

## 拉盖尔高斯涡旋光束的传输\*

丁攀峰<sup>†</sup> 蒲继雄

(华侨大学信息科学与工程学院, 泉州 362021)

(2010年10月20日收到; 2010年11月17日收到修改稿)

针对拉盖尔高斯涡旋光束, 推导了其传输后目标平面上光电场的解析表达式, 理论研究表明, 传输一段距离后, 对于拉盖尔高斯光束的光斑大小的描述, 高斯光斑尺寸已经不再适用. 如果采用光强最亮处的半径来表示目标平面上的光斑大小则比较方便. 除了传输中的衍射导致光束展宽以外, 横截面上光束的相位分布也发生了独特的变化. 等相位线由原来的射线转化为弧线, 拓扑电荷数为正时, 弧线朝顺时针方向弯曲, 拓扑电荷数为负时, 弧线朝逆时针方向弯曲.

**关键词:** 涡旋光束, 传输, 光斑尺寸, 相位分布

**PACS:** 42.25.Fx, 42.25.Bs, 41.85.-p

## 1. 引言

光学涡旋是一种比较独特的光电场, 其重要性表现在具有特殊的螺旋波前结构和确定的光子轨道角动量. 涡旋光场的这种螺旋型的波前结构对研究涡旋场的产生、相互作用及其传播动力学具有非常重要的意义. 近几年来, 由于具有许多特别的潜在应用价值, 光学涡旋的研究迅速发展起来<sup>[1-4]</sup>, 成为现代光学一个重要分支. 到现在为止, 光学涡旋已经被用在束缚低折射率粒子<sup>[5]</sup>, 用作光镊等. 此外, 光学涡旋由于具有独特的拓扑波前, 光学涡旋具有的整数拓扑荷因子在量子信息传输、量子计算及通信等方面也具有非常重要的潜在应用价值和前景<sup>[6]</sup>. 实验室中产生涡旋光束的方法很多, 目前比较常见且高效的方法是采用空间光调制器或螺旋相位板. 将固体激光器输出的高斯光, 入射到螺旋相位板, 出射的光束就是涡旋光束, 其电场表达式通常用拉盖尔高斯函数表示, 是研究涡旋光束最常用的手段<sup>[7]</sup>. 通常情况下, 大多数研究者默认涡旋光束传输能维持稳定性, 很少对涡旋光束在传输中横截面上光斑展宽以及相位结构进行严格分析, 尤其是对高阶涡旋光束的传输, 本文从衍射理论出发, 对任意阶拉盖尔高斯涡旋光束在传输中的光斑和相位进行理论推导, 在导出解析解的前提下, 分

析传输中拉盖尔高斯涡旋光束的光斑和相位的变化.

## 2. 涡旋光束传输理论分析

拉盖尔高斯涡旋光束是实验室中具有代表性的涡旋光束, 将固体激光器输出的高斯光, 经过螺旋相位板的相位调制, 输出光就是拉盖尔高斯涡旋光束. 其横截面上光电场可以表示为<sup>[8]</sup>

$$E(\boldsymbol{\rho}, z=0) = (\rho/\sigma)^{|m|} \exp\left(\frac{-\rho^2}{\sigma^2}\right) \exp(im\varphi) E_0, \quad (1)$$

$m$  是拓扑电荷数,  $\sigma$  是光斑大小参数, 在传输空间上来看, 拉盖尔高斯涡旋光束的等相位面是螺旋面结构, 从源平面上来看, 相位相等的点为从中心发散的射线. 在空间传输一段后, 观测平面上的电场由衍射积分得到

$$E(\mathbf{r}, z=z_0) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \iint E(\boldsymbol{\rho}, z=0) \times \exp\left\{\frac{ik}{2z}[(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})^2]\right\} d\boldsymbol{\rho}. \quad (2)$$

为了区别, 原平面上点的坐标用  $x', y'$  表示, 观测平面上点的坐标用  $x, y$  表示. 将 (1) 式代入 (2) 式, 可以得到

$$E(x, y, z) = \gamma_0 \iint \exp[-\alpha^2(x'^2 + y'^2)]$$

\* 福建省自然科学基金 (批准号: A0810012) 和国家自然科学基金培育计划项目 (批准号: JB-ZR1126) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: dingpanfeng@163.com

$$- ik(xx' + yy')/z \left( \frac{x' + iy'}{\sigma} \right)^l dx'dy', \quad (3)$$

其中系数

$$\gamma_0 = - ik \exp(ikz) \exp[ ik(x^2 + y^2)/2z ] E_0 / 2\pi z,$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{ik}{2z}.$$

