

有界噪声与谐和激励联合作用下 Duffing-Rayleigh 振子的 Melnikov 混沌*

冯俊[†] 徐伟 顾仁财 狄根虎

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2011年3月4日收到; 2011年4月19日收到修改稿)

研究了有界噪声与谐和激励作用下的 Duffing-Rayleigh 振子的动力学行为. 首先运用随机 Melnikov 过程方法得到系统出现混沌的条件, 结果表明随着非线性阻尼参数的增加系统会从混沌运动到周期运动, 随着 Wiener 过程强度参数的增加, 系统由混沌进入周期的临界幅值会先递增后不变. 最后, 用两类数值方法即最大 Lyapunov 指数与 Poincare 截面验证了上述结果.

关键词: 有界噪声, 随机 Melnikov 过程, 混沌运动, 周期运动

PACS: 05.45.-a

1. 引言

目前, 非线性系统在周期或噪声作用下的混沌运动越来越受到人们的关注. 而力学中我们常见的三种振子为 Duffing 振子, Van-der-Pol 振子及 Rayleigh 振子. 大部分物理振子都具有以上振子的特点^[1,2], 并且 Duffing-Rayleigh 振子具有很重要的性质: 随着参数的变化会出现单势阱或双势阱的现象. 上述系统已经有广泛的应用背景; 工程技术, 物理学, 化学及生物学中的许多模型都可由上面三种振子的方程来表述.

近些年许多学者对上述相关振子采用 Melnikov 方法作了许多工作. 1990 年 Bulsara 等^[3] 利用 Melnikov 方法研究了非线性耗散系统的同宿轨道阈值问题, 发现这个阈值将受到弱高斯白噪声作用的影响. 1994 年 Xie^[4] 用修正的 Melnikov 函数研究了谐和激励与白噪声联合作用下的 Duffing 振子的混沌动力学行为, 理论推导发现弱噪声增大了谐和力幅值, 而通过数值计算最大 Lyapunov 指数却发现弱噪声减小了谐和力幅值, 两者得到的结论是相反的. 1997 年 Wei 和 Leng^[5] 用数值方法研究了系统的 Lyapunov 指数, 发现了随机扰动在某种程度能使系

统趋于稳定. 1998 年 Kenack 等^[6] 利用 Melnikov 理论研究了在周期激励下相应振子的瞬态混沌的阈值问题. 2006 年 Yang 等^[7] 研究了谐和激励与有界噪声作用下具有同宿或异宿轨道的 Duffing 振子分岔与混沌问题, 并且通过数值方法验证了有界噪声强度对系统产生的影响. 2007 年 Lei 等^[8] 结合多尺度方法与随机 Melnikov 方法研究了有界噪声与谐和激励对系统的影响, 结果表明随着 Wiener 过程强度的逐渐增大, 产生混沌的临界幅值呈现出先递减后递增的状态趋势. 2009 年 Yang 等^[9] 研究了非周期力作用下 Duffing-Van der pol 系统的混沌控制问题, 结果表明有界噪声不仅可以诱发混沌也能抑制混沌. 2010 年 Siewe 等^[10] 研究了在周期驱动下 Rayleigh-Duffing 振子的 Melnikov 混沌运动, 发现当非线性阻尼扰动超过了 Melnikov 混沌的阈值时, 吸引域边界呈现出分形的现象.

然而上述研究大都是基于有界噪声的激励幅值对系统的影响, 而其他因素, 如非线性阻尼参数对系统有何影响却考虑甚少. 然而在实际背景中系统中的各个因素都会对系统产生一定的影响. 于是噪声及其他因素对于系统混沌运动的影响有待进一步的研究^[11-14]. 针对上述问题, 本文中考虑有界噪声与谐和激励下的 Duffing-Rayleigh 振子, 其运动

* 国家自然科学基金(批准号: 10872165, 10932009)资助的课题.

[†] E-mail: fengjun1010@mail.nwpu.edu.cn

方程为

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = d_1 \cos(\Omega_1 t) + d_2 \xi(t), \quad (1)$$

式中 $\mu > 0$ 为非线性阻尼参数, α, β 分别代表线性与非线性恢复力的系数; $d_i > 0 (i = 1, 2)$ 分别为谐和激励与有界噪声的幅值, $\xi(t)$ 为有界噪声^[15], 即

$$\xi(t) = \cos(\Omega_2 t + \Psi), \quad (2a)$$

$$\Psi = \sigma B(t) + \Gamma, \quad (2b)$$

式中 Ω_2 表示为激励的平均频率, $B(t)$ 是标准的 Wiener 过程, Γ 为 $[0, 2\pi)$ 上的均匀随机变量, σ 为噪声强度. 而 $\xi(t)$ 的双边谱密度为

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sigma^2}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} + \frac{\sigma^2}{4(\omega + \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right]. \quad (3)$$

2. 随机 Melnikov 过程

令 $\dot{x} = y$ 可将系统方程(1)化为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \alpha x - \beta x^3 + \mu(1 - y^2)y + d_1 \cos(\Omega_1 t) + d_2 \xi(t). \end{aligned} \quad (4)$$

当 $\mu = d_1 = d_2 = 0$ 时, 对应的未扰系统的运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \alpha x - \beta x^3. \end{aligned} \quad (5)$$

这是一个 Hamilton 系统, 对应的 Hamilton 量与势函数分别为

$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4, V(x) = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4$. 系统(5)有三个不动点 $(0, 0)$ 及

$(\pm \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$; 可由定性分析知: 点 $A(0, 0)$ 为鞍点,

而 $B(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$ 及 $C(-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, 0)$ 为两个中心; 此时有

通过鞍点的两条同宿轨道为

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \pm \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}t), \\ y_0(t) &= \mp \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \sqrt{\alpha} \tanh(\sqrt{\alpha}t) \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}t). \end{aligned} \quad (6)$$

系统(5)在恢复力参数 $\alpha = 0.5, \beta = 0.05$ 的势函数与同宿轨线如图 1 所示.

Melnikov 过程方法是一种微小扰动的方法, 通过考虑系统鞍点的稳定流形与不稳定流形之间的

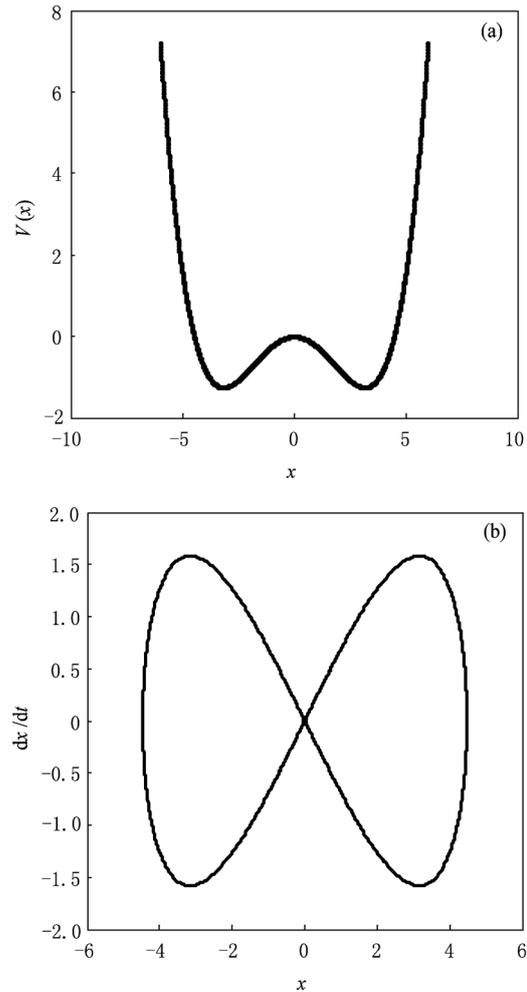


图 1 系统(5)的势函数与同宿轨线图 (a) 势函数图; (b) 同宿轨线图

距离, 借助一个 Melnikov 函数来判断系统是否发生横截相交, 从而达到判断系统是否进入 Smale 马蹄映射下的混沌运动状态的目的. 如果 Melnikov 函数有简单零点, 那么系统可能出现混沌. 这样可以通过求解简单零点得到阈值. 下面用随机 Melnikov 方法研究系统(4)的混沌运动.

假设 μ, d_1, d_2 同为 ε 阶小量, 即 $\mu = \varepsilon \hat{\mu}, d_1 = \varepsilon \hat{d}_1, d_2 = \varepsilon \hat{d}_2$. 于是系统(4)可变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \alpha x - \beta x^3 + \varepsilon [\hat{\mu}(1 - y^2)y + \hat{d}_1 \cos(\Omega_1 t) + \hat{d}_2 \xi(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

由于有界噪声可以看作是具有随机相位与频率的谐和函数之和, 那么得到系统(7)的随机 Melnikov 过程^[7,9,16]为

$$M(t_0) = \hat{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} [y_0^2(t) - y_0^4(t)] dt$$

$$\begin{aligned}
 & + \hat{d}_1 \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \cos[\Omega_1(t+t_1)] dt \\
 & + \hat{d}_2 \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \xi_{t+t_2} dt \\
 & = \hat{\mu}I + \hat{d}_1 Z(t_1) + \hat{d}_2 Z_{t_2}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

