用新乌龟坐标变换研究动态 Kerr 黑洞的 Hawking 辐射*

谢志堃†

(绍兴文理学院物理与电子信息系,绍兴 312000)

(2010 年 9 月 10 日收到;2011 年 1 月 7 日收到修改稿)

本文用一种新的乌龟坐标变换和改进的 Damour-Ruffini 方法研究了动态 Kerr 黑洞的 Hawking 辐射,得到了随时间和纬度角而变化的局域温度和具有准黑体谱形式的 Hawking 辐射谱. 其结果与采用通常的乌龟坐标变换所得结果有所不同,而通常的乌龟坐标变换在量纲上存在一定的问题,本文的结果也许更为合理.

关键词: Hawking 辐射, 动态 Kerr 黑洞, 改进的 Damour-Ruffini 方法, 新乌龟坐标变换

PACS: 04.70.Dy, 04.70.Bw, 97.60.Lf

1. 引 言

Hawking 在 1974 年证明的黑洞辐射[1]不仅解决了用热力学描述黑洞时出现的矛盾从而建立起黑洞热力学,而且揭示了引力、热力学和量子理论之间具有深刻的内在联系.

Hawking 辐射本质上决定于视界附近的真空涨落,Hawking 原初的方法是考虑一颗塌缩星正在形成 Schwarzschild 黑洞的过程,通过 Bogoliubov 变换给出渐进平直区的出射和入射真空的产生、湮没算符之间的关系,发现在出射区观察入射真空态会有粒子产生. 再通过解析延拓和几何光学近似等方法可以精确地得到出射粒子谱为黑体辐射谱的结论. Hawking 辐射还可由其他方法导出[2—10],其中特别需要提到的是 Damour 和 Ruffini 的方法[3],该方法不用考虑黑洞的塌缩, 也不用二次量子化,只用弯曲时空的相对论性量子力学就可得到黑洞的 Hawking 辐射. 该方法认为,视界面可看作量子力学的势垒,辐射粒子正是穿过这样的势垒而产生的. 通过引入乌龟坐标变换,将弯曲时空背景下粒子的相对论量子力学方程在视界面附近化成平直时空的标准波动方程形式,然后通过解析延拓得到视界内外的出射波函数,再利用波函数的内积关系从而得到辐射粒子谱(后来 Sannan 用量子场论和量子统计的思想改进了 Damour-Ruffini 方法[11]). 由于是对黑洞视界面各点的辐射逐点进行研究,此方法不需要黑洞与外界达到整体热平衡,只需局域热平衡就够了,因此可推广到动态黑洞的情况. Zhao 等的工作[12]正是将 Damour-Ruffini 方法加以推广,成功地求出了一系列动态黑洞的 Hawking 辐射,其结论与计算重整化能动张量的真空期待值所得结果相一致. 该方法在求 Hawking 辐射谱的同时还能求出动态黑洞视界应满足的方程和视界面逐点的温度.

Zhao 等证明,一般静态和稳态时空的前二维在乌龟坐标下在视界附近一定显式共形平直于二维闵氏时空,从而使得用乌龟坐标能将 Klein-Gordon 方程在视界附近化成平直时空的标准波动方程,这就保证可以用 Damour-Ruffini 方法证明 Hawking 辐射的存在. 如果反过来,从要求乌龟坐标能将 Kelin-Gordon 方程在视界面附近化成平直时空的标准波动方程出发,就可以非常容易地求出事件视界应满足的方程和黑洞的温度. Zhao 等将这一套方案推广到动态黑洞. 如果采用前人已得出的动态黑洞的视界位置和温度的一级近似[7],可以证明,动态时空的前二维在乌龟坐标下视界附近也能显式共形平直于二维闵氏时空,因此乌龟坐标也能将 Klein-Gordon 方程在动态黑洞的视界附近化成平直时空

* 国家自然科学基金(批准号:10873003,11045005)和浙江省自然科学基金(批准号:Y6090739)资助的课题.