命  $u = x' + \frac{ikx}{2z\alpha^2}, v = y' + \frac{iky}{2z\alpha^2}$ , 采用积分变换(3)式可以转化为复变函数积分

$$E(x, y, z) = \gamma_0 \iint \exp[ -\alpha^2(u^2 + v^2) ] \times \left[ \frac{u + iv + k(y - ix)/2\alpha^2 z}{\sigma} \right]^m du dv, \quad (4)$$

其中参数

$$\gamma_0' = - ik \exp(ikz) E_0 \exp[ ik(x^2 + y^2)/2\sigma^2\alpha^2 z ] / 2\pi z,$$

通过对(4)式进行围道积分, 并利用公式<sup>[9]</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\beta^2 t^2 - iqt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{q^2}{4\beta^2}\right), \quad (\text{Re}(\beta) > 0), \quad (5)$$

可以得到积分的结果

$$E(x, y, z) = -i \left( \frac{k}{2\alpha^2 z} \right)^{m+1} \left( \frac{y - ix}{\sigma} \right)^m \exp(ikz) \times \exp[ ik(x^2 + y^2)/2\sigma^2\alpha^2 z ] E_0. \quad (6)$$

(6)式就是传输一段距离  $z$  后, 拉盖尔高斯涡旋光束横截面上光电场的解析表达式, 可以用来计算任意阶拉盖尔高斯涡旋光束的传输情况. 为了和传输以前源平面上光电场的结果相比较, 我们把(6)式转化为和(1)式相类似的表达式,

$$E(\mathbf{r}, z) = (-i)^{m+1} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^m \left( \frac{r}{\sigma'} \right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma'^2}\right) \times \exp(im\theta) \exp\left[ ikz + i \frac{2z}{k\sigma^2} \frac{r^2}{\sigma'^2} \right] E_0. \quad (7)$$

为了区别, 源平面上点的极坐标采用  $\rho, \varphi$ , 观测平面上点的极坐标则采用  $r, \theta$ . 对于(7)式中参数  $\sigma'^2 = \sigma^2 \left( 1 + \frac{4z^2}{k^2 \sigma^4} \right)$ , 对比(1)式的结果, 可以认为, 参数  $\sigma'$  表征观测平面上高斯光斑的尺寸. 容易发现, 由于衍射的原因, 传输后涡旋光束的光斑尺寸具有一定程度的展宽. 另一方面, 涡旋项依然存在, 其拓扑电荷数依然为  $m$ , 保持不变.

以上的分析是针对涡旋光束的阶数为正得到的结果, 如果  $m$  为负, 采用同样的方法可以得到类似的结果 ( $m < 0$ ),

$$E(\mathbf{r}, z) = (-i)^{m+1} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{|m|} \left( \frac{r}{\sigma'} \right)^{|m|} \times \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma'^2}\right) \exp(-i|m|\theta) \times \exp\left[ ikz + i \frac{2z}{k\sigma^2} \frac{r^2}{\sigma'^2} \right] E_0. \quad (8)$$

(7)式和(8)式就是拉盖尔高斯光束传输后横截面上电场的解析表达式, 包含振幅和相位信息. 可以对传输后拉盖尔高斯涡旋光束的光斑尺寸以及横截面上的相位结构进行计算分析. 传输后, 振幅的变化对应光强分布的变化, 即光斑的展宽; 相位的变化体现在相位结构的转变, 以下就从这两个方面进行分析.

### 3. 涡旋光束的展宽

由前面的分析可知, 经过传输后, 观测平面上涡旋光束的等效光斑尺寸可以用  $\sigma'$  表达, 然而, 由于涡旋光束中心为暗核, 并非亮斑, 从中心向外电场首先增强然后减弱. 采用传统的光斑半径不方便描述, 如果将横截面上最亮圆周的半径定义为光斑半径, 则比较符合人们的观测习惯. 由(7)式可得, 与光束的高斯参数  $\sigma'$  不一致, 在新的定义下光斑尺寸为

$$r_b = \sqrt{\frac{|m|}{2}} \sigma', \quad (9)$$

大多数研究者在做涡旋光束传输试验的时候, 经常发现高阶涡旋光束展宽比低阶快, (9)式表明: 光斑随着传播距离增加展宽, 且展宽比例与拓扑电荷数的模的平方根成正比. 图1针对不同拓扑电荷数的情况, 给出了数值计算的结果. 在计算中波长取 632.8 nm, 源平面光斑尺寸  $\sigma$  取值为 0.5 mm 传输距离为 1 m.

图1中图(b)和(d)分别是拓扑电荷数为1和5的涡旋光束传输后的展宽结果. 容易看出, 在拓扑电荷数较大的情况下, 光斑的展宽要明显得多.

### 4. 涡旋光束的相位结构

从(7)式可以看出, 虽然涡旋光束传输后拓扑电荷数没有改变, