

水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数的一种快速新算法*

陈桂波 毕娟[†] 汪剑波 陈新邑 孙贯成 卢俊

(长春理工大学理学院, 长春 130022)

(2010 年 10 月 9 日收到; 2010 年 11 月 11 日收到修改稿)

本文利用提取直射波并结合自适应数字滤波等技术提出一种计算水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数的快速算法. 首先将谱域 Green 函数中表征均匀介质作用的直射波提取出来并对其积分进行解析计算, 这种处理降低了谱域 Green 函数的奇异性, 可在很大程度上缩短其积分收敛区间. 然后在将谱域 Green 函数剩余部分对应积分转化为三个快速下降积分的基础上, 引入一种自适应数字滤波算法对其进行快速求解. 最后通过具体算例验证了本文所述算法的有效性.

关键词: 并矢 Green 函数, 快速算法, 水平层状介质

PACS: 41.20.Jb, 91.25.Qi

1. 引言

在地球物理探测、目标识别与隐身、遥测遥感以及微带天线等领域, 经常会遇到水平层状介质中的电磁辐射与散射计算问题^[1,2]. 一般来说, 水平层状介质中的电磁场可通过引入电磁场并矢 Green 函数来更加方便且形象的表达^[3], 并矢 Green 函数通常由一系列 Sommerfeld 积分组合而成, 由于该积分的被积函数中包含 Bessel 函数以及反映各个介质层界面反射与透射过程的复杂核函数, 因此呈现出较高的振荡特性与较慢的衰减特性, 其数值计算非常耗时, 这往往成为实际应用中的一个瓶颈.

鉴于水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数的特点与重要性, 如何提高 Sommerfeld 积分的计算效率一直是计算电磁学领域内至关重要的研究课题, 国内外许多学者在这方面做了大量工作, 并提出了许多快速算法, 如数字滤波法、离散复镜像法以及最陡下降法等, 上述算法的优缺点及其适用范围已经在文献[1]中做了较详细的归纳总结. 最近, 陈桂波等人利用高阶窗函数结合连分式展开的方法提出了一种计算 Sommerfeld 积分的快速算法^[1], 数值实例证明该方法

具有较高的计算效率与较好的适用性, 但需要指出的是, 该方法在计算积分的时候是把谱域 Green 函数作为一个整体来进行运算, 而事实上谱域 Green 函数中表征均匀介质作用的直射波可提取出来单独计算并且其对应的积分具有解析式, 这样处理不但可以减少计算量, 还能降低谱域 Green 函数的奇异性, 进而缩短积分的收敛路径. 另外, 该方法虽然引入连分式展开技术进行加速, 但毕竟还是属于直接积分的方法, 其计算效率还有较大的提升空间. 本文将在陈桂波等人工作的基础上研究建立一种新的计算水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数的快速算法. 文中首先将水平层状介质谱域 Green 函数中表征均匀介质作用的直射波提取出来, 并对其积分进行解析计算. 然后利用小波变换把谱域 Green 函数剩余部分对应的积分转化成三个快速下降积分, 并引入一种自适应数字滤波算法进行快速求解. 最后通过具体算例检验所提算法的有效性.

2. 方法原理

2.1. 提取直射波

考虑图 1 所示的水平层状介质模型(为不失一

* 国家自然科学基金(批准号: 41004042)和教育部博士点基金(批准号: 20092216120005)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: emcust@yahoo.cn