† E-mail: Xiezk@usx.edu.cn

的标准波动方程. 由此看来,Zhao 等用于静态和稳态黑洞的方法也可以用于动态黑洞,把视界位置 r_{H} 和温度参数 κ(静态和稳态情况即为视界表面重力)作为未知量引入乌龟坐标(即成为广义乌龟坐标),然后要求粒子动力学方程在视界附近化成平直时空的标准波动方程,从而定出 r_{H} 和 κ 并求出热谱[13—15]. 这就是改进的 Damour-Ruffini 方法.

本文用一种新乌龟坐标变换和改进的 Damour-Ruffini 方法研究动态 Kerr 黑洞的 Hawking 辐射.

2. 动态 Kerr 黑洞事件视界满足的方程

用超前爱丁顿坐标描述的动态 Kerr 黑洞的线元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-\frac{2mr}{\rho^2}\right)\mathrm{d}v^2\\&+2\mathrm{d}v\mathrm{d}r-\frac{4mra\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi\\&-2a\sin^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\rho^2\mathrm{d}\theta^2\\&+\left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta, m=m(v), a=a(v)$.

黑洞事件视界应满足零曲面方程

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=0.\tag{2}$$

将(1)式代入(2)式可得动态 Kerr 黑洞事件视界满足的方程

$$\begin{aligned}&r^2-2r^2\dot{r}-2mr+a^2-2a^2\dot{r}\\&+a^2\sin^2\theta\dot{r}^2+r'^2=0,\end{aligned}\tag{3}$$

其中, $\dot{r}\equiv\frac{\partial r}{\partial v}, r'\equiv\frac{\partial r}{\partial\theta}$.

3. 动态 Kerr 黑洞的表面重力

下面以黑洞辐射的标量场来研究动态 Kerr 黑洞的Hawking辐射. 标量粒子应满足Klein-Gordon方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}\right)=\mu^2\Phi.$$

将(1)式的度规代入上式可得到动态 Kerr 时空中标量粒子应满足如下方程:

$$\begin{aligned}&a^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}+2(a\dot{a}\sin^2\theta+r)\frac{\partial\Phi}{\partial v}\\&+2(r^2+a^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial r}+2a\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial\varphi}\\&+2a\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi}+(r^2+a^2-2mr)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\\&+2(r-m+a\dot{a})\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\dot{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\\&+\cot\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}-\mu^2\rho^2\Phi=0,\end{aligned}\tag{4}$$

其中 μ 是 Klein-Gordon 粒子的质量.

有文献采用了如下的乌龟坐标变换[16,17]:

$$r_*=r+\frac{1}{2\kappa}\ln\left[\frac{r-r_{\mathrm{H}}(v,\theta)}{r_{\mathrm{H}}(v,\theta)}\right],$$

$$v_*=v-v_0,\theta_*=\theta-\theta_0,\varphi_*=\varphi-\varphi_0.\tag{5}$$

v_0,θ_0 和 φ_0 为常数, κ 为待定参数. r_{H} 是事件视界的径向坐标. 本文引入下式的乌龟坐标变换来进行研究:

$$r_*=\frac{1}{2\kappa}\ln\left[\frac{r-r_{\mathrm{H}}(v,\theta)}{r_{\mathrm{H}}(v,\theta)}\right]$$

$$v_*=v-v_0,\theta_*=\theta-\theta_0,\varphi_*=\varphi-\varphi_0.\tag{6}$$

(6)式决定了变换前后坐标的以下求导关系式:

$$\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}=\frac{\partial}{\partial v_*}-\frac{r\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2\kappa r_{\mathrm{H}}(r-r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta_*}-\frac{rr'_{\mathrm{H}}}{2\kappa r_{\mathrm{H}}(r-r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial}{\partial r_*},$$

