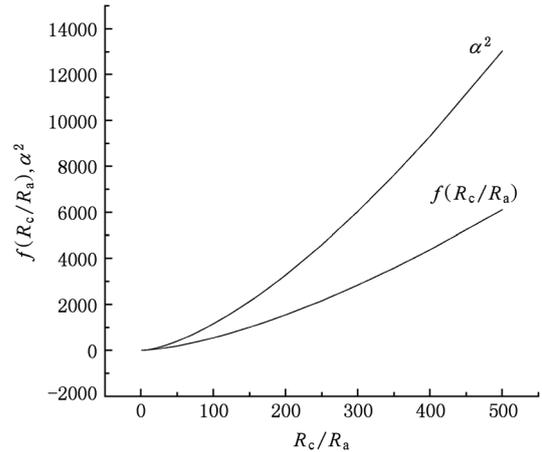


图2 级数结果与新函数计算整体比较

$$G = \frac{\alpha^2}{f(R_c/R_a)}. \quad (16)$$

利用文献[8]中一系列 R_c/R_a 点上的 α^2 值和根据 $f(R_c/R_a)$ 计算得到的函数值,通过拟合可得到 G 随 R_c/R_a 的变化关系,并将其表示于图 3 中. 可以看出,当 R_c/R_a 在 100 到 120 与 120 到 500 这两个区间内变化时,曲线都几乎与横轴平行,只是前者的空间电荷场因子约为 2.12,而后者为 2.125. 而在 1 到 100 的区间内,空间电荷场因子随着 R_c/R_a 的变化很剧烈,为了仔细研究此区间内空间电荷场的影响,将其分成如下四段来考察:1) 区间 1 到 1.25;2) 区间 1.25 到 4;3) 区间 4 到 20;4) 区间 20 到 100. 在第一段和第二段区间上,使用文献[15]中更加密集的 α^2 值,将这些数据点连成的曲线与 $f(R_c/R_a)$ 在该区间内的函数图像绘制在图 4 中.