般性,本文的水平层状介质都是指单轴各向异性介质),层界面位置用 $d_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 表示,第 n 层介质的复介电常数和磁导率分别是对角张量 $\bar{\epsilon}_n^* = \text{diag}(\epsilon_{nh}^*, \epsilon_{nh}^*, \epsilon_{nv}^*)$ 和 $\bar{\mu}_n = \text{diag}(\mu_{nh}, \mu_{nh}, \mu_{nv}) (n = 1, 2, \dots, N)$, 其中 $\epsilon_{nh}^*, \epsilon_{nv}^*$ 分别表示第 n 层介质的横向和纵向复介电常数,而 μ_{nh}, μ_{nv} 分别表示第 n 层介质的横向和纵向磁导率. 复介电常数 $\bar{\epsilon}_n^*$ 的两个分量由 $\epsilon_{np}^* = \epsilon_0 \epsilon_{np} + (i\omega\rho_{np})^{-1} (p = h, v)$ 确定,其中 $\epsilon_{nh}, \epsilon_{nv}$ 分别为横向和纵向相对介电常数, ρ_{nh}, ρ_{nv} 分别为横向和纵向电阻率. 对于给定的电流源或磁流源,其在图 1 所示模型中产生的电磁场满足 Maxwell 方程. 根据电磁场并矢 Green 函数理论,模型中任意位置 \mathbf{r} 处的电磁场可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \\ &+ \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{ME}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv', \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{JH}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dv' \\ &+ \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{MH}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv', \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\bar{\mathbf{G}}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\bar{\mathbf{G}}^{\text{ME}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 分别为空间域电、磁流源电场并矢 Green 函数.

利用 Maxwell 方程的标量化分解、二维 Fourier 变换以及传输线理论^[4],可以得到全部四种电磁场并矢 Green 函数的积分表达式,以电流源电场并矢 Green 函数为例,其 xx 分量为

$$V_i^{(p)}(k_\rho; z, z') = \begin{cases} A_{n+}^{(p)} e^{-ik_\rho^{(p)}(z-d_{n+1})} [1 + \bar{R}_{n,n+1}^{(p)} e^{-2ik_\rho^{(p)}(d_{n+1}-z)}], & z > z' \\ A_{n-}^{(p)} e^{ik_\rho^{(p)}(d_n-z)} [1 + \bar{R}_{n,n-1}^{(p)} e^{-2ik_\rho^{(p)}(z-d_n)}], & z < z' \end{cases}, \quad (4)$$

其中 $A_{n\pm}^{(p)}$ 为第 n 层波振幅, $k_{nz}^{(p)}$ 为第 n 层波的纵向波数, $\bar{R}_{n,n\pm 1}^{(p)}$ 为广义反射系数,它们均为介质层的电磁参数以及入射频率的函数.

若将(4)式中 $V_i^{(p)}$ 表达式中的第一项(对应于直射波,即均匀介质中的波)单独提取出来,其对应的积分式(假定 $z > z'$)用 $g_{i0}^{(p)}$ 来表示,则

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{xx}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\cos^2 \theta}{4\pi} \frac{\lambda_e e^{ik_e R_e}}{i\omega \epsilon_0 \epsilon_h^* R_e^5} \{ [1 + k_h^2 (z - z')^2] R_e^2 - ik_e R_e^3 - 3\lambda_e^2 (1 - ik_e R_e) (z - z')^2 \} \\ &+ \frac{\cos 2\theta}{4\pi \rho^2} \frac{1}{i\omega \epsilon_0 \epsilon_h^*} \left\{ \frac{\lambda_e e^{ik_e R_e}}{R_e^3} [R_e^2 - \lambda_e^2 (1 - ik_e R_e) (z - z')^2] + [\delta(z - z') + ik_h e^{ik_h |z-z'|}] \right\} \end{aligned}$$

