

## 非傍轴高斯光束传输特性的研究\*

邓小玖<sup>†</sup> 牛国鉴 刘彩霞 肖 苏

(合肥工业大学物理系, 合肥 230009)

(2010年9月24日收到; 2010年10月24日收到修改稿)

基于非傍轴矢量光束横截面上光强的严格定义 $\langle S_z \rangle$ , 采用桶中功率定义光束的束宽、远场发散角以及 $M^2$ 因子. 以非傍轴矢量高斯光束为例, 对光束的传输特性进行了详细的理论分析和数值计算, 并与非傍轴标量理论的结果进行了比较分析. 研究表明, 光源半宽 $\omega_0/\lambda < 1$ 时, 传输特性的矢量描述与非傍轴标量描述有显著差别, 随着 $\omega_0/\lambda$ 的增大, 两者趋于一致, 并逐步过渡到傍轴标量近似.

**关键词:** 非傍轴高斯光束, 桶中功率, 束宽, 发散角

**PACS:** 42.25.Bs, 42.60.Jf

## 1. 引言

众所周知, 在傍轴标量近似下, 基于传统光强二阶矩定义下的光束质量因子(又称 $M^2$ 因子)大于等于1, 是表征光束传输特性的重要参量, 基模高斯光束具有最好的光束质量, 其光束质量因子等于1<sup>[1-3]</sup>. 对非傍轴标量光束, 传统光强二阶矩是发散的, 必须通过定义功率密度 $J_z$ (又称精确光强)来描述光束横截面上的光强分布及其能量传输特性<sup>[4-7]</sup>. 研究表明, 非傍轴标量光束功率密度二阶矩在自由空间中的传播满足双曲线规律, 其 $M^2$ 因子可以小于1<sup>[5, 8]</sup>, 其物理意义还有待于进一步的研究. 然而, 当光束束腰为波长量级、发散角很大时, 光场的标量近似失效, 必须考虑其矢量特性. 对于非傍轴矢量光束, 必须采用坡印廷矢量的 $z$ 分量 $\langle S_z \rangle$ 来描述光束横截面上的光强分布及其能量传输特性<sup>[9, 10]</sup>.

由于矢量光束二阶矩的发散特性<sup>[11]</sup>, 因而不能有效地描述光束的束宽. 桶中功率描述光束的能量集中度, 则基于桶中功率定义的光束束宽便反映了光束能量传输的空间分布特性. 本文采用桶中功率定义矢量光束的束宽、远场发散角以及 $M^2$ 因子. 以非傍轴矢量高斯光束在自由空间中的传播为例, 进行了详细的数值计算, 并与非傍轴标量理论的结果

进行了比较分析, 得到了一些新的结论.

## 2. 理论分析

为方便起见, 且不失一般性, 设入射光束的边界条件为

$$E_x(x, y, 0) = \phi(x, y), \quad (1a)$$

$$E_y(x, y, 0) = 0. \quad (1b)$$

由矢量衍射理论的角谱表示<sup>[12, 13]</sup>, 光束在 $z > 0$ 半空间传输的矢量衍射场可表示为

$$E_x(x, y, z) = \iint_{\infty} A(f_x, f_y, z) \times \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y, \quad (2a)$$

$$E_y(x, y, z) = 0, \quad (2b)$$

$$E_z(x, y, z) = -\lambda \iint_{\infty} \frac{A(f_x, f_y, z) f_x}{\gamma} \times \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] df_x df_y, \quad (2c)$$

其中

$$A(f_x, f_y, z) = A_0(f_x, f_y) \exp(ikz\gamma), \quad (3a)$$

$$A_0(f_x, f_y) = \iint_{\infty} E_x(x, y, 0) \exp[-i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy, \quad (3b)$$

\* 国家自然科学基金(批准号:50776084)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: dengxjls@sina.com