式中 $y_0(t)$ 表示为 (6) 式中的同宿轨道曲线. 而 $\hat{\mu}I$ 与 $\hat{d}_1 Z(t_1)$ 表示随机 Melnikov 过程的均值部分, $\hat{d}_2 Z_{t_2}$ 表示为随机 Melnikov 过程的随机部分, 并且

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} [y_0^2(t) - y_0^4(t)] dt = I_1 - I_2, \quad (9)$$

而

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{2\alpha^2}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh^2(\sqrt{\alpha}t) \operatorname{sech}^2(\sqrt{\alpha}t) dt \\
 &= \frac{2\alpha^2}{\beta} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{3} \tanh^3(\sqrt{\alpha}t) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= \frac{4\alpha\sqrt{\alpha}}{3\beta}, \\
 I_2 &= \frac{4\alpha^4}{\beta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tanh^4(\sqrt{\alpha}t) \operatorname{sech}^4(\sqrt{\alpha}t) dt \\
 &= \frac{4\alpha^4}{\beta^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left[\frac{1}{5} \tanh^5(\sqrt{\alpha}t) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{7} \tanh^7(\sqrt{\alpha}t) \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] \\
 &= \frac{16\alpha^3\sqrt{\alpha}}{35\beta^2}.
 \end{aligned}$$

那么有

$$I = \frac{4\alpha\sqrt{\alpha}}{3\beta} - \frac{16\alpha^3\sqrt{\alpha}}{35\beta^2}. \quad (10)$$

对于 $Z(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \cos[\Omega_1(t+t_1)] dt$, 根据同宿轨线 $y_0(t)$ 是关于 t 的奇函数得

$$\begin{aligned}
 Z(t_1) &= \pm \sin(\Omega_1 t_1) \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\beta}} \\
 &\quad \times \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}t) \tanh(\sqrt{\alpha}t) \sin(\Omega_1 t) dt \\
 &= \pm \sin(\Omega_1 t_1) \sqrt{\frac{2\alpha^2}{\beta}} J. \quad (11)
 \end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned}
 J &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}t) \tanh(\sqrt{\alpha}t) \sin(\Omega_1 t) dt \\
 &= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}t) \tanh(\sqrt{\alpha}t) \exp(i\Omega_1 t) dt
 \end{aligned}$$

来说令

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \operatorname{sech}(\sqrt{\alpha}t) \tanh(\sqrt{\alpha}t) \exp(i\Omega_1 t) \\
 &= \frac{2\exp(\sqrt{\alpha}t) [\exp(2\sqrt{\alpha}t) - 1] \exp(i\Omega_1 t)}{[\exp(2\sqrt{\alpha}t) + 1]^2},
 \end{aligned}$$

则

$$F(z) = \frac{2\exp(\sqrt{\alpha}z) [\exp(2\sqrt{\alpha}z) - 1] \exp(i\Omega_1 z)}{[\exp(2\sqrt{\alpha}z) + 1]^2}, \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \varphi(z) &= 2\exp(\sqrt{\alpha}z) [\exp(2\sqrt{\alpha}z) - 1] \\
 &\quad \times \exp(i\Omega_1 z), \psi(z) \\
 &= [\exp(2\sqrt{\alpha}z) + 1]^2,
 \end{aligned}$$

于是 $F(z)$ 有二阶奇点为 $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}i$, 由留数定理^[17,18]可知

知

$$\begin{aligned}
 & \int_{-R}^R F(t) dt + \int_R^{R+\frac{\pi i}{\sqrt{\alpha}}} F(t) dt \\
 & + \int_{R+\frac{\pi i}{\sqrt{\alpha}}}^{-R+\frac{\pi i}{\sqrt{\alpha}}} F(t) dt + \int_{-R+\frac{\pi i}{\sqrt{\alpha}}}^{-R} F(t) dt \\
 & = 2\pi i \operatorname{Res}\left(F(z), \frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

我们计算

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Res}\left(F(z), \frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right) \\
 &= \frac{2\varphi\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right)\ddot{\psi}\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right) - \frac{2}{3}\varphi\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right)\ddot{\psi}\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{\left[\dot{\psi}\left(\frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right)\right]^2},
 \end{aligned}$$

求出各阶导数并且代入上式得

$$\operatorname{Res}\left(F(z), \frac{\pi i}{2\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{\Omega_1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}}\right).$$

那么当 $R \rightarrow \infty$ 时 (13) 式可化为

$$\begin{aligned}
 & \left[1 + \exp\left(-\frac{\pi\Omega_1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right] \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \\
 & = 2\pi i \frac{\Omega_1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}}\right). \quad (14)
 \end{aligned}$$

可解得

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt = \frac{\pi}{\alpha} \Omega_1 \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}} i,$$