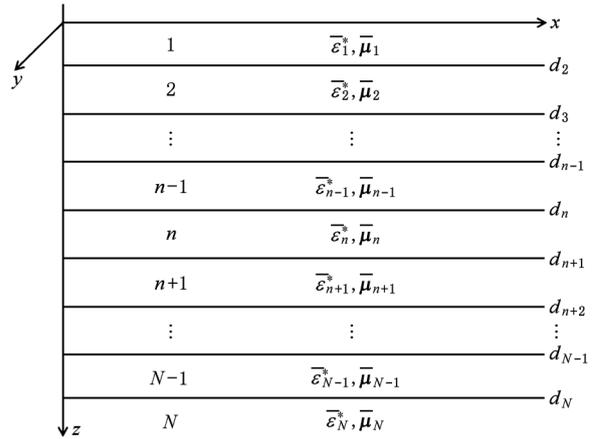


图 1 水平层状介质模型示意图

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{xx}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\cos^2 \theta \mathbf{S}_0^{(e)} - \sin^2 \theta \mathbf{S}_0^{(h)} \\ &+ \cos 2\theta [\mathbf{S}_1^{(e)} - \mathbf{S}_1^{(h)}], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\theta = \arctan \frac{y-y'}{x-x'}$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 和 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ 分别为接收点(场点)和源点的位置, $\mathbf{S}_\nu^{(p)}$ ($p = e, h$) 为如下形式的 $\nu (\nu = 0, 1)$ 阶 Sommerfeld 积分

$$\mathbf{S}_\nu^{(p)}(\rho; z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_i^{(p)}(k_\rho; z, z') J_\nu(k_\rho \rho) k_\rho^{\nu+1} dk_\rho, \quad (3)$$

这里 $\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, $V_i^{(p)}$ 为谱域 Green 函数,其解析式可由波传播理论得到(假定源点和接收点位于第 n 层)

$$\begin{aligned} g_{i0}^{(p)}(\rho; z, z') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} A_{n+}^{(p)} e^{-ik_\rho^{(p)}(z-d_{n+1})} \\ &\times J_\nu(k_\rho \rho) k_\rho^{\nu+1} dk_\rho. \end{aligned} \quad (5)$$

利用 Bessel 函数相关积分公式可得到上式积分的解析解,进而得到均匀介质中的 $\mathbf{G}_{xx}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 表达式

$$-\frac{\sin^2\theta}{4\pi} \frac{i\omega\mu_0\mu_h}{\lambda_m} \frac{e^{ik_m R_m}}{R_m} - \frac{\cos 2\theta}{4\pi\rho^2} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_h}{\epsilon_0\epsilon_h}} (e^{ik_m R_m} - e^{ik_h |z-z'|}), \quad (6)$$

其中, $\lambda_e = \sqrt{\frac{\epsilon_h^*}{\epsilon_v^*}}$, $\lambda_m = \sqrt{\frac{\mu_h}{\mu_v}}$ 分别为介质的电、磁各向异性系数,

$$R_e = \sqrt{\rho^2 + \lambda_e^2(z-z')^2}, R_m = \sqrt{\rho^2 + \lambda_m^2(z-z')^2},$$

$$k_e = \omega \sqrt{\epsilon_0\epsilon_v^* \mu_0\mu_h}, k_m = \omega \sqrt{\epsilon_0\epsilon_h^* \mu_0\mu_v},$$

$$k_h = \omega \sqrt{\epsilon_0\epsilon_h^* \mu_0\mu_h}.$$

经过上述处理之后,谱域 Green 函数的奇异性得到了有效降低,可以证明,在保持计算精度的同时,这种处理一般可使 Sommerfeld 积分收敛路径的长度减小到十几分之一甚至几十分之一. 为说明这一点,考虑一个十层介质模型,模型参数如表 1 所示,第一层介质上方为半无穷空气层. 假定发射源和接收点的空间坐标分别为(0,0,100 m)和(10,10,120 m),分别采用直接对谱域 Green 函数进行数值积分以及采用提取直射波之后再对剩余项进行数值积分的方法计算了不同频率下电流源电场并矢 Green 函数的 xx 分量,如图 2 所示. 从图中曲线可以看出,两种方法的计算结果符合得很好,但从计算效率上看,图中曲线一共包含 55 个频点,在 CPU 为 i7-2.67 G 计算机上,前一种方法需用 165 s,而后一种方法只需要 12.5 s,可见提取直射波的方法对于 Sommerfeld 积分计算效率的提高作用是非常明显的.