$\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 f_x^2 - \lambda^2 f_y^2}$ ,  $f_x, f_y$  为横向空间频率. 矢量光束横截面上的光强定义为<sup>[14, 15]</sup>

$$\langle S_z \rangle = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_z \rangle, \quad (4)$$

式中  $\mathbf{S}$  为波印廷矢量. (4) 式还可以进一步表示为<sup>[11]</sup>

$$\langle S_z \rangle = J_z + \text{Re} \left[ \frac{1}{ik} E_x(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x} E_z^*(\mathbf{r}) \right], \quad (5)$$

其中

$$J_z = \text{Re} \left[ \frac{1}{ik} E_x^*(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial z} E_x(\mathbf{r}) \right] \quad (6)$$

为非傍轴标量光束横截面上光强的精确定义<sup>[5-7]</sup>, 也称功率密度. 式中  $k = 2\pi/\lambda$  为波数, 星号 \* 表示取复共轭, Re 表示取实部.

由文献[10], 非傍轴矢量光束横截面上半径为  $W_v(z)$  的光斑内光束的桶中功率可定义为

$$\text{PIB} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{W_v(z)} \langle S_z(\rho, \theta, z) \rangle \rho d\rho d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \langle S_z(\rho, \theta, z) \rangle \rho d\rho d\theta}, \quad (7)$$

其中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 即光束的桶中功率为光斑内光束功率与光束总功率的比. 当 PIB 为给定值时,  $W_v(z)$  即为  $z$  处由桶中功率定义的光束束宽, 通常 PIB 取 63%, 86.5% 等值, 本文 PIB 取 86.5%. 由(7)式可以定义基于桶中功率的非傍轴矢量光束的束腰  $W_v(0)$  和远场发散角  $\theta_v$ :

$$W_v(0) = \min W_v(z), \quad (8)$$

$$\tan\theta_v = \lim_{z \rightarrow \infty} W_v(z)/z. \quad (9)$$

相应的光束质量因子可定义为

$$M_v^2 = \pi \tan\theta_v W_v(0)/\lambda. \quad (10)$$

若忽略光场的  $z$  分量, 便过渡到非傍轴标量光束的桶中功率描述, 相应的光束束宽、束腰、远场发散角以及光束质量因子分别用  $W_s(z), W_s(0), \theta_s, M_s^2$  表示.

非傍轴标量光束的传输特性还可以通过精确光强二阶矩来描述, 其束宽  $W_{ns}(z)$  可定义为<sup>[5, 6]</sup>

$$W_{ns}^2(z) = \frac{2}{P(z)} \iint_{-\infty}^{\infty} J_z(x, y, z) (x^2 + y^2) dx dy, \quad (11)$$

其中

$$P(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} J_z(x, y, z) dx dy \quad (12)$$

为  $z$  处横截面上非傍轴标量光束的总功率. 设光束具有轴对称性, 且束腰位于坐标原点, 由文献[16]得

$$W_{ns}^2(z) = W_{ns}^2(0) + z^2 \tan^2\theta_{ns}, \quad (13)$$

式中

$$W_{ns}^2(0) = \frac{1}{\pi P(z)} \text{Re} \left[ \int_0^\infty \frac{\partial(A_0(f_\rho)\gamma)}{\partial f_\rho} \frac{\partial A_0^*(f_\rho)}{\partial f_\rho} f_\rho df_\rho \right], \quad (14)$$

$$\tan^2\theta_{ns} = \frac{4\pi\lambda^2}{P(z)} \int_0^{1/\lambda} |A_0(f_\rho)|^2 \frac{f_\rho^3}{\gamma} df_\rho, \quad (15)$$