其中

$$\dot{r}_{\mathrm{H}}\equiv\frac{\partial r_{\mathrm{H}}}{\partial v},r'_{\mathrm{H}}\equiv\frac{\partial r_{\mathrm{H}}}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}=\frac{1}{4\kappa^2(r-r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}-\frac{1}{2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial r_*}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial v}=\frac{1}{2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+\frac{\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial r_*}-\frac{r\dot{r}_{\mathrm{H}}}{4\kappa^2r_{\mathrm{H}}(r-r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v\partial\varphi}=\frac{\partial^2}{\partial v_*\partial\varphi}-\frac{r\dot r_{\rm H}}{2\kappa r_{\rm H}(r-r_{\rm H})}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}=\frac{1}{2\kappa(r-r_{\rm H})}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}=\frac{\partial^2}{\partial v_*^2}-\frac{r^2r_{\rm H}\ddot r_{\rm H}-rr_{\rm H}^2\ddot r_{\rm H}-r^2\dot r_{\rm H}^2+2rr_{\rm H}\dot r_{\rm H}^2}{2\kappa r_{\rm H}^2(r-r_{\rm H})^2}\frac{\partial}{\partial r_*}-\frac{r\dot r_{\rm H}}{\kappa r_{\rm H}(r-r_{\rm H})}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial v_*}+\frac{r^2\dot r_{\rm H}^2}{4\kappa^2r_{\rm H}^2(r-r_{\rm H})^2}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}=\frac{\partial^2}{\partial\theta_*^2}-\frac{r^2r_{\rm H}r''_{\rm H}-rr_{\rm H}^2r''_{\rm H}-r^2r'^2+2rr_{\rm H}r'^2}{2\kappa r^2(r-r_{\rm H})^2}\frac{\partial}{\partial r_*}-\frac{rr'_{\rm H}}{\kappa r_{\rm H}(r-r_{\rm H})}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\theta_*}+\frac{r^2r'^2}{4\kappa^2r_{\rm H}^2(r-r_{\rm H})^2}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}.$$

将以上关系式代入方程(4),便得到新的乌龟坐标下的 Klein-Gordon 方程

$$\begin{aligned}&\frac{a^2\sin^2\theta r^2\dot r_{\rm H}^2-2(r^2+a^2)r_{\rm H}r\dot r_{\rm H}+r_{\rm H}^2(r^2+a^2-2mr)+r^2r'^2_{\rm H}}{2\kappa r_{\rm H}(r-r_{\rm H})[r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}]}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*\partial v_*}\\
&+\left\{\frac{-a^2\sin^2\theta(r^2r_{\rm H}\ddot r_{\rm H}-rr_{\rm H}^2\ddot r_{\rm H}-r^2\dot r_{\rm H}^2+2rr_{\rm H}\dot r_{\rm H}^2)}{r_{\rm H}(r-r_{\rm H})[r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}]}-\frac{r\dot r_{\rm H}2(a\dot a\sin^2\theta+r)}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}\right.\\
&+\frac{2(r^2+a^2)r_{\rm H}\dot r_{\rm H}}{(r-r_{\rm H})[r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}]}-\frac{(r^2+a^2-2mr)r_{\rm H}}{(r-r_{\rm H})[r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}]}\\
&+\frac{2(r-m+a\dot a)r_{\rm H}}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}-\frac{r^2r_{\rm H}r''_{\rm H}-rr_{\rm H}^2r''_{\rm H}-r^2r'^2_{\rm H}+2rr_{\rm H}r'^2_{\rm H}}{r_{\rm H}(r-r_{\rm H})[r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}]}\\
&\left.-\frac{rr'_{\rm H}}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}\cot\theta\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial r_*}-\frac{2ar\dot r_{\rm H}}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*\partial\varphi}\\
&+\frac{2ar_{\rm H}}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}\frac{\partial^2}{\partial r_*\partial\varphi}-\frac{2rr'_{\rm H}}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*\partial\theta_*}\\
&+\frac{2\kappa r_{\rm H}(r-r_{\rm H})}{r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}}\left[a^2\sin^2\theta\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_*^2}+2(a\dot a\sin^2\theta+r)\frac{\partial\Phi}{\partial v_*}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta_*^2}\right.\\
&\left.+\dot a\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_*}+\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_*}\cot\theta+2a\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_*\partial\varphi}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_*^2}-\mu^2\rho^2\Phi\right]=0.\end{aligned}\tag{7}$$