2.2. 自适应数字滤波算法

经过提取直射波处理之后,Sommerfeld 积分的

$$\begin{aligned} g_{v1}^{(p)}(\rho; z, z') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} A_{n+}^{(p)} e^{ik_{zn}^{(p)}(z-d_{n+1})} \tilde{R}_{n,n+1}^{(p)} J_v(k_\rho \rho) k_\rho^{v+1} dk_\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{G}^{(p)}(k_\rho; z, z') J_v(k_\rho \rho) k_\rho^{v+1} dk_\rho. \end{aligned} \quad (7)$$

可以看出,此时的被积函数仍然具有较强的振荡性与慢衰减性,致使上式积分收敛仍然十分缓慢. 为了改善其收敛特性,根据文献[1]的理论,通过引入

$$g_{v1}^{(p)}(\rho; z, z') = \begin{cases} \frac{1}{C_0} S_0^{(p)} [\tilde{G}^{(p)}(k_\rho; z, z') \Psi_0(k_\rho)] + O(a^2), & \rho > a, \\ \frac{1}{R^2 C_0} [R^2 W_0^{(p)}(\rho; z, z') - 2\rho W_1^{(p)}(\rho; z, z') + W_2^{(p)}(\rho; z, z')] + O(a^2), & \rho \leq a, \end{cases} \quad (8)$$

表 1 十层介质模型参数

层号	$\rho_h/\Omega\text{m}$	$\rho_v/\Omega\text{m}$	μ_h	μ_v	层厚度/m
1	1	3	1.2	1	20
2	5	30	2	1.5	5
3	3	10	1.5	1	10
4	8	25	3	2	8
5	5	21	1.2	1	50
6	2	9	1	0.8	65
7	10	65	1.8	1.2	2
8	30	100	1.5	1.5	25
9	6	10	1.4	1	16
10	15	80	2	1.2	∞

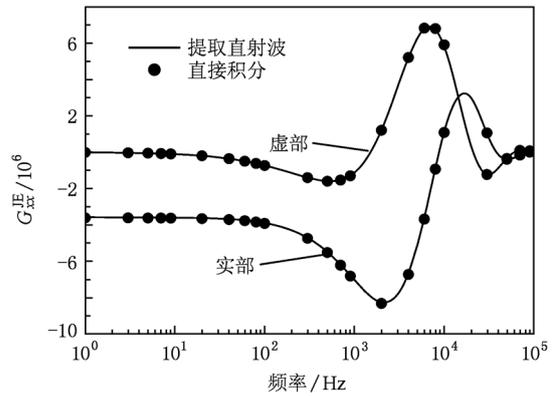


图 2 两种方法计算的电流源电场并矢 Green 函数的 xx 分量

剩余项为

这里

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2},$$

$$C_0 = \frac{a^2}{2(m+1)},$$

$$W_0^{(p)}(\rho; z, z') = S_0^{(p)} [\tilde{G}^{(p)}(k_\rho; z, z') \Psi_0(k_\rho)],$$

$$W_1^{(p)}(\rho; z, z') = S_1^{(p)} [\tilde{G}^{(p)}(k_\rho; z, z') \Psi_1(k_\rho)/k_\rho],$$

$$W_2^{(p)}(\rho; z, z') = S_0^{(p)} [\tilde{G}^{(p)}(k_\rho; z, z') \Psi_2(k_\rho)],$$

其中 Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 的解析表达式可借助于特殊函数得到^[1].

由于 Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2 均为快速下降函数,因此 $W_0^{(p)}, W_1^{(p)}$ 和 $W_2^{(p)}$ 积分式中,核函数与 Bessel 函数相比较为平滑,这种性质允许我们引入效率较高的数字滤波算法对上式积分进行快速计算. 在现有的众多数字滤波算法中, Gupta Sarma 等^[5] 给出的算法由于可以使用较少的滤波系数实现高精度计算,因而受到了较为广泛的应用. 本文在 Gupta Sarma 工作基础上提出一种自适应数字滤波算法,使用的滤波系数由图 3 给出. 可以看出,在滤波点号大于 N_1 ($\nu=0, N_1=63; \nu=1, N_1=71$) 且小于 N_2 ($\nu=0, N_2=114; \nu=1, N_2=119$) 时,滤波系数存在明显的振荡;在滤波点号小于 N_1 或大于 N_2 时,滤波系数较为平缓接近于零. 根据滤波系数的这种性质,我们引入一种自适应方法来加快计算,其基本原理为:将坐标范围分成固定区间和自适应区间,固定区间范围选择从滤波点号 N_1 到 N_2 之间,而滤波点号小于 N_1 以及大于 N_2 为自适应区间,实际计算时首先计算固定区间内的褶积和,再分别从固定区间两个端点向两侧扩展计算,当满足预先选定的误差条件时,停止计算.

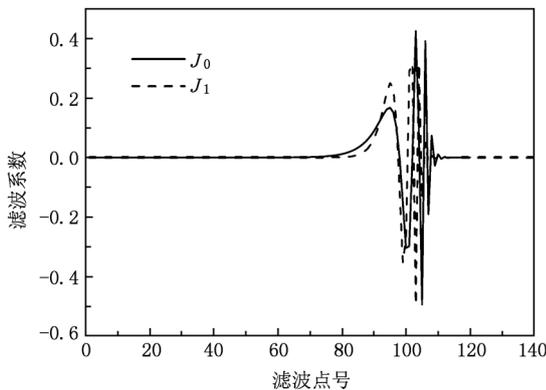


图3 滤波系数

为了考察自适应数字滤波算法的有效性,还是

考虑具有表 1 所示参数的层状介质模型,分别采用全波数字滤波法(对于 $\nu=0$ 时使用全部 120 个滤波系数,对于 $\nu=1$ 时使用全部 140 个滤波系数)和自适应数字滤波法计算了电流源电场并矢 Green 函数的 xx 分量 $G_{xx}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. 计算结果显示,两种方法的计算曲线吻合的很好. 从滤波系数的数目上看,在精度允许范围内,自适应数字滤波个数仅为 68 ($\nu=0$) 和 59 ($\nu=1$) 个,因此本文提出的自适应数字滤波法在保持计算精度的同时,使计算效率得到了较大提高. 除此之外,我们还针对不同的情况进行了大量的数值实验,计算结果均显示出自适应数字滤波算法较传统的全波数字滤波算法在计算效率方面得到了有效提高. 为节省篇幅,这里没有给出具体计算曲线.

3. 数值计算结果

算例 1 为了验证本文所提出的算法,考虑表 1 所表述的十层介质模型,假定发射源和接收点的空间坐标分别为 $(0, 0, 70 \text{ m})$ 和 $(0, 0, 45 \text{ m})$,发射频率为 100 kHz. 分别采用直接对谱域 Green 函数进行数值积分,文献[1]的算法和本文所提出的提取直射波与自适应滤波相结合的算法计算了电流源电场并矢 Green 函数的 xx 分量 $|G_{xx}^{JE}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|$,如图 4 所示. 从图中曲线可以看出,三种方法的计算结果符合得很好,但从计算效率上看,图中曲线一共包含 1001 个位置节点,在 CPU 为 i7-2.67G 计算机上,三种方法的计算时间分别为 3062 s, 59 s 和 23 s. 可见本文算法在保证计算精度的同时,使水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数的计算效率得到了有效提高.

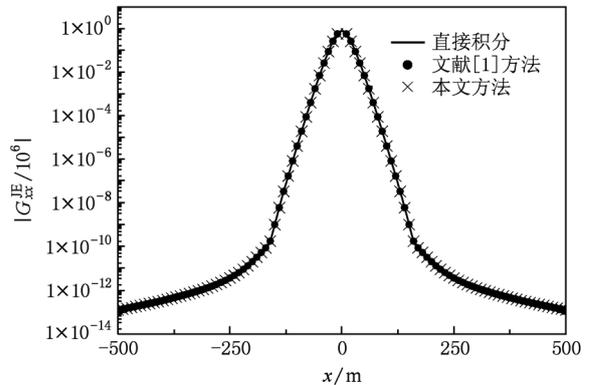


图4 算例 1 的计算曲线

算例 2 为了进一步验证当相邻介质层电阻率差异较大情况下本文算法的有效性,在表 1 所描述模型中,假定第五、六、七层介质的横向和纵向电阻率分别为 10000, 1, 15000 Ωm 和 30000, 1.5, 15000 Ωm (相邻层的电阻率差异最大可达 20000 倍),而其他参数则与算例 1 相同. 分别采用算例 1 中的三种方法计算了电流源电场并矢 Green 函数的 xx 分量 $|G_{xx}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|$, 如图 5 所示. 从计算精度上看,图 5

中三种方法的计算结果曲线符合较好;从计算效率上看,图 5 中曲线一共包含 1001 个位置节点,在 CPU 为 i7-2.67G 计算机上,三种方法的计算时间分别为 3258 s, 63 s 和 24 s. 可见本文算法在计算相邻介质层电阻率差异较大情况下的电磁场并矢 Green 函数时仍然具有较高的计算精度与计算效率.

4. 结 论

本文研究并建立了一种快速计算水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数的数值算法. 提取直射波使谱域 Green 函数的奇异性得到了有效降低,从而在很大程度上缩短了 Sommerfeld 积分的收敛路径. 自适应数字滤波算法能够在保证计算精度的同时,自动选取最少的滤波因子,进而提高计算速度. 数值计算结果显示:本文所提出的基于自适应滤波技术并结合提取直射波等技术的算法计算水平层状介质中电磁场并矢 Green 函数可获得较高的计算效率.

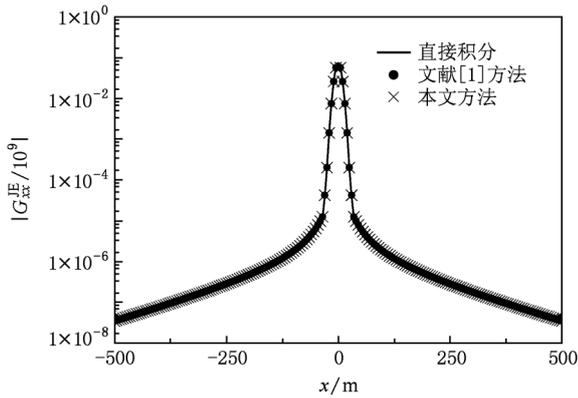


图 5 算例 2 的计算曲线

[1] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y, Yang S W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1608 (in Chinese) [陈桂波、汪宏年、姚敬金、韩子夜、杨守文 2009 物理学报 **58** 1608]
 [2] Ma H, Qu S B, Xu Z, Zhang J Q, Wang J F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1025
 [3] Tai C T, Lu S 2005 *Dyadic Green's Functions in Electromagnetic*

Theory (Wuhan: Wuhan University Press) (in Chinese) [戴振铎、鲁述 2005 电磁理论中的并矢格林函数 (武汉:武汉大学出版社)]
 [4] Michalski K A, Mosig J R 1997 *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **45** 508
 [5] Guptasarma D, Singh B 1997 *Geophysical Prospecting* **45** 745

A novel fast algorithm of electromagnetic dyadic Green's function in horizontal layered medium*

Chen Gui-Bo Bi Juan[†] Wang Jian-Bo Chen Xin-Yi Sun Guan-Cheng Lu Jun

(College of Science, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

(Received 9 October 2010; revised manuscript received 11 November 2010)

Abstract

In this paper, a novel fast algorithm is presented for electromagnetic (EM) dyadic Green's functions in horizontal layered medium using direct-waves' extraction combining with self-adaptive digital filter method. First of all, the direct-waves which characterize effects of homogeneous medium in spectral domain Green's functions (SDGF) are extracted, and their integrals are obtained by analytical calculations. In this method, the singularity of SDGF is reduced and the integral convergence range is shortened remarkably. Then, we transform the remnant integrals of SDGF into three rapid declining integrals, and self-adaptive digital filter method is introduced to obtain solution quickly. Finally, our numerical results validate the efficiency of the algorithm.

Keywords: dyadic Green's functions, fast algorithm, horizontal layered medium

PACS: 41.20.Jb, 91.25.Qi

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grand No. 41004042) and the Ph. D. Programs Foundation of Ministry of China (Grant No. 20092216120005).

[†] Corresponding author. E-mail: emcust@yahoo.cn