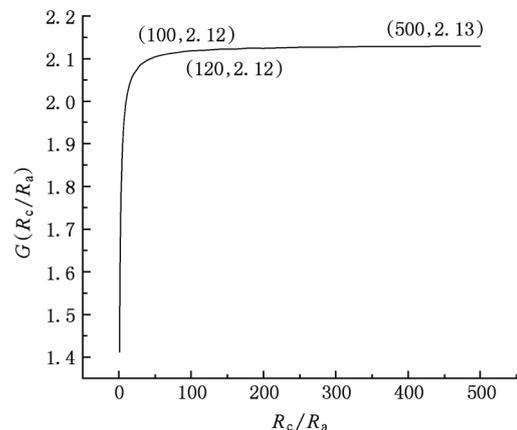


图3 空间电荷场因子随半径比例的变化曲线

从图中可以看出在 1 到 1.25 的第一段区间上两条曲线重合,即空间电荷场因子为 1,而在 1.25

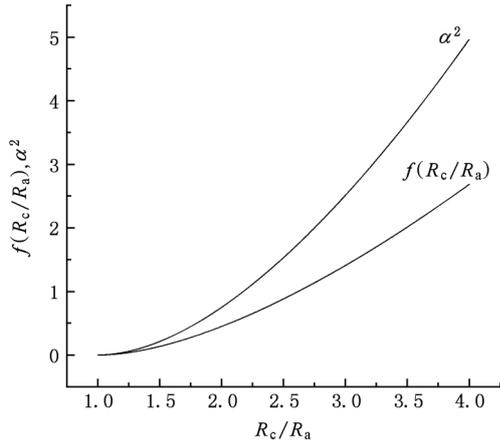


图4 级数结果与新函数计算局部比较

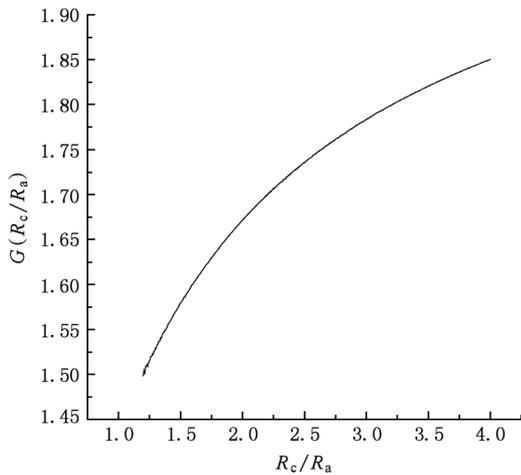


图5 空间电荷场因子随半径比例的变化曲线

到4的第二段区间上,通过拟合得到其表达式如(17)式所示,其图线绘制在图5中.令人鼓舞的是,第三段与第四段上的拟合曲线与图5中的曲线类似,而且拟合得到的空间电荷场因子的表达式也满足(17)式的形式,不同的只是彼此的系数,我们把这几组系数分别表示在(18)到(20)三个式中

$$G(R_c/R_a) = \sum_{i=0}^5 B_i (R_c/R_a)^i, \quad (17)$$

在第二段区间(1.25 到 4)上,表达式中对应的各项系数为

$$\begin{aligned} B_0 &= 0.81654, B_1 = 0.97088, B_2 = -0.46582 \\ B_3 &= 0.13228, B_4 = -0.02016, B_5 = 0.00127. \end{aligned} \quad (18)$$

在第三段区间(4 到 20)上,表达式中对应的各项系数为

$$B_0 = 1.47848, B_1 = 0.15231, B_2 = -0.01954,$$

$$B_3 = 0.00138, B_4 = -4.95617 \times 10^{-5},$$

$$B_5 = 7.1244 \times 10^{-7}. \quad (19)$$

在第四段区间(20 到 100)上,表达式中对应的各项系数为

$$B_0 = 1.74132, B_1 = 0.03883, B_2 = -0.00165,$$

$$B_3 = 3.2966 \times 10^{-5}, B_4 = -3.0478 \times 10^{-7},$$

$$B_5 = 1.0538 \times 10^{-9}. \quad (20)$$

4. 对结果的讨论

文章通过建立简单的数学模型,用第一性原理解析推导了同心球系统的空间电荷限制电流的表达式.因为空间电荷的自场及其镜像电荷产生的场很难确定,所以在推导时先假设电子只在真空电场中运动,而把自场效应和镜像电荷场效应都合并到空间电荷场因子中考虑,通过推导和比较发现,这个空间电荷场因子只和发射系统外半径与内半径的比值有关系.

鉴于实际工程的需要,文章只考虑了外球为发射面的情况,其实若内球为发射面时,可以用完全类似的处理方法进行推导.(1)式的可靠性已经得到大量实验的验证,文章将新求得函数 $f(R_c/R_a)$ 与(1)式中的 α^2 进行比较,不仅得出了同心球系统空间限制电流的解析表达式,而且也定量的研究了空间电荷场(包括自场和镜像电荷场)对空间电荷限制电流的影响.

由前面的推导、分析和比较,可以得出同心球空间电荷限制电流的表达式为(14)和(15)式,而其中的空间电荷场因子 $G(R_c/R_a)$ 列在表1中.从表1中可以看出,当 R_c/R_a 在1.25到100之间取值时,空间电荷场因子都可以表达成 R_c/R_a 的五次多项式,所不同的只是多项式的系数,而在除此之外的其他区间上,空间电荷场因子都趋近于常数.这是因为当 R_c/R_a 的值接近1时,阴极与阳极离得很近,在阴极与阳极的电势差不变的情况下,两极之间的真空电场就很强而远大于空间电荷场,所以 $G(R_c/R_a)$ 就趋近于1;而当两极之间的距离增加到很大(大于100)时,施加于阴极发射面处的电场就比较小,所以阴极电流密度就趋于饱和,自然空间电荷场因子就趋于常数.而当 R_c/R_a 在1.25到100之间取值时,随着阴极与阳极之间距离的增加,阴极表面的真空电场和发射电流密度都在迅速变化,因此空间电荷场因子呈现出非线性变化.

表 1 空间电荷场因子在不同区域的值或表达式

R_c/R_a	$G(R_c/R_a)$	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
(1, 1.25]		约等于 1					
(1.25, 4]		0.81654	0.97088	-0.46582	0.13228	-0.02016	0.00127
(4, 20]	$\sum_{i=0}^5 B_i \left(\frac{R_c}{R_a}\right)^i$	1.47848	0.15231	-0.01954	0.00138	-4.95617×10^{-5}	7.1244×10^{-7}
(20, 100]		1.74132	0.03883	-0.00165	3.2966×10^{-5}	-3.0478×10^{-7}	1.0538×10^{-9}
(100, 120]		约等于 2.12					
(120, 500]		约等于 2.125					

5. 结 论

文章建立简单的模型,用第一性原理推导了同心球二极管之间空间电荷限制电流的解析表

达式,其中的空间电荷因子通过和经典朗缪尔电流比较而得到.这个结果使得空间电荷限制电流的应用更加方便,同时也避免了 R_c/R_a 较大时级数 α^2 发散的可能,在理论和实践中都具有重要意义.

- [1] Zhang Y H, Jiang J S, Chang A B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1676 (in Chinese) [张永辉、江金生、常安碧 2003 物理学报 **52** 1676]
- [2] Liu G Z, Yang Z F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 075207
- [3] Shi L, Zhang J S, Qiu A C, He X P 2001 *High Power Laser And Particle Beams.* **13** 357 (in Chinese) [石磊、张嘉生、邱爱慈、何小平 2001 强激光与粒子束 **13** 357]
- [4] Xia L S, Wang M, Huang Z P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3453 (in Chinese) [夏连胜、王勐、黄子平 2004 物理学报 **53** 3453]
- [5] Liu J, Shu T, Li Z Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2622 (in Chinese) [刘静、舒挺、李志强 2010 物理学报 **59** 2622]
- [6] Liu G Z, Shao H 2003 *Chin. Phys.* **12** 204
- [7] Liu G Z, Huang W H, Shao H, Xiao R Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 600
- [8] Langmuir I, Blodgett K 1924 *Phys. Rev.* **24** 49
- [9] Page L, Adams I 1945 *Phys. Rev.* **68** 126
- [10] Degond P, Jaffard S, Poupaud F, Raviart P A 1996 *Math. Methods Appl. Sci.* **19** 287
- [11] Luginsland J W, Lau Y Y, Gilgenbach R M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4668
- [12] Jelić N, Schrittwieser R, Kuhn S 1998 *Physics Letters A* **246** 318
- [13] Lau Y Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 278301-1
- [14] Xu P C, James Dickens, Hatfield L L 2004 *Phys. Plasmas* **11** 3278
- [15] Electron tube design handbook compiling committees 1981 *A handbook for design of electron optics system in microwave tube* (First edition) (Beijing: National defense industry press) P340—357 (in Chinese) [电子管设计手册编辑委员会 1981 微波管电子光学系统设计手册(第一版)(北京:国防工业出版社)第340—357页]

Simple theory of space-charge-limited current between concentric sphere*

Li Fei¹⁾²⁾ Xiao Liu¹⁾ Liu Pu-Kun^{1)†} Yi Hong-Xia¹⁾²⁾ Wan Xiao-Sheng¹⁾²⁾

1) (*Key Laboratory of High Power Microwave Sources and Technologies, Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China*)

2) (*Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China*)

(Received 21 October 2010; revised manuscript received 22 November 2010)

Abstract

In high-power microwave diode design, the space-charge-limited current is important because of its relation to the diode property and the formation of the virtual cathode. Although the Langmuir - Blodgett law, as a numerical solution, is helpful, a simple functional expression is more convenient for practical research and can avoid the divergence of the series for large R_c/R_a . First principle is used to generalize two-dimensional space-charge-limited current for planar plane capacitor and coaxial cylinders, and its reliability has been examined adequately. In this paper we obtain the functional expression of space-charge-limited current for concentric sphere, and the space-charge field factor in this expression by comparing the classical Langmuir current with the current from concentric sphere.

Keywords: first principle, concentric sphere diode, space-charge-limited current

PACS: 79. 20. Kz, 41. 75.- i, 52. 25. Tx

* Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60801030, 60931001).

† Corresponding author. E-mail: pkliu@mail. ie. ac. cn