在视界面附近处(即 $r\to r_{\rm H}$, $\theta\to\theta_{\rm H}$, $\varphi\to\varphi_{\rm H}$, 简记为 $r\to r_{\rm H}$)将方程(7)现改写成标准的波动方程形式,有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*\partial v_*}+A\frac{\partial\Phi}{\partial r_*}+B\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*\partial\varphi_*}+C\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*\partial\theta_*}=0.\tag{8}$$

这就要求 $\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*^2}$ 项的系数在 $r\to r_{\rm H}$ 时为1,即

$$\lim_{r\to r_{\rm H},\theta\to\theta_0,\varphi\to\varphi_0}\frac{a^2\sin^2\theta r^2\dot r_{\rm H}^2-2(r^2+a^2)r_{\rm H}r\dot r_{\rm H}+r_{\rm H}^2(r^2+a^2-2mr)+r^2r'^2_{\rm H}}{2\kappa r_{\rm H}(r-r_{\rm H})[r_{\rm H}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta r\dot r_{\rm H}]}=1.$$

分析此式可以发现,当 $r\to r_{\rm H}$ 时,分母 $\to 0$, 要使得其极限存在,分子也必须 $\to 0$ 从而使表达式是 $\frac{0}{0}$ 的不定型. 容易看出,分子在 $r\to r_{\rm H}$ 时满足动态 Kerr 黑洞事件视界应满足的方程(3). 这样我们就可以利用 $\frac{0}{0}$ 不定型的 L' Hospital 法则,上式的分子和分母对 r 进行微分后再取极限,即可以得到(6)式的乌龟坐标变换中的待定因子

$$\kappa=\frac{r_{\rm H}(m-r_{\rm H}\dot r_{\rm H})-a^2(1-\dot r_{\rm H})}{r_{\rm H}[r_{\rm H}^2+a^2(1-\sin^2\theta\dot r_{\rm H})]}.\tag{9}$$

按照改进的 Damour-Ruffini 方法的思想,待定因子 κ 就是动态 Kerr 黑洞的表面重力.

波动形式的 Klein-Gordon 方程(8)中的其他系数分别可求得

$$\begin{aligned} A &= \frac{2r_H\dot{r}_H - a^2\sin^2\theta_0\ddot{r}_H + 2a\dot{a}(1-\sin^2\theta_0\dot{r}_H) - r''_H - r'_H\cot\theta_0}{r_H^2 + a^2(1-\sin^2\theta_0\dot{r}_H)}, \\ B &= \frac{2a(1-\dot{r}_H)}{r_H^2 + a^2(1-\sin^2\theta_0\dot{r}_H)}, \\ C &= \frac{-2r'_H}{r_H^2 + a^2(1-\sin^2\theta_0\dot{r}_H)}. \end{aligned} \tag{10}$$

4. 动态 Kerr 黑洞的 Hawking 辐射谱

对 Klein-Gordon 方程式(8)我们可以利用分离变量法进行求解. 设

$$\Phi = R(r_*)\Theta(\theta_*)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + \mathrm{i}m\varphi_*}, \tag{11}$$

其中 ω 是实常数, m 为整数. 将(11)式代入(8)式可得到

$$R \propto \mathrm{e}^{-(A+\mathrm{i}Bm+\mathrm{i}Ck_\theta-2\mathrm{i}\omega)r_*}, \tag{12}$$

$$\Theta(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\theta\theta_*}, \tag{13}$$