其中  $f_\rho = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ ,  $W_{ns}(0)$  和  $\theta_{ns}$  分别表示光束的束腰和远场发散角, 相应的光束质量因子可表示为<sup>[5, 6, 16]</sup>

$$M_{ns}^2 = \pi W_{ns}(0) \tan\theta_{ns}/\lambda. \quad (16)$$

### 3. 非傍轴高斯光束传输特性的数值分析

设高斯光束的束腰位于  $z$  轴的坐标原点, 光束沿  $z$  轴正方向传播, 且  $z=0$  平面上的光场分布为

$$E_x(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right),$$

$$E_y(x, y, 0) = 0, \quad (17)$$

式中  $\omega_0$  为高斯光源的半宽. 将(17)式代入(3b)式, 得光场的角谱为

$$\begin{aligned} A_0(f_\rho) &= \iint_{-\infty}^{\infty} E_x(x, y, 0) \exp[i2\pi(xf_x + yf_y)] dx dy \\ &= \pi\omega_0^2 \exp(-\pi^2\omega_0^2 f_\rho^2). \end{aligned} \quad (18)$$

将(18)式代入(14)–(16)式, 可求得基于二阶矩定义的非傍轴标量高斯光束的远场发散角、束腰以及  $M^2$  因子随  $\omega_0/\lambda$  的变化规律, 如图1–3中点划线所示; 将(2), (3), (5), (6), (18)式代入(7)式, 并令 PIB = 0.865, 再由(8)–(10)式可求得基于桶中功率定义的非傍轴矢量高斯光束的远场发散

