含整体单极子黑洞场中的吸附和辐射*

向茂槐 陈菊华 王永久†

(湖南师范大学物理研究所,长沙 410081)

(2010 年 12 月 13 日收到;2011 年 1 月 5 日收到修改稿)

本文研究了在含整体单极子的黑洞场中质量亏损效应,计算了被吸附的(落向质量中心的)中性粒子的质量亏损,进而计算了被吸附的质量球壳以及极限情况下质量球的质量亏损. 这些物质的质量亏损最终将转化为能量辐射.

关键词: 广义相对论, 整体单极子, 黑洞, 质量亏损

PACS: 04.20.-q, 04.70.Dy, 97.60.Lf

1. 引 言

众所周知,早期宇宙的相变会产生许多拓扑缺陷. 例如,宇宙弦、整体单极子、畴壁和纹理. 拓扑缺陷的类型依赖于真空流形 μ 的拓扑[1]. Barriola 和 Vilenkin 得到了 Einstein 方程的近似解[2],该解描写一个具有整体单极子的黑洞. 这样一个黑洞可以在宇宙早期由一个史瓦西黑洞吞并一个单极子形成. 包含一个整体单极子的黑洞解为[3,4]

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega_2^2, \quad (1)$$

其中 M 是黑洞的质量, η 是对称破缺的尺度[5]. 广义相对论预言,当粒子由无引力区域结合成引力质量时,质量的一部分要被辐射出去. 由等效原理可知粒子的引力质量等于其惯性质量. 由于动能和势能可以转化为惯性质量,所以也就可以转化为引力质量. 引力场中的源质量就包含有与引力场本身质量相对应的自能. 把这一质量和组成它的所有粒子都在无穷远处时所具有的质量进行比较,便可求得上述质量亏损. 为此,需要先求出引力场中一个试验粒子的质量和它在无限远处质量之间的关系式. 取 $c = G = \hbar = 1$ 的自然单位系. 下面我们先讨论史瓦西场中的情况.

2. 史瓦西场中中性试验粒子的质量亏损

史瓦西场的度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \quad (2)$$

短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s} = 0. \quad (3)$$

$\mu = 0$ 分量的第一次积分为

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = A, \quad (4)$$

式中 M 为场源质量, A 为一常量. 当 $r \to \infty$ 时度规应是闵可夫斯基的, $\mathrm{d}t/\mathrm{d}s \to A$. 在狭义相对论中,静止质量为 m_0 的粒子,相对论总能量表示为

$$m_0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = m. \quad (5)$$

与此类似,我们可以这样解释(4)式中的常量 A : m_0A 是引力场中自由粒子的总能量,其中包含静能、动能和引力势能. 这样,在史瓦西场中,静止质量为 m_0 的粒子的总能量可写为

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)m_0\left\{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right.$$

* 国家重点基础研究发展计划(973)项目(批准号:2010CB832803),国家自然科学基金(批准号:10873004),湖南省教育厅基金(批准号:08B051)和湖南师范大学科学研究基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: wyj@hunnu.edu.cn

$$- \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2 \right] \Big\}^{-1/2}. \tag{6}$$

粒子沿任一条短程线运动时,保持总能量不变. 当这个粒子由无限远处移至史瓦西场内时,在引力作用下获得动能. 当粒子运动到场内某一点静止时,这些动能便以热能和其他形式的能量辐射出去. 这一能量损失等于粒子静止质量的减少. 令 $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$,得到

$$\bar{m}_0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} m_0. \tag{7}$$

式中 $\bar{m}_0$ 是粒子自无限远处运动至场中 r 处静止下来之后具有的静止质量, m_0 是它的惯性质量[6].

下面我们讨论含有整体单极子黑洞场中的情况. 我们将计算被吸附的(落向质量中心的)中性粒子的质量亏损,进而计算被吸附的质量球壳以及极限情况下质量球的质量亏损. 这些物质的质量亏损最终将转化为能量辐射.

3. 含整体单极子黑洞场中试验粒子的质量亏损

在含整体单极子黑洞场(1)中,不为零的度规分量有

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}, \\ g_{11} &= \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \\ g_{22} &= r^2, \\ g_{33} &= r^2 \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{8}$$

短程线方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left(g_{\mu s} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}, \tag{9}$$

当 $\mu = 0$ 时,方程(9)式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g_{\mu\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}s}, \tag{10}$$

$g_{\mu\nu}$ 均不含时间. 令 $x^0 = t$,则(10)式的第一次积分为

$$\left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = A, \tag{11}$$

式中 A 为一常量,其物理意义:静止质量为 m_0 的粒子, $m_0 A$ 是含整体单极子黑洞场中自由粒子的总能量. 由(1)式我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \Big\{ \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right) - \left[\left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}\Omega_2}{\mathrm{d}t}\right)^2 \right] \Big\}^{-1/2}. \tag{12}$$

令 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = \mathrm{d}\Omega_2/\mathrm{d}t = 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \tag{13}$$

此时,引力场中自由粒子的总能量为

$$\begin{aligned} E &= m_0 A \\ &= m_0 \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\ &= \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} m_0 \\ &= m_0', \end{aligned} \tag{14}$$

式中 m_0' 是粒子自无限远处运动至场中 r 处静止下来后的静止质量, m_0 是它的惯性静止质量. 则粒子的质量亏损为

$$m_0' - m_0 = m_0 \left[\left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} - 1 \right]. \tag{15}$$

4. 含整体单极子黑洞场中的吸积球壳及固体球的质量亏损

假设有一半径为 a, 质量为 M, 其厚度可忽略的均匀薄球壳,在它自己所产生的引力场中. 考虑球壳表面上一质量元 $\mathrm{d}M$,它在无限远处质量为 $\mathrm{d}M_0$,由(14)式有

$$\mathrm{d}M_0 = \left(1 - 8\pi\eta^2 - \frac{2M}{a}\right)^{-1/2} \mathrm{d}M, \tag{16}$$

上式积分可得

$$M = M_0 \sqrt{1 - 8\pi\eta^2} - \frac{{M_0}^2}{2a}, \tag{17}$$

式中 M_0 是组成球壳的物质分散在无限远处的惯性静止质量, M 是这些物质吸积成球壳后球壳的质量. 则在此场中吸积壳的质量亏损为

$$\Delta M = M_0 - M = M_0 \left(1 - \sqrt{1 - 8\pi\eta^2}\right) + \frac{{M_0}^2}{2a}. \tag{18}$$

即为在此场中辐射出去的质量.

由(17)式可得, M_0 一定时,壳半径 a 越小,则有效引力质量 M 也越小. 当 $a = M_0 / \sqrt{1 - 8\pi\eta^2}$ 时, M 为最小值

$$M_{\min} = \frac{1}{2}M_0\sqrt{1-8\pi\eta^2}, \tag{19}$$

此时可得含整体单极子的黑洞场中吸积壳最大的质量亏损

$$(\Delta M)_{\max} = M_0 - \frac{1}{2}M_0\sqrt{1-8\pi\eta^2}. \tag{20}$$

即为此时辐射出去的最大质量.

另一方面, M 作为 M_0 的函数 $M(M_0)$ 有极大值,当 $\mathrm{d}M/\mathrm{d}M_0 = 0$ 时, $M_0 = a\sqrt{1-8\pi\eta^2}$, 此时有

$$M_{\max} = \frac{1}{2}a(1-8\pi\eta^2), \tag{21}$$

所以,含整体单极子的黑洞场中吸积壳的最大质量亏损

$$\begin{aligned}(\Delta M)_{\max} &= M_0 - M \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{1-8\pi\eta^2}\left(2-\sqrt{1-8\pi\eta^2}\right).\end{aligned} \tag{22}$$

此为能够辐射出去的最大质量.

下面讨论含整体单极子黑洞中均匀吸积球的质量亏损. 设均匀吸积球的密度为 ρ_0,半径为 a,则

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho_0 a^3. \tag{23}$$

设半径为 r 的球面上厚度为 $\mathrm{d}r$ 的一层质量元 $\mathrm{d}M$,在无限远处时具有质量 $\mathrm{d}M_0$, 由(16)式可得

$$\mathrm{d}M_0 = 4\pi r^2\rho_0\left(1-8\pi\eta^2-\frac{8\pi\rho r^2}{3}\right)^{-1/2}\mathrm{d}r, \tag{24}$$

两边积分,得到

$$\begin{aligned}M_0 = \frac{3}{4\mu_0}\Big[&(1-8\pi\eta^2)\arcsin\frac{\mu_0 a}{\sqrt{1-8\pi\eta^2}} \\ &-\mu_0 a\sqrt{1-8\pi\eta^2-\mu_0{}^2a^2}\Big],\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\mu_0 = \sqrt{\frac{8}{3}\pi\rho_0}$. 将(23)式代入上式,可得 M_0 和 M 之间的关系

$$\begin{aligned}M_0 = \frac{3a}{4}\Big[&(1-8\pi\eta^2)\sqrt{\frac{a}{2M}}\arcsin\sqrt{\frac{2M}{a(1-8\pi\eta^2)}} \\ &-\sqrt{1-8\pi\eta^2-\frac{2M}{a}}\Big].\end{aligned} \tag{26}$$

若 a 为常数,且 $a>0$,并考虑 $8\pi\eta^2 \ll 1$[2,5], 则由上式可得 $4M_0/3a$ 与 $M/2a$ 的关系曲线, 如图 1 所示.