其中 k_θ 为分离变量常数, 也是波矢的 θ 分量. 视界面外附近的出射波为

$$\Phi_{\mathrm{out}} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + \mathrm{i}k_\theta\theta_* + \mathrm{i}m\varphi_* + (2\mathrm{i}\omega - A - \mathrm{i}Bm - \mathrm{i}Ck_\theta)r_*}. \tag{14}$$

下面讨论波动方程解(14)的径向部分

$$\Phi_{\mathrm{out}} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + 2\mathrm{i}(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)r_* - Ar_*}, \tag{15}$$

其中

$$\omega_\theta = \frac{C}{2}k_\theta, \omega_\varphi = \frac{B}{2}m. \tag{16}$$

将(6)式的乌龟坐标变换代入(15)式, 便得到视界面外附近径向出射波方程

$$\Phi_{\mathrm{out}} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_*}(r-r_H)^{\frac{\mathrm{i}(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)}{k}}(r-r_H)^{-\frac{A}{2k}}. \tag{17}$$

由上式可以看出, 在视界面上 Φ_{out} 是不解析, 即不能延伸到视界面的内部. 为了求得视界面内部出射波的方程, 按照 Damour-Ruffini 的方法, 将(17)式通过复平面解析延拓到视界内部区域(即 $r < r_H$), 即进行如下代换:

$$r - r_H \rightarrow |r - r_H|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} = (r_H - r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi},$$

即可给出视界内($r<r_H$)的径向出射波

$$\tilde{\Phi}_{\mathrm{out}} \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v_* + 2\mathrm{i}(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)r_* + \mathrm{i}\pi\frac{A}{2k} - Ar_*}\mathrm{e}^{\frac{\pi(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)}{k}}, \tag{18}$$

这里, $r < r_H, r_* = \dfrac{1}{2\kappa}\ln\left(\dfrac{r_H - r}{r_H}\right)$.

由(17)和(18)式可以得到视界面上出射波穿透视界面的相对透射概率

$$\left|\frac{\Phi_{\mathrm{out}}}{\tilde{\Phi}_{\mathrm{out}}}\right|^2 \propto \mathrm{e}^{\frac{-2\pi(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)}{k}}, \tag{19}$$

用 Damour-Ruffini[3] 和 Sannan[11] 的方法可以得到出射粒子的能流密度

$$N_\omega^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)}{\kappa}} - 1}. \tag{20}$$

如果我们讨论缓变的动态 Kerr 黑洞, 则存在局域热平衡, 可定义辐射的局域温度 $T = \dfrac{\kappa}{2\pi k_B}$, 则上面的方程可改写为

$$N_\omega^2 = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{(\omega-\omega_\theta-\omega_\varphi)}{k_BT}} - 1}, \tag{21}$$

式中 $\omega_\theta + \omega_\varphi$ 为辐射粒子的化学势, 由(10)和(16)式可知 ω_θ 和 ω_φ 与 θ_0 有关, 因而辐射粒子的化学势与粒子辐射的纬度角有关.

由(21)式给出的辐射谱可以发现, 这仍是黑体辐射谱, 但 κ 的(9)式和 $T = \dfrac{\kappa}{2\pi k_B}$ 表明, 温度 T 是时间 v 和角度 θ 的函数, 是局域量, 而不像稳态黑洞那样为一个整体参量. 这是局域热平衡的体现, 是动态黑洞所具有的特征. 因此(21)式给出的辐射谱实际为准黑体谱.

5. 结果和讨论

在上面的讨论中, 通过引入一种新乌龟坐标变换和用改进的 Damour-Ruffini 方法得到了动态 Kerr 黑洞的 Hawking 辐射谱, 其为准黑体谱. 下面给出一简短的讨论:

1) 通常采用的乌龟坐标变换[18—20]

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa(v_0,\theta_0)}\ln(r - r_H(v,\theta,\varphi)),$$

$$v_* = v - v_0, \theta_* = \theta - \theta_0, \varphi_* = \varphi - \varphi_0,$$