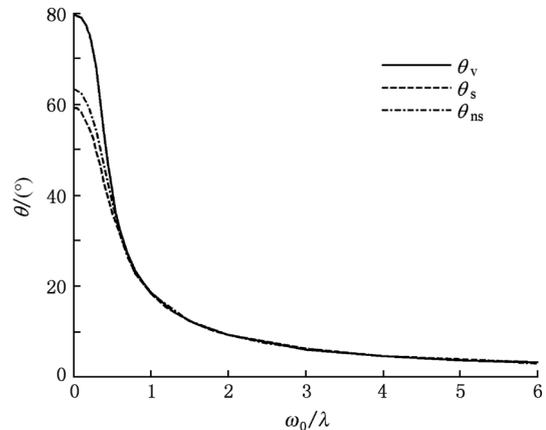


图1 远场发散角  $\theta$  随高斯光源半宽  $\omega_0$  的变化

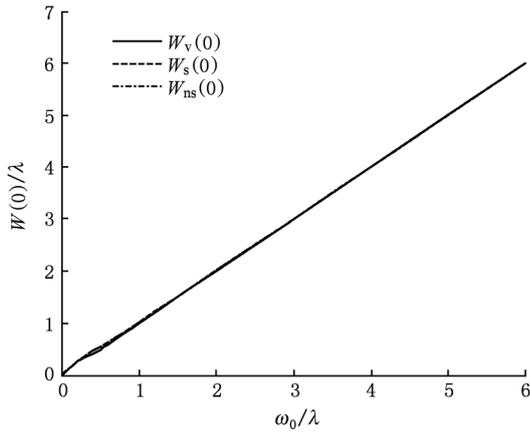


图2 束腰  $W(0)$  随高斯光源半宽  $\omega_0$  的变化

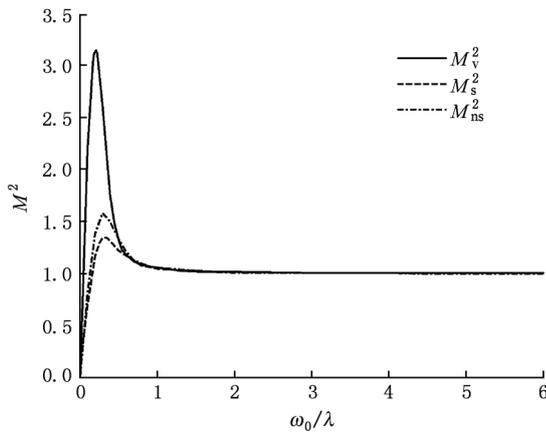


图3  $M^2$  因子随高斯光源半宽  $\omega_0$  的变化

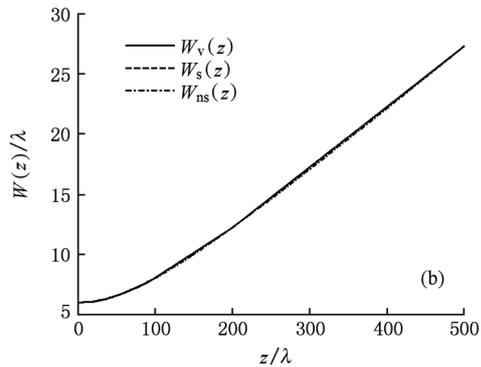
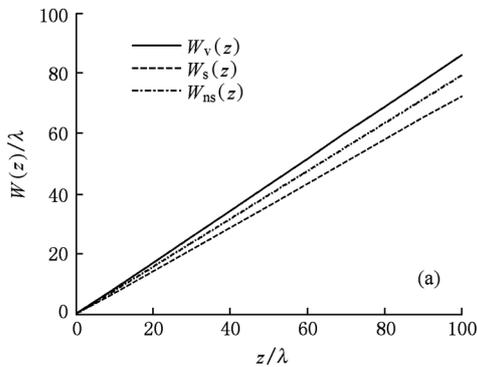


图4 束宽  $W(z)$  随传输距离  $z$  的变化 (a)  $\omega_0 = 0.5\lambda$ ; (b)  $\omega_0 = 6\lambda$

### 4. 结 论

以非傍轴高斯光束在自由空间中的传播为例,对光束不同定义下的束宽、远场发散角和  $M^2$  因子等进行了数值计算和比较分析. 结果表明,当  $\omega_0 > \lambda$  时,三种定义下的光束传输特性基本一致,标量近似是有效的,并随  $\omega_0$  的增大,逐步过渡到傍轴标量

角、束腰以及  $M^2$  因子随  $\omega_0/\lambda$  的变化规律,如图1—3中实线所示;同样可求得基于桶中功率定义的非傍轴标量高斯光束的远场发散角、束腰以及  $M^2$  因子随  $\omega_0/\lambda$  的变化规律,如图1—3中虚线所示.

由图1可知,当  $\omega_0$  大于1个波长时,三种定义的光束远场发散角趋于一致. 当  $\omega_0$  小于1个波长时,三者出现明显的差异. 当  $\omega_0$  趋于零时,非傍轴矢量桶中功率定义的远场发散角趋于  $79.7^\circ$ ,功率密度二阶矩定义的远场发散角趋于  $63.4^\circ$ ,非傍轴标量桶中功率定义的远场发散角趋于  $59.1^\circ$ . 从图2可以看出,三种定义的光束束腰与高斯光源半宽  $\omega_0$  基本一致,仅当  $\omega_0$  小于1个波长时,三者才略有差异. 从图3可以看出,当  $\omega_0$  大于1个波长时,三种定义的  $M^2$  因子都趋于1,即过渡到传统光强二阶矩定义下的基模高斯光束的  $M^2$  因子;当  $\omega_0$  小于1个波长时,三者出现了较大区别.

取  $\omega_0 = 0.5\lambda, 6\lambda$ ,经数值计算,求得矢量、非傍轴标量桶中功率以及功率密度二阶矩定义的光束束宽随传播距离  $z$  的变化曲线,如图4(a),(b)所示. 由图4(a)可以看出,当  $\omega_0 = 0.5\lambda$  时,三种定义下的光束束宽有明显差别. 由图4(b)可知,当  $\omega_0 = 6\lambda$  时,三种定义下的光束束宽基本一致,满足相同的双曲线传播规律.