即

$$J = \frac{\pi}{\alpha} \Omega_1 \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}},$$

于是

$$Z(t_1) = \pm \sin(\Omega_1 t_1) \frac{\pi\Omega_1 \sqrt{2\beta}}{\beta} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (15)$$

$Z_{t_2} = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) \xi_{t+t_2} dt$ 是一个广义的平稳随机

过程. 并且将 $h(t) = y_0(t)$ 看作是轨道滤波器的脉冲响应函数, $Z = \xi * h$ 是 ξ 关于 h 的卷积积分. Z_{t_2} 的均值为零, 方差为 $\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)| S_\xi(\omega) d\omega$, 式中 $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) e^{-j\omega t} dt$ 是 $h(t) = y_0(t)$ 的傅里叶变换, $S_\xi(\omega)$ 是 $\xi(t)$ 的谱密度即(3)式. 我们可以从某种概率或统计意义下考虑 $M(t_0)$ 出现的简单零点; 由于已知 Z_{t_2} 的均值为零, 于是(8)式的随机 Melnikov 过程的均值为 $E[M(t_0)] = \hat{\mu}I + \hat{d}_1 Z(t_1)$.

由 $E[M(t_0)] = 0$ 可知

$$\hat{\mu}I + \hat{d}_1 Z(t_1) = 0. \quad (16)$$

即

$$\hat{\mu} \left(\frac{4\alpha\sqrt{\alpha}}{3\beta} - \frac{16\alpha^3\sqrt{\alpha}}{35\beta^2} \right) \pm \hat{d}_1 \sin(\Omega_1 t_1) \frac{\pi\Omega_1 \sqrt{2\beta}}{\beta} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}} = 0. \quad (17)$$

根据 $\mu = \varepsilon\hat{\mu}, d_1 = \varepsilon\hat{d}_1$ (17)式可表示为

$$\mu \left(\frac{4\alpha\sqrt{\alpha}}{3\beta} - \frac{16\alpha^3\sqrt{\alpha}}{35\beta^2} \right) \pm d_1 \sin(\Omega_1 t_1) \frac{\pi\Omega_1 \sqrt{2\beta}}{\beta} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}} = 0. \quad (18)$$

解得

$$\mu = \pm \frac{105\pi\Omega_1\beta \sqrt{2\beta} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}}}{4\alpha\sqrt{\alpha}(35\beta - 12\alpha^2)} d_1. \quad (19)$$

于是, 随机 Melnikov 过程在均值意义下出现简单零点的条件为

$$\mu \leq \mu_{cr} = \left| \frac{105\pi\Omega_1\beta \sqrt{2\beta} \operatorname{sech} \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}}}{4\alpha\sqrt{\alpha}(35\beta - 12\alpha^2)} d_1 \right|, \quad (20)$$

其中, μ_{cr} 为阈值函数. 相空间 (μ, Ω_1) 中阈值函数曲线如图 2 所示.

考虑在均方意义下的随机 Melnikov 过程出现 Smale 马蹄变换意义下混沌的条件; 由于

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) e^{-j\omega t} dt = \pm j \frac{\sqrt{2}\pi\omega}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2\sqrt{\alpha}}$$

于是,

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{2}\pi\omega}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sech} \frac{\pi\omega}{2\sqrt{\alpha}} \right|^2 \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sigma^2}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right] d\omega$$

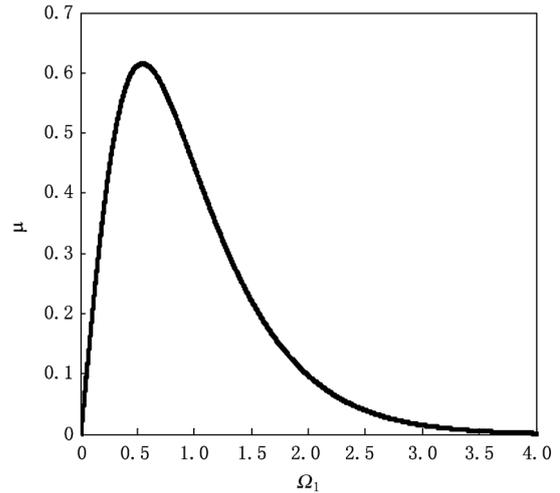


图2 相空间 (μ, Ω_1) 中的阈值函数 ($\alpha = 0.5, \beta = 0.05, d_1 = 0.7$)

$$+ \frac{\sigma^2}{4(\omega + \Omega_2)^2 + \sigma^4} \Big] d\omega = \frac{\pi\sigma^2}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \operatorname{sech}^2 \frac{\pi\omega}{2\sqrt{\alpha}} \left[\frac{1}{4(\omega - \Omega_2)^2 + \sigma^4} + \frac{1}{4(\omega + \Omega_2)^2 + \sigma^4} \right] d\omega. \quad (21)$$