或

$$r_* = \frac{1}{2\kappa(v_0,\theta_0)}\ln(r - r_H(v,\theta,\varphi)),$$

$$v_* = v - v_0, \theta_* = \theta - \theta_0, \varphi_* = \varphi - \varphi_0,$$

与新乌龟坐标变换式(5)或(6)相比, 上述两式由于对数项中带有量纲, 在物理意义上存在了问题. 而

且值得注意的是,对静态球对称黑洞,r_{H} 为常数,新乌龟坐标变换与通常乌龟坐标变换相比只差一常数,二者相差一个整体坐标平移,没有实质性的差别. 但对非球对称或非稳态黑洞二者就有物理上实质性的差别. 采用新乌龟坐标变换后得到的黑洞表面重力(9)与采用通常的乌龟坐标变换所得结果[16,18,21](文献[16]和[18]中令 $Q=0$ 即为动态 Kerr 黑洞的结果)是不同的,本文的结果也许更为合理.

2)用 Damour-Ruffini 方法和改进的 Damour-Ruffini 方法得到的 Hawking 辐射谱,均为纯热谱. 近年来对黑洞信息疑难问题的讨论成为热点[22—28],一种观点认为信息应该守恒,黑洞辐射会偏离纯热谱. 但是,黑洞信息疑难问题远没有得到解决,彻底解决此问题也许依赖于成功的量子引力理论的提出,信息是否守恒下结论还为时过早. 如果信息不守恒,那么黑洞辐射为纯热谱的可能性是很大的. 通常认为黑洞辐射会偏离纯热谱的一种理由是辐射对时空会有反作用. 其实,黑体辐射过程中,辐射与黑体之间就存在反作用,黑体辐射的纯热谱形式正是黑体辐射场与黑体相互作用的结果. 与此类似,也许黑洞辐射与时空的相互作用的结果就应该表现为黑洞的 Hawking 辐射为纯热谱[29].

3)用(5)式的乌龟坐标变换计算得到的(8)和(10)式都一样,但 κ 不同,结果如下:

$$\kappa=\frac{mr_{\mathrm{H}}-r_{\mathrm{H}}^2\dot{r}_{\mathrm{H}}+a^2\dot{r}_{\mathrm{H}}-a^2}{r_{\mathrm{H}}[4mr_{\mathrm{H}}-a^2(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}+\sin^2\theta_0\dot{r}_{\mathrm{H}})-r_{\mathrm{H}}^2(1+2\dot{r}_{\mathrm{H}})]},$$

κ 的不一样是值得关注的. (5)和(6)式在量纲上都正确,结果应该相同但却不同,这是需要深入探讨的问题. 这里涉及到两个方面:一方面是 Damour-Ruffini 方法的可靠性;另一方面是乌龟坐标变换的正确性. Sannan 用量子场论和量子统计的思想改进了 Damour-Ruffini 方法,其结果相同. 因此,虽然 Damour 和 Ruffini 是用弯曲时空的相对论性量子力学而不是量子场论给出的 Hawking 辐射,但是 Damour-Ruffini 和 Sannan 的殊途同归正说明了 Damour-Ruffini 方法的可靠性. 从 Damour 和 Ruffini 对乌龟坐标变换的原始定义[3]看不出(5)和(6)式哪个更合理,但采用(6)式比采用(5)式的计算过程要简单得多结果也更简洁,从物理美学原则我们更愿意相信(6)式的正确性.

作者的学习和研究得到了赵峥教授的悉心指导,在本工作的研究和论文成文过程中与赵峥教授进行了有益的讨论,在此表示衷心感谢!

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
[2] Gibbons G W, Perry M J 1978 *Proc. Roy. Soc. Lond.* A 355
[3] Damour T, Ruffini R 1976 *Phys. Rev.* D **14** 332
[4] Hartle J B, Hawking S W 1976 *Phys. Rev.* D **13** 2188
[5] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2752
[6] Boulware D 1975 *Phys. Rev.* D **11** 1404
[7] Brirrell N D, Davies P C W 1982 *Quantum Fields in Curved Space* (England: Cambridge University Press) 185
[8] Punsly B 1992 *Phys. Rev.* D **46** 1288
[9] Lapedes A S 1978 *J. Math. Phys.* **19** 2289
[10] Rosu H C 1994 arXiv: 9405072 [*gr-qc*]
[11] Sannan S 1988 *Gen. Rel. Grav.* **20** 239
[12] Zhao Z, Zhang J H, Zhu J Y 1995 *J. Theor. Phys.* **34** 2039
[13] Wang G Z, Wang J L, Yang X J 2004 *Journal of Taiyuan University of Technology* **35**(**3**) 368 (in Chinese) [王钢柱、王纪龙、杨学军 2004 太原理工大学学报 **35**(**3**) 368]
[14] Lou M W 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1035 (in Chinese) [卢卯旺 2000 物理学报 **49** 1035]
[15] Ma Y, Yang S Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2280 (in Chinese) [马　勇、杨树政 1997 物理学报 **46** 2280]
[16] Zhao Z, Yang J, Liu W B 2010 *Journal of Beijing Normal University* (*Natural Science*) **46**(**1**) 32 (in Chinese) [赵　峥、杨　健、刘文彪 2010 北京师范大学学报(自然科学版) **46**(**1**) 32]
[17] Liu X M, Liu W B 2011 *Astrophysic. Space Sci.* **331** 237
[18] Yang X J, Zhao Z 2003 *Gen. Rel. Grav.* 3**5** (4) 579
[19] Yang X J, Zhao Z 2005 *Int. J. Mod. Phys.* A **20** 1353
[20] Wu Y J, Zhao Z, Yang X J 2004 *Class. Quant. Grav.* **21** 2595
[21] Pan W Z, Yang X J, Xie Z K 2011 *Chin Phys.* B **20** 049701
[22] Liu L, Zhao Z, Tian G H, Zhang J Y 2008 *Black holes and the nature of time* (*Beijing*: *Peking University Press*) p**17** (in Chinese) [刘　辽、赵　峥、田贵花、张靖仪 2008 黑洞与时间的性质(北京:北京大学出版社)第 17 页]
[23] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2982
[24] Zhou L, Zhang J Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4380 (in Chinese) [周　亮、张靖仪 2010 物理学报 **59** 4380]
[25] Liu C Z, Zhang C P, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7491 (in Chinese) [刘成周、张昌平、王忠林 2009 物理学报 **58** 7491]
[26] Liu C Z, Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Phys. Lett.* B **639** 670

[27] Xie Z K, Yu G X, Liu C Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4390 (in Chinese) [谢志堃、余国祥、刘成周 2010 物理学报 **59** 4390]

[28] Liu C Z, Zhu J Y 2008 *Gen. Rel. Grav* **40** 1899

[29] Zhou S W, Liu B, Huang J L, Liu W B 2010 *Chin. Phys.* B **19** 010403

Hawking radiation in a dynamical Kerr black hole using a new tortoise coordinate*

Xie Zhi-Kun†

(*Department of Physics and Electronic Information, Shaoxing University, Shaoxing* 312000, *China*)

(Received 10 September 2010; revised manuscript received 7 January 2011)

Abstract

Hawking radiation from a dynamical Kerr black hole is investigated using a new tortoise coordinate and the improved Damour-Ruffini method. The local temperature changing with time and latitude angle and the Hawking radiation with quasi-blackbody spectrum are obtained. The present results are different from the existing results obtained by using usual tortoise coordinate. There exists a certain problem in dimension for the usual tortoise coordinate and the present results may be more reasonable.

Keywords: Hawking radiation, dynamical Kerr black hole, improved Damour-Ruffini method, new tortoise coordinate transformation

PACS: 04.70.Dy, 04.70.Bw, 97.60.Lf

---

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10873003, 11045005) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090739).

† E-mail: Xiezk@usx.edu.cn