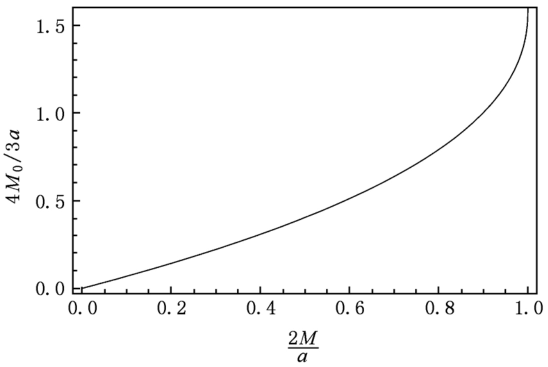

图 1 $4M_0/3a$ 与 $2M/a$ 的关系曲线

由此可见, M_0 随着 M 的增大而不断增大. 而 $a \geqslant 2M/1-8\pi\eta^2$, a 一定,则

$$M \leqslant \frac{1-8\pi\eta^2}{2}a, \tag{27}$$

因此,当 $M = (1-8\pi\eta^2)a/2$ 时,

$$\begin{aligned}M_{0\max} = \frac{3}{4\mu_0}\Big[&k\arcsin 2\sqrt{\frac{\mu_0}{k^3}}M \\ &-\frac{2\mu_0 M}{k}\sqrt{k-\left(\frac{2\mu_0}{k}\right)^2M^2}\Big],\end{aligned} \tag{28}$$

此时可得吸积均匀球最大的质量亏损

$$\begin{aligned}(\Delta M)_{\max} = \frac{3}{4\mu_0}\Big[&k\arcsin 2\sqrt{\frac{\mu_0}{k^3}}M \\ &-\frac{2\mu_0 M}{k}\sqrt{k-\left(\frac{2\mu_0}{k}\right)^2M^2}\Big] - M.\end{aligned} \tag{29}$$

(28),(29)两式中 $\mu_0 = \sqrt{\frac{8}{3}\pi\rho_0}$, $k = 1-8\pi\eta^2$. 它也是其向外辐射的最大质量.

本节讨论的均匀固体球实际上是质量球壳内半径趋于零的极限情况. 对于黑洞场中的吸附效应,和对于大质量恒星、星系核的吸附和坍缩过程,所研究的质量球壳外半径都远大于黑洞的引力半径,因此本节的讨论对于黑洞场中的吸附效应和对于大质量天体的坍缩效应都是有意义的[7—13].

[1] Kibble T W B 1976 *J. Phys.* A **9** 1387

[2] Barriola M, Vilenkin A 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 341

[3] Diego H, Carlos L 1990 *Phys. Rev.* D **42** 8

[4] Bezerra de Mello E R, Bezerra V B and Khusnutdinov N R 1999 *Phys. Rev.* D **60** 063506

[5] Wang Y J 2008 *Classical and quantum black hole* (Beijing:

Science Press) (in Chinese) [王永久 2008 经典黑洞和量子黑洞 (北京:科学出版社)]

[6] Wang Y J 2010 *The Theory of Gravitation* (Beijing: science press) (in Chinese) [王永久 2010 引力理论(北京:科学出版社)]

[7] Chen J H, Wang Y J 2010 *Int. J. Mod. Phys.* D **25** 1439

[8] Huang H, Wang Y J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 099702

[9] Gong T X, Wang Y J 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 030402

[10] Cao G T, Wang Y J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5921 (in Chinese) [曹广涛、王永久 2010 物理学报 **59** 5921、]

[11] Chen J H, Wang Y J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010401

[12] Chen J H, Wang Y J 2010 *Chin. Phys.* B **19** 060401

[13] Wang Y J, Li A G, Gong T X, Chen J H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 712 (in Chinese) [王永久、李爱根、龚添喜、陈菊华 2010 物理学报 **59** 712]

Accretion and radiation in black hole with a global monopole*

Xiang Mao-Huai Chen Ju-Hua Wang Yong-Jiu†

(*Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410081, *China*)

(Received 13 December 2010; revised manuscript received 5 January 2011)

Abstract

In this paper, we study on mass-defect effect in the black hole with a global monopole, calculate the mass defect of the neutral particle adsorbed by the central mass (or falling down to the central mass), and then compute the mass defect of the adsorbing homogeneous spherical shell and the solid sphere in the limit case. Finially, the mass defects of these substances are converted into the energy radiations.

Keywords: general relativity, global monopole, black hole, mass defect

PACS: 04.20.-q, 04.70.Dy, 97.60.Lf

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research Program of China (Grant No. 2010CB832803), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10873004), the Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (Grant No. 08B51), and the Scientific Research Fund of Hunan Normal University.

† Corresponding author. E-mail: wyj@hunnu.edu.cn