所以, 随机 Melnikov 过程在均方意义下出现混沌的条件是

$$\langle \hat{\mu}I \rangle^2 = \langle \hat{d}_1 Z(t_1) \rangle^2 + \hat{d}_2 \sigma_Z^2. \quad (22)$$

根据 $\mu = \varepsilon\hat{\mu}, d_1 = \varepsilon\hat{d}_1$ (22)式可表示为

$$\mu^2 I^2 = d_1^2 [Z(t_1)]^2 + d_2^2 \sigma_Z^2.$$

即

$$\mu^2 I^2 \leq 2d_1^2 \frac{\pi^2 \Omega_1^2}{\beta} \operatorname{sech}^2 \frac{\pi\Omega_1}{2\sqrt{\alpha}} + d_2^2 \sigma_Z^2. \quad (23)$$

3. 数值模拟

3.1. 最大 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数反映了相空间中非线性动力系统的两条相邻轨道之间距离的平均指数收敛或者发散的变化率. 它常用来判别非线性动力学系统是否作混沌运动. 如果相邻轨道之间平均指数是发散的, 表明这个系统对初值具有敏感依赖性. 若某个系统有一个或多个正的 Lyapunov 指数表明这个系统作混沌运动.

为了检验在均方意义下得到的可能出现混沌的非线性参数 μ 与 Wiener 过程的强度参数 σ 的关系, 本文利用文献[19]的算法计算系统(4)的最大

Lyapunov 指数. 针对参数 $\alpha = 0.5, \beta = 0.05, d_1 = 0.7, d_2 = 0.2, \Omega_2 = 2\Omega_1 = 2.0$, 对不同的 Wiener 过程强度参数值 σ , 最大 Lyapunov 指数与非线性阻尼参数值 μ 的关系如图 3 与图 4 所示. 由图 3 和图 4 (a)–(f) 可知, 对于较小的非线性参数 μ 来说, 最大 Lyapunov 指数为正值, 然而随着 μ 的增加, 最大 Lyapunov 指数却变为负值, 表明系统由混沌运动变为周期运动. 在谐和激励下, 当参数 μ 很小时, 最大 Lyapunov 指数有短暂的负值出现, 之后又迅速回到混沌运动; 这样就出现了一个短暂的“周期窗口”的现象; 而在有界噪声激励与谐和力共同作用下, 随着强度参数值 σ 的增大, “周期窗口”的现象会随着激励的随机性而消失.

从图 4(a)–(f) 可以看出, 随着 Wiener 过程的强度参数的增大, 系统的混沌域会逐渐增大; 但是当参数 $\mu \geq 0.325$ 时, 系统将会停留在周期运动; 混

沌域不会因 Wiener 过程的强度参数的增大而增大. 即系统由混沌运动到周期运动的临界幅值会随着强度参数的增加先递增收后不变.

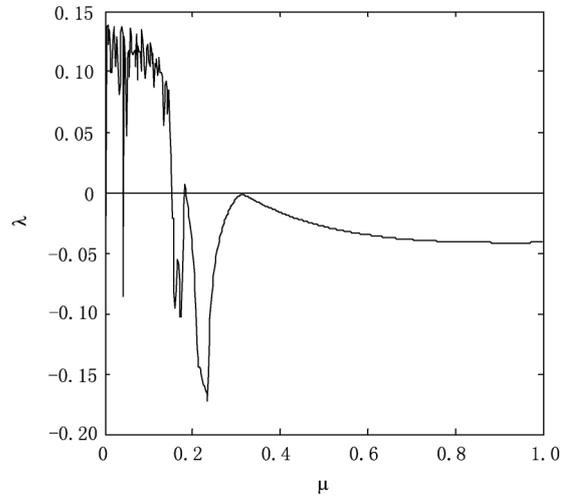
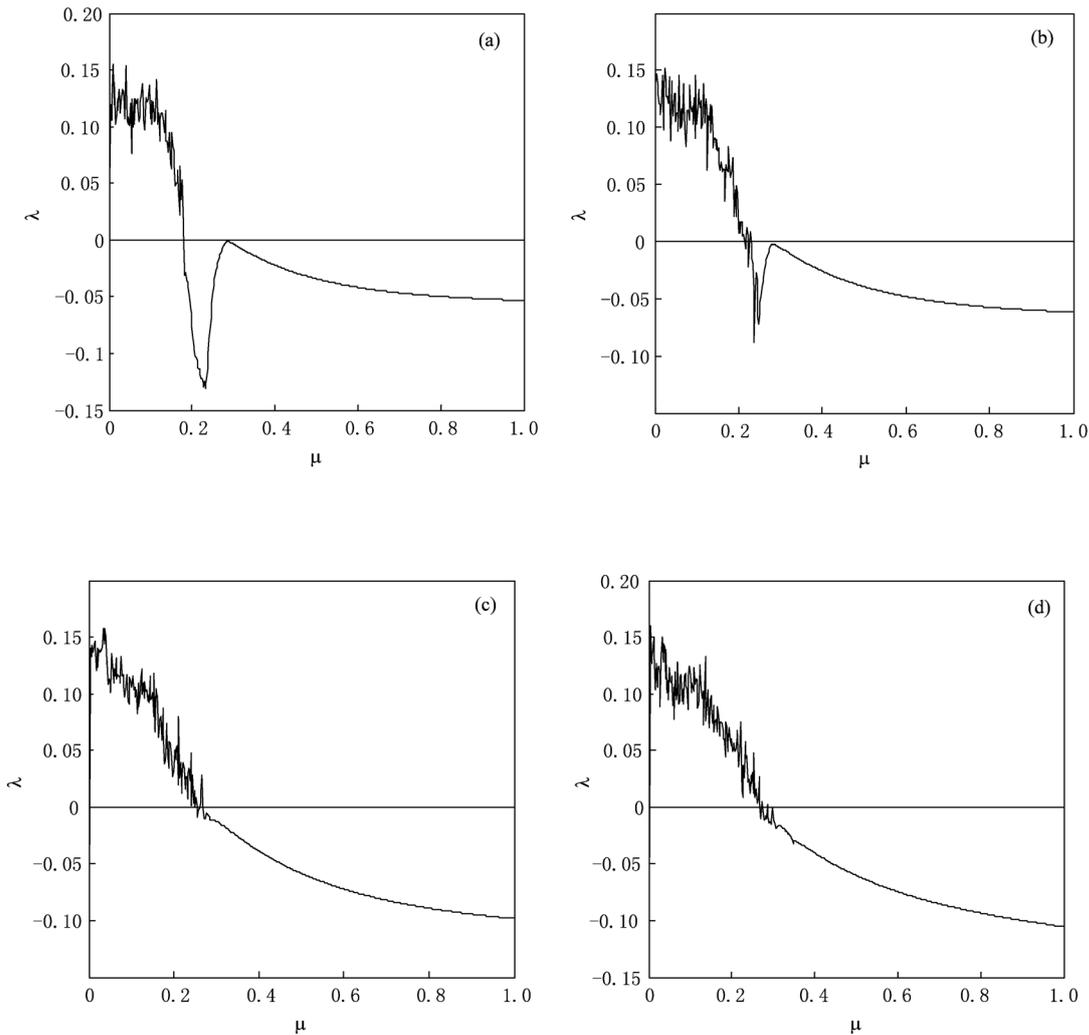


图 3 系统(2)的最大 Lyapunov 指数与非线性参数 μ 之间关系 ($\Psi = 0$)



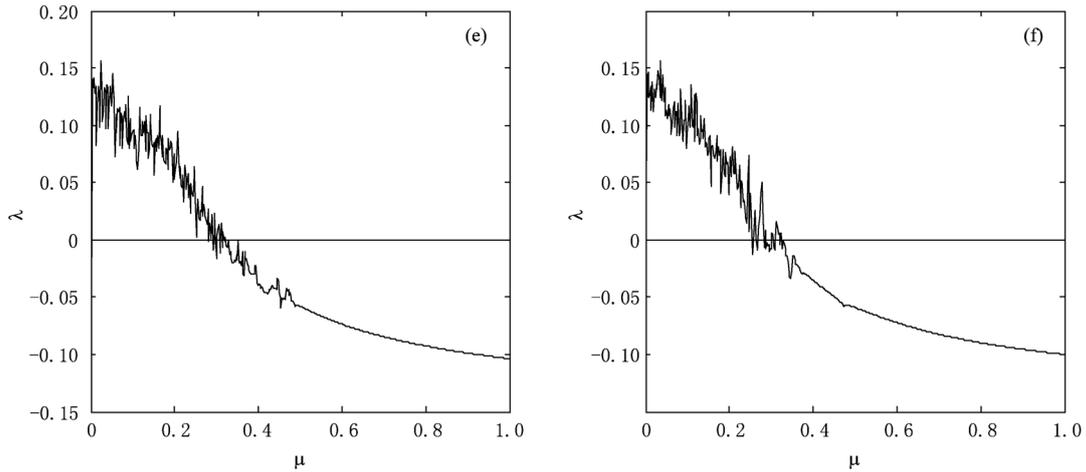


图4 系统(2)的最大 Lyapunov 指数与非线性参数 μ 之间关系 (a) $\sigma = 0.05$; (b) $\sigma = 0.1$; (c) $\sigma = 0.5$; (d) $\sigma = 1.0$; (e) $\sigma = 3.0$; (f) $\sigma = 6.0$

3.2. Poincare 截面

为了验证上述数值结果,我们对系统(4)作 Poincare 映射 $P: \Sigma \rightarrow \Sigma, \Sigma = \{(x(t), y(t)) | t = 0, 2\pi/\Omega_1, 4\pi/\Omega_1, \dots\} \subseteq R^2$; 从系统(4)的最大

Lyapunov 指数可知:当 $\mu = 0.12, \sigma = 0.0, 0.05, 2.0$ 时最大 Lyapunov 指数大于零,系统处于混沌的状态;在 Poincare 截面分析中,分别选取上述参数,计算的结果如图5所示.由图5可见,对于相同的非线性参数 μ 来说,当 Wiener 过程的强度参数增大时,

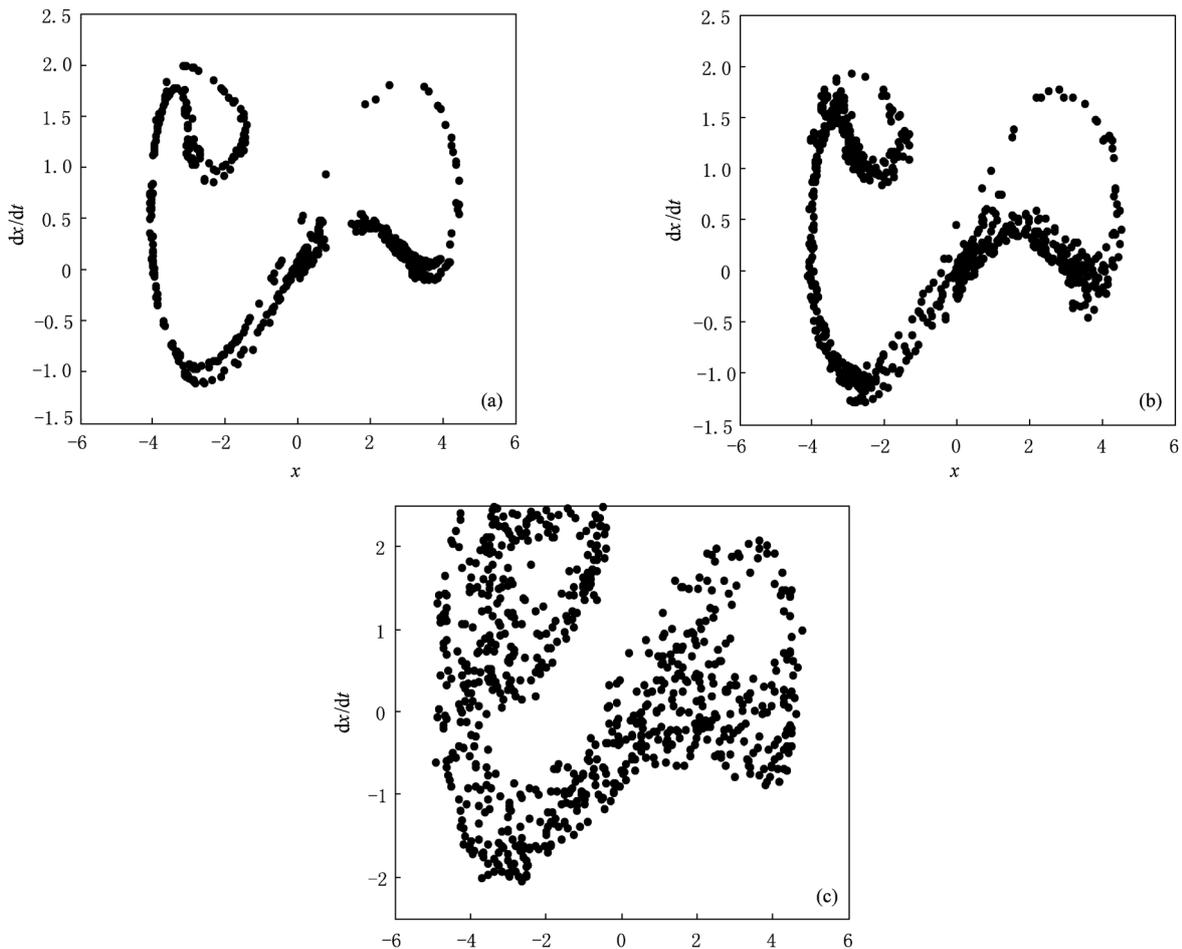


图5 系统(2)的 Poincare 截面 (a) $\sigma = 0.0$; (b) $\sigma = 0.05$; (c) $\sigma = 2.0$

系统混沌吸引子的扩散面积会随之而增大. 与最大 Lyapunov 指数的结论一致.

4. 结 论

本文通过解析方法即随机 Melnikov 过程方法研究了具有谐和激励与有界噪声共同作用下的 Duffing-Rayleigh 振子的运动问题. 理论上, 通过计算随机 Melnikov 函数给出了系统在均值与均方两种情况下出现 Smale 马蹄意义下的混沌的条件. 在数值上, 通过两种数值方法即最大 Lyapunov 指数法与

Poincare 截面法表征了非线性阻尼参数对系统产生的影响. 通过系统的最大 Lyapunov 指数与非线性阻尼参数的关系图像发现非线性参数的增加使得系统由混沌运动到周期运动, 并且在谐和激励作用下伴随有“周期窗口”现象的产生; 而在有界噪声与谐和激励联合作用下“周期窗口”现象会随机性地消失. 并且随着 Wiener 过程强度参数的增大, 系统由混沌运动到周期运动的临界值会先递增继而不变. 通过系统的 Poincare 截面发现了对于相同的非线性参数来说, Wiener 过程的强度参数增加使得系统的混沌吸引子扩散面积逐渐扩大.

-
- [1] Venkatesan A, Lakshmanan M 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6321
- [2] Kao Y H 1993 *Phys. Rev. E* 2514
- [3] Bulsara A R, Schieve W C, Jacobs E W 1990 *Phys. Rev. A* **41** 668
- [4] Xie W C 1994 *Nonlinear and Stochastic Dynamics*. **78** 215
- [5] Wei J G, Leng G 1997 *Applied Mathematics and Computation* **88** 77
- [6] Kenfack A, Kofane T C 1998 *Physica Scripta* **56** 659
- [7] Yang X L, Xu W, Sun Z K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1678 (in Chinese) [杨晓丽、徐伟、孙中奎 2006 物理学报 **55** 1678]
- [8] Lei Y M, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5103 (in Chinese) [雷佑铭、徐伟 2007 物理学报 **56** 5103]
- [9] Yang X L, Xu W 2009 *Acta Phys Sin.* **58** 3722 (in Chinese) [杨晓丽、徐伟 2009 物理学报 **58** 3722]
- [10] Siewe Siewe M, Tchawoua C, Wofo P 2010 *Mechanics Research Communications* **37** 363
- [11] Siewe Siewe M, Cao H J, Sanjuan M A F 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **39** 1092
- [12] Xie W X, Xu W, Cai L 2006 *Applied Mathematics and Computation* **172** 1212
- [13] Frey M, Simiu E 1993 *Physica D* **63** 321
- [14] Liu W Y, Zhu W Q, Huang Z L 2001 *Chaos, Solitons and Fractals* **88** 527
- [15] Lin Y K, Cai G Q 1995 *Probabilistic structural dynamics : advanced theory and applications* (New York : Mc Graw Hill)
- [16] Liu Z R 2002 *The analytical method of chaos* (Shanghai: Shanghai University Press) p56 (in Chinese) [刘增荣 2002 混沌研究中的解析方法 (上海: 上海大学出版社) 第 56 页]
- [17] Han Q, Zhang S Y, Yang G T 1999 *Applied Mathematics and Mechanics* **8** 776 (in Chinese) [韩强、张善元、杨桂通 1999 应用数学和力学 **8** 776]
- [18] Li Y J 2002 *M. S. Dissertation* (Changchun: Jilin University) (in Chinese) [李亚峻 2002 硕士学位论文 (长春: 吉林大学)]
- [19] Wolf A, Swift J, Swinney H, Vastano A 1985 *Physica D* **16** 285

Melnikov chaos in Duffing-Rayleigh oscillator subjected to combined bounded noise and harmonic excitations^{*}

Feng Jun[†] Xu Wei Gu Ren-Cai Di Gen-Hu

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 4 March 2011; revised manuscript received 19 April 2011)

Abstract

In this paper, the dynamic behavior of Duffing-Rayleigh oscillator subjected to combined bounded noise and harmonic excitations is investigated. Theoretically, the random Melnikov's method is used to establish the conditions of existence of chaotic motion. The result implies that the chaotic motion of the system turns into the periodic motion with the increase of nonlinear damping parameter, and the threshold of random excitation amplitude for the system to change from chaotic to periodic motion in the oscillator turns from increasing to constant as the intensity of the noise increases. Numerically, the largest Lyapunov exponents and the Poincare maps are also used for verifying the conclusion.

Keywords: bounded noise, random Melnikov process, chaotic motion, periodic motion

PACS: 05.45.-a

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872165 and 10932009).

[†] E-mail: fengjun1010@mail.nwpu.edu.cn