

一类特殊单模压缩态的 Wigner 函数*

余海军[†] 杜建明 张秀兰

(淮南师范学院物理系, 淮南 232001)

(2010 年 11 月 22 日收到; 2010 年 12 月 16 日收到修改稿)

本文运用 IWOP 技术推导出 Wigner 算符的相干态显式, 计算出一类特殊单模压缩态 $|z\rangle_{f,g} = \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + (fz + gz^*)a^+ - fga^{+2}\right]|0\rangle$ 的 Wigner 函数解析式, 通过数值计算可以看到, 参数 f 和 g 的任一个取值固定时, 另一个参数的旋转取值会使得特殊单模压缩态的 Wigner 函数表现出旋转平移特性.

关键词: IWOP 技术, Wigner 算符, Wigner 函数

PACS: 03.65.-w

1. 引言

在量子力学中由于不能同时精确地测量粒子的坐标和动量, 对于量子态的演化可以用它所对应的 Wigner 函数来描述^[1]. 文献[3—13]运用 IWOP 技术^[2]研究了在具体表象中的 Wigner 算符和 Wigner 函数, 并分析了其应用. 文献[14]提出了一种压缩与平移参量相关的双模压缩相干态表象

$$|z_1, z_2\rangle_g = \exp\left[-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2) + (fz_1 + gz_2)a^+ + (gz_1^* + fz_2^*)b^+ - 2fga^+b^+\right]|00\rangle,$$

并研究了它的压缩特性与相干态特性. 但当该双模光场发生简并时, 便出现了单模的压缩相干态^[15]

$$|z\rangle_{f,g} = \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + (fz + gz^*)a^+ - fga^{+2}\right]|0\rangle,$$

它的压缩参量与平移参量是相关的, 式中 f, g 都是复数, 并满足 $|f|^2 + |g|^2 = 1$. 本文将运用 IWOP 技术首先推导出 Wigner 算符在相干态中的显式, 由此计算一类特殊单模压缩态

$$|z\rangle_{f,g} = \exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + (fz + gz^*)a^+ - fga^{+2}\right]|0\rangle$$

的 Wigner 函数解析式, 并通过数值计算画出其 Wigner 函数在相空间中的分布图, 分析参数 f 和 g 对此类压缩态 Wigner 函数分布的影响.

2. Wigner 算符的相干态显式

已知坐标本征态在 Fock 表象中,

$$|q\rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^{+2}}{2}\right)|0\rangle.$$

真空投影算符的正规乘积展开式^[2]

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-a^+a}:$$

利用 IWOP 技术, 考虑到 $\hat{Q} = \frac{a + a^+}{\sqrt{2}}$, 可以改

写 $\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| = 1$ 为纯高斯形式的积分,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle\langle q| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \pi^{-1/2} \exp\left(-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^{+2}}{2}\right) |0\rangle\langle 0| \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa - \frac{a^2}{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \pi^{-1/2} \exp\left(-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa^+ - \frac{a^{+2}}{2}\right) \\ &\quad \times : \exp(-a^+a) : \exp\left(-\frac{q^2}{2} + \sqrt{2}qa - \frac{a^2}{2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} : \exp\{-q^2 + 2q(a^+ + a)\} / \sqrt{2} \end{aligned}$$

* 安徽高校省级自然科学基金项目(批准号:KJ2010B204)和淮南师范学院自然科学基金项目(批准号:2010LK08)资助的课题.

[†] E-mail: haijun20030@163.com

$$\begin{aligned}
 & - [(a^+ + a)/\sqrt{2}]^2 \} : \\
 & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\pi}} : e^{-(q-\hat{Q})^2} :. \quad (1)
 \end{aligned}$$

同理, $\int_{-\infty}^{\infty} dp | \rangle \langle p | = 1$ 的纯高斯形式的积分为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{\pi}} : e^{-(p-P)^2} : = 1. \quad (2)$$

由(1)式和(2)式, 得出

$$\begin{aligned}
 |q\rangle \langle q| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : e^{-(q-\hat{Q})^2} :, \\
 |p\rangle \langle p| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} : e^{-(p-P)^2} :. \quad (3)
 \end{aligned}$$

由此构造出 Wigner 算符

$$\Delta(q, p) = \frac{1}{\pi} : e^{-2(a^+ - \hat{Q})^2 - (p - P)^2} :. \quad (4)$$

令 $z = \frac{q + ip}{\sqrt{2}}$, 可得 Wigner 算符在相干态表象

中的正规乘积形式

$$\Delta(q, p) = \frac{1}{\pi} : e^{-2(a^+ - z^*)(a - z)} : = \Delta(z, z^*). \quad (5)$$

注意到 $|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + za^+} |0\rangle$, 有

$$\begin{aligned}
 |z + \alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (z+\alpha)a^+} |0\rangle, \\
 |z - \alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (z-\alpha)a^+} |0\rangle,
 \end{aligned}$$

式中 α 是复数. 由此可得

$$\begin{aligned}
 & |z + \alpha\rangle \langle z - \alpha| \\
 &= e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (z+\alpha)a^+} |0\rangle \langle 0| e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (z-\alpha)a^+} \\
 &= : e^{-|z|^2 - |\alpha|^2 + (z+\alpha)a^+ + (z-\alpha)a} :. \quad (6)
 \end{aligned}$$

考虑到 $z\alpha^* - z^*\alpha$ 是个纯虚数, 可以作为傅里叶变换的积分核, 利用数学公式

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^2z}{\pi} \exp(\zeta |z|^2 + \xi z + \eta z^* + fz^2 + gz^{*2}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4fg}} \exp[(\zeta^2 - 4fg)^{-1} \\
 & \quad \times (-\zeta\xi\eta + \xi^2g + \eta^2f)]. \quad (7)
 \end{aligned}$$

对(6)式傅里叶变换可得

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} |z + \alpha\rangle \langle z - \alpha| e^{z\alpha^* - z^*\alpha} \\
 &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} : e^{-|z|^2 - |\alpha|^2 + (z+\alpha)a^+ + (z-\alpha)a} : e^{z\alpha^* - z^*\alpha} \\
 &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} : e^{-|z|^2 - |\alpha|^2 + (z+\alpha)a^+ + (z-\alpha)a + z\alpha^* - z^*\alpha} : \\
 &= \frac{1}{\pi} : e^{-2(a^+ - z^*)(a - z)} :. \quad (8)
 \end{aligned}$$

比较(8)式与(5)式, 可以看出 Wigner 算符的相干态显式

$$\Delta(z, z^*) = \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} |z + \alpha\rangle \langle z - \alpha| e^{z\alpha^* - z^*\alpha}. \quad (9)$$

3. 特殊单模压缩态在相干态表象中的 Wigner 函数

为了计算区别, 下面取 Wigner 算符的相干态显式为

$$\begin{aligned}
 \Delta(\beta, \beta^*) &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} |\beta + \alpha\rangle \langle \beta - \alpha| e^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha}, \\
 \beta &= \frac{q + ip}{\sqrt{2}}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

利用算符公式,

$$\begin{aligned}
 e^A e^B &= e^B e^A e^{[A, B]}, \\
 e^{A+B} &= e^B e^A \exp \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{i!} \frac{1}{j+i+1} \\
 & \quad \times [[B, A^{(i)}], B^{(j)}], \quad (11)
 \end{aligned}$$

可以推导出

$$\begin{aligned}
 {}_{f,g}\langle z | \beta + \alpha \rangle &= \langle 0 | e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (f^*z^* + g^*z)a - f^*g^*a^2} \\
 & \quad \times e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (\beta + \alpha)a^+} |0\rangle \\
 &= \exp \left[-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|\beta + \alpha|^2}{2} \right. \\
 & \quad \left. + (f^*z^* + g^*z)(\beta + \alpha) - f^*g^*(\beta + \alpha)^2 \right], \\
 \langle \beta - \alpha | z \rangle_{f,g} &= \langle 0 | e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (\beta^* - \alpha^*)a} \\
 & \quad \times e^{-\frac{1}{2}\hat{P} + (fz + gz^*)a^+ - fga^{+2}} |0\rangle \\
 &= \exp \left[-\frac{|z|^2}{2} - \frac{|\beta - \alpha|^2}{2} \right. \\
 & \quad \left. + (fz + gz^*)(\beta^* - \alpha^*) - fg(\beta^* - \alpha^*)^2 \right]. \quad (12)
 \end{aligned}$$

利用 Wigner 算符相干态显式(10)式、数学公式(7)式以及(12)式, 可以推导出特殊单模压缩态

$$|z\rangle_{f,g} = \exp \left[-\frac{|z|^2}{2} + (fz + gz^*)a^+ - fga^{+2} \right] |0\rangle$$

的 Wigner 函数的解析式

$$\begin{aligned}
 W(q, p) &= {}_{f,g}\langle z | \Delta(\beta, \beta^*) | z \rangle_{f,g} \\
 &= {}_{f,g}\langle z | \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2} |\beta + \alpha\rangle \langle \beta - \alpha| \\
 & \quad \times e^{\beta\alpha^* - \beta^*\alpha} | z \rangle_{f,g} \\
 &= e^{-|z|^2 - |\beta|^2 + A\beta + A^*\beta^* - B\beta^2 - B^*\beta^{*2}} \int \frac{d^2\alpha}{\pi^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times e^{-|\alpha|^2 + (A-2B\beta-\beta^*)\alpha + (-A^*+2B^*\beta^*+\beta)\alpha^* - B\alpha^2 - B^*\alpha^{*2}} \\ & = \frac{1}{\pi \sqrt{1-4|B|^2}} \exp\left(-|z|^2 - |\beta|^2 \right. \\ & \quad \left. + A\beta + A^*\beta^* - B\beta^2 - B^*\beta^{*2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{-|C|^2 - C^{*2}B^* - C^2B}{1-4|B|^2}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $A = f^*z^* + g^*z$, $B = f^*g^*$, $C = A^* - 2B^*\beta^* - \beta$.

4. 参数 f 和 g 对特殊单模压缩态 Wigner 函数的影响

由(13)式可以看到,在 $|f|^2 + |g|^2 = 1$ 的条件下,取 $|g|^2 = 1/2$ 时,可以求出 $|f|^2 = 1/2$,从而导致 $1 - 4|B|^2 = 1 - 4|f|^2|g|^2 = 0$,此时 Wigner 函

数无法算出.当 $g = 0, f = 1$ 时,此时的特殊压缩态退化为相干态 $|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2 + z\alpha^+} |0\rangle$,其 Wigner 函数为 $W(q,p) = \frac{1}{\pi} \exp[-2(z^* - \beta^*)(z - \beta)]$,该结果验证了(13)式的正确性.

为便于分析参数 f 和 g 对特殊单模压缩态 Wigner 函数在相空间中分布规律的影响,在利用 Matlab 软件进行数值计算时,令(13)式中 $z = 1 + i$.

图 1 给出 $g = 0, |f| = 1, q-p$ 相空间中 Wigner 函数随参数 f 取不同值时的分布规律.图 2 给出 $|g| = 1, f = 0, q-p$ 相空间中 Wigner 函数随参数 g 取不同值时的分布规律.由图 1 和图 2 可以看到,随着参数的旋转取值, $W(q,p)$ 的分布图也在 $q-p$ 相空间中旋转平移,但跟随参数 f 旋转的 Wigner 函数要比跟随参数 g 旋转早 $\pi/2$ 相位.

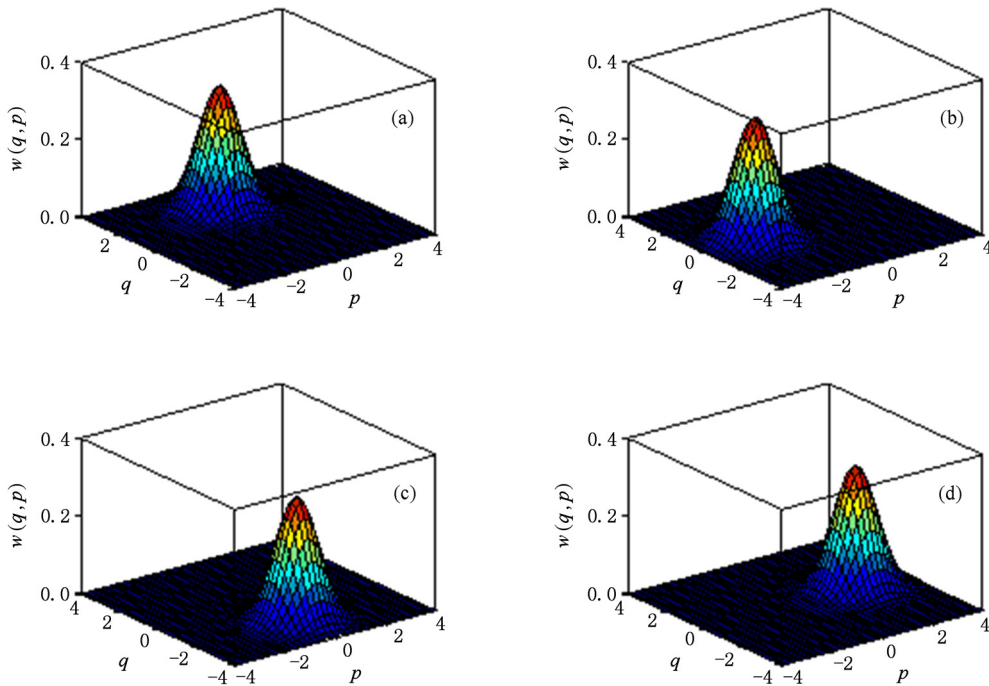


图 1 $q-p$ 相空间 Wigner 函数 ($z = 1 + i, g = 0, |f| = 1$) (a) $f = \sqrt{2}(1+i)/2$; (b) $f = \sqrt{2}(-1+i)/2$; (c) $f = \sqrt{2}(-1-i)/2$; (d) $f = \sqrt{2}(1-i)/2$

图 3 给出 $g = 1/2, |f|^2 = 3/4, q-p$ 相空间中 Wigner 函数随参数 f 取不同值时的分布规律.图 4 给出 $|g|^2 = 1/4, f = \frac{\sqrt{3}}{2}, q-p$ 相空间中 Wigner 函数随参数 g 取不同值时的分布规律.由图同样可以看到, $W(q,p)$ 的分布图在 $q-p$ 相空间中随着参

数的旋转平移特性.比较图 3 和图 4 可以看到,在参数 f 作用下, Wigner 函数的峰值偏向 p 轴的负方向,而在参数 g 作用下, Wigner 函数的峰值偏向 p 轴的正方向.比较图 3 与图 1 可以发现,在 $|f| \neq 1$ 时, Wigner 函数在相空间中的峰值有所增加,图像被压缩.

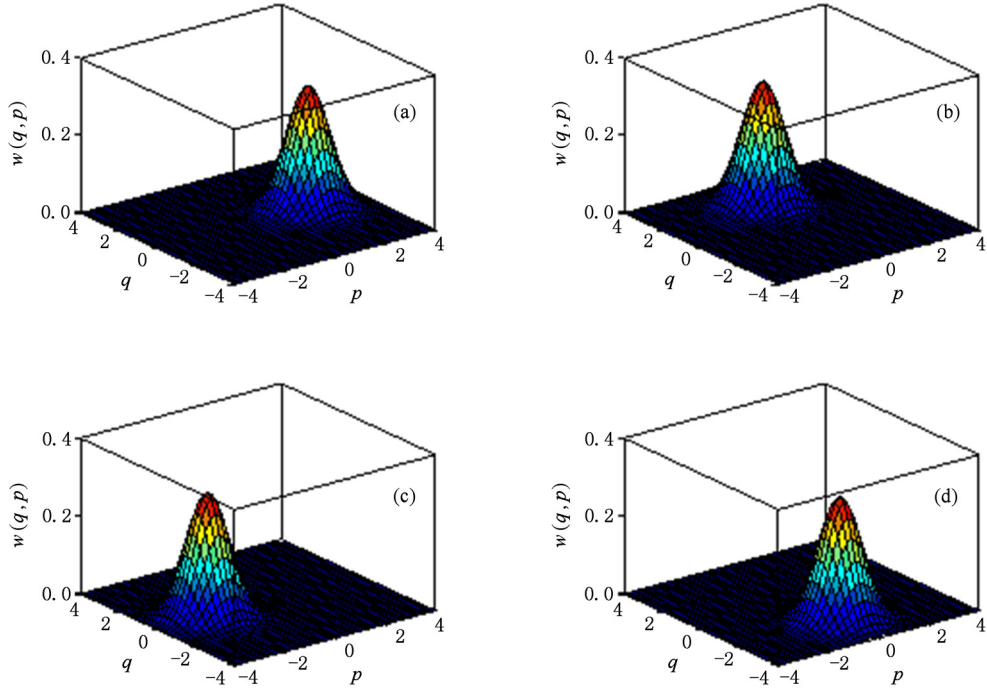


图2 q - p 相空间 Wigner 函数 ($z = 1 + i$, $|g| = 1$, $f = 0$) (a) $g = \sqrt{2}(1 + i)/2$; (b) $g = \sqrt{2}(-1 + i)/2$; (c) $g = \sqrt{2}(-1 - i)/2$; (d) $g = \sqrt{2}(1 - i)/2$)

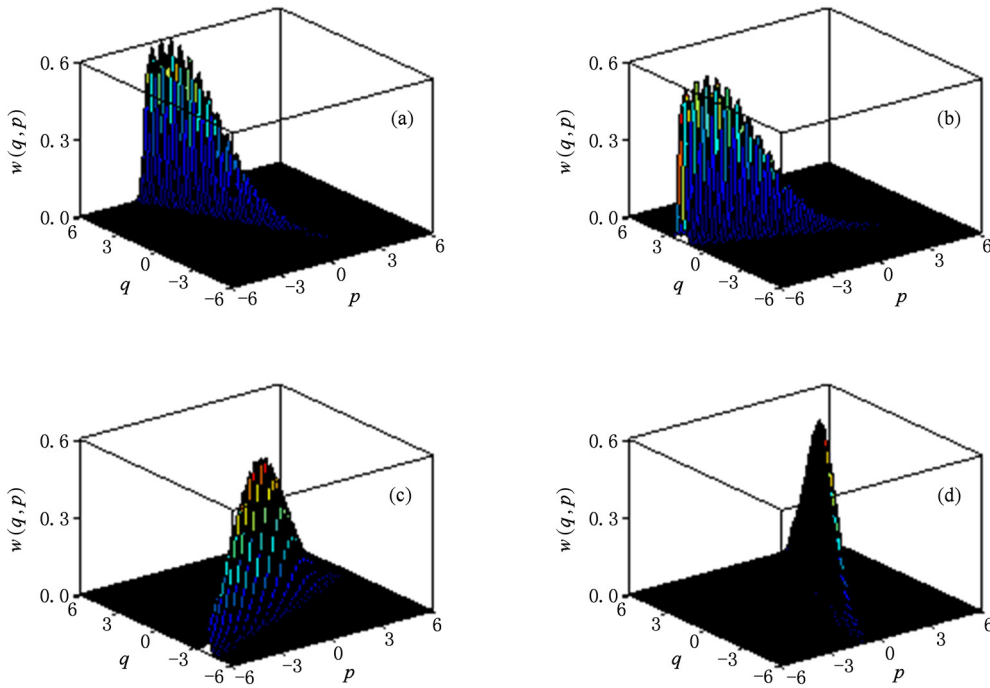


图3 q - p 相空间 Wigner 函数 ($z = 1 + i$, $g = 1/2$, $|f|^2 = 3/4$) (a) $f = \sqrt{6}(1 + i)/4$; (b) $f = \sqrt{6}(-1 + i)/4$; (c) $f = \sqrt{6}(-1 - i)/4$; (d) $f = \sqrt{6}(1 - i)/4$)

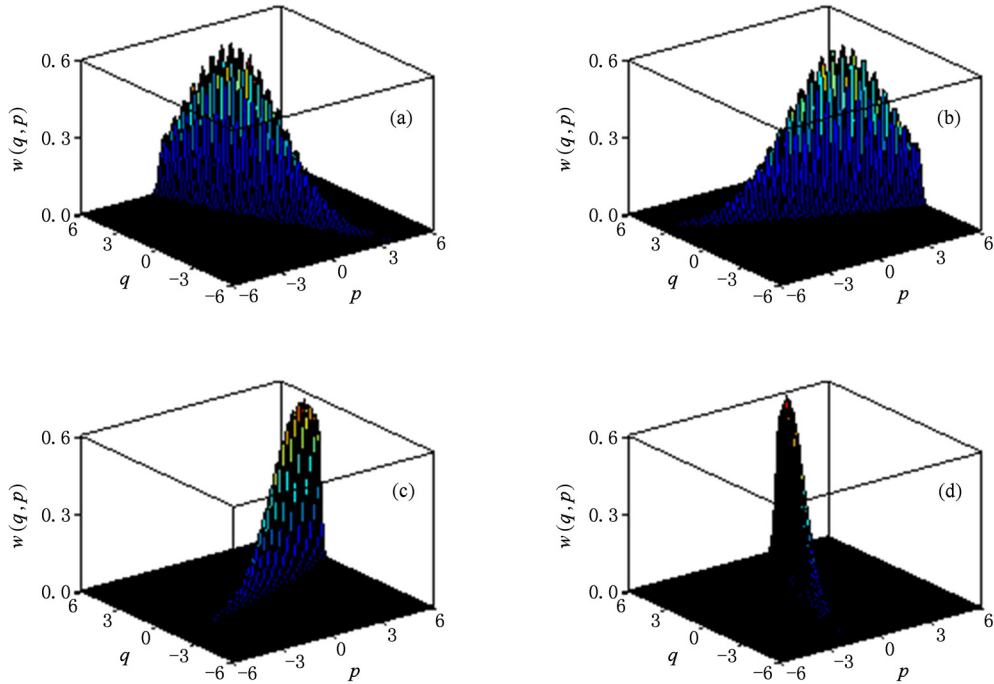


图4 q - p 相空间 Wigner 函数 ($z = 1 + i$, $|g|^2 = 1/4$, $f = \sqrt{3}/2$) (a) $g = \sqrt{2}(1 + i)/4$; (b) $g = \sqrt{2}(-1 + i)/4$; (c) $g = \sqrt{2}(-1 - i)/4$; (d) $g = \sqrt{2}(1 - i)/4$

5. 结 论

综上所述, 本文运用 IWOP 技术推导出了 Wigner 算符在相干态表象中的表达式, 在此基础上计算出了一类特殊的单模压缩态 $|z\rangle_{f,g} =$

$\exp\left[-\frac{|z|^2}{2} + (fz + gz^*)a^+ - fga^{+2}\right]|0\rangle$ 的 Wigner 函数的解析式. 最后通过数值计算看到, 参数 f 和 g 对此类压缩态的 Wigner 函数在相空间中的分布具有明显的影响, 在其中一个参数取固定值时, 另一个参数旋转取值会使得特殊单模压缩态的 Wigner 函数表现出旋转平移特性.

- | | |
|---|---|
| <p>[1] Wigner E 1932 <i>Phys. Rev.</i> 40 749</p> <p>[2] Fan H Y, Ruan T N 1983 <i>Commun. Theor. Phys.</i> 2 1289</p> <p>[3] Fan H Y, Ruan T N 1984 <i>Commun. Theor. Phys.</i> 3 345</p> <p>[4] Fan H Y 1991 <i>Commun. Theor. Phys.</i> 16 123</p> <p>[5] Fan H Y 1992 <i>Commun. Theor. Phys.</i> 18 343</p> <p>[6] Fan H Y, Yang Y L 2006 <i>Phys. Lett. A</i> 353 439</p> <p>[7] Fan H Y, Guo Q 2006 <i>Phys. Lett. A</i> 358 203</p> <p>[8] Fan H Y, Hu L Y 2009 <i>Chin. Phys. B</i> 18 611</p> | <p>[9] Chen J H, Fan H Y 2009 <i>Chin. Phys. B</i> 18 3714</p> <p>[10] Fan H Y 2010 <i>Chin. Phys. B</i> 19 040305</p> <p>[11] Fan H Y, Hu L Y, Yuan H C 2010 <i>Chin. Phys. B</i> 19 060305</p> <p>[12] Hu L Y, Xu X X, Fan H Y 2010 <i>J. Opt. Soc. Am. B</i> 27 286</p> <p>[13] Xu X X, Hu L Y, Fan H Y 2010 <i>Opt. Commun.</i> 283 1801</p> <p>[14] Fan H Y, Fan Y 1998 <i>Chin. Sci. Bulletin</i> 43 1332</p> <p>[15] Fan H Y, Xiao Min 1996 <i>Phys. Lett. A</i> 220 81</p> |
|---|---|

Wigner function of a kind of special single-mode squeezed state *

Yu Hai-Jun[†] Du Jian-Ming Zhang Xiu-Lan

(*Department of Physics, Huainan Normal University, Huainan 232001, China*)

(Received 22 November 2010; revised manuscript received 16 December 2010)

Abstract

In this paper, the expression of Wigner operator in the coherent state is derived using the IWOP technology. The Wigner function of a kind of special single-mode squeezed state is calculated. When the rotation parameter value changes, the numerical calculations show that the Wigner function in the phase space possesses a rotation displacement feature.

Keywords: IWOP technique, Wigner operator, Wigner function

PACS: 03.65.-w

* Project supported by the Natural Science Foundation of the Anhui Higher Education Institutions of China (Grant No. KJ2010B204) and the Scientific Research Foundation of Huainan Normal University (Grant No. 2010LK08).

[†] E-mail: haijun20030@163.com