近似;当  $\omega_0 < \lambda$  时,三种定义下的光束远场发散角存在显著差异,必须考虑光场的矢量特性,应用  $\langle S_z \rangle$  描述光束的传输特性. 另外,当  $\omega_0 < \lambda$  时,三种定义下的  $M^2$  因子都可以小于1,能否合理描述非傍轴光束的质量是值得商榷的问题. 我们认为,非傍轴光束  $M^2$  因子的推广定义仅当光束的标量描述有效时才能合理地描述光束的质量. 基于桶中功率的非傍轴光束传输特性的矢量描述,能更精确、有效

地定义光束的束宽、远场发散角和  $M^2$  因子等光束参量,但其数值模拟耗时极大. 除极端非傍轴光束(光束束腰小于光波波长)外,光束的非傍轴标量描

述是有效的,其理论较为简单,也能节省大量机时. 本文的研究对非傍轴光束的参量表征及其传输特性的研究具有理论与实际上的参考价值.

- [1] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [2] Gao C, Weber H 2000 *Optics & Laser Technology* **32** 221
- [3] Zhou G Q, Fan Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3708
- [4] Porras M A 1994 *Opt. Commun.* **111** 338
- [5] Porras M A 1999 *Optik* **110** 417
- [6] Cao Q, Deng X M, Guo H 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 1345 (in Chinese) [曹清、邓锡铭、郭弘 1996 光学学报 **16** 1345]
- [7] Deng X J, Wu B K, Xiao S 2001 *Acta Opt. Sin.* **21** 1432 (in Chinese) [邓小玖、吴本科、肖苏 2001 光学学报 **21** 1432]
- [8] Kang X P, Lü B D 2005 *Optik* **116** 232
- [9] Zhou G Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4710 (in Chinese) [周国泉 2005 物理学报 **54** 4710]
- [10] Kang X P, He Z, Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4569 (in Chinese) [康小平、何仲、吕百达 2006 物理学报 **55** 4569]
- [11] Deng X J, Wang G A, Liu C X, Lai C W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 8260 (in Chinese) [邓小玖、汪国安、刘彩霞、赖传伟 2009 物理学报 **58** 8260]
- [12] Chen C G, Konkola P T, Ferrera J, Heilmann R K, Schattenburg M L 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 404
- [13] Ciattoni A, Crosignani B, Porto P D 2000 *Opt. Commun.* **177** 9
- [14] Cao Q, Deng X M, Guo H 1996 *Acta Opt. Sin.* **16** 897 (in Chinese) [曹清、邓锡铭、郭弘 1996 光学学报 **16** 897]
- [15] Cao Q, Deng X M 1998 *Opt. Commun.* **151** 212
- [16] Deng X J, Hu J G, Liu C X, Wang J G 2002 *J. Hefe Univ. Tech.* **25** 1187 (in Chinese) [邓小玖、胡继刚、刘彩霞、王建国 2002 合肥工业大学学报 **25** 1187]

## Propagation characteristics of nonparaxial Gaussian beams\*

Deng Xiao-Jiu<sup>†</sup> Niu Guo-Jian Liu Cai-Xia Xiao Su

(Department of Physics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

(Received 24 September 2010; revised manuscript received 24 October 2010)

### Abstract

Based on the rigorous definition of light intensity of nonparaxial vectorial beams in the transverse plane, beam width, far-field divergence angles and  $M^2$  factors are defined by the power in the bucket. Taking nonparaxial vectorial Gaussian beam as an example, the detailed theoretical analyses and numerical calculations about the propagation characteristics are performed, and the results are compared with those from the nonparaxial scalar theory. Showing that when the half width of light source  $\omega_0$  is less than  $\lambda$ , there are obvious differences between the propagation characteristics described by the nonparaxial scalar and the vectorial theory, and their propagation characteristics tend to be consistent with  $\omega_0$  increasing, change to that obtained in the paraxial scalar approximation gradually.

**Keywords:** nonparaxial Gaussian beam, power in the bucket, beam width, divergence angle

**PACS:** 42.25.Bs, 42.60.Jf

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50776084).

<sup>†</sup> E-mail: dengxjls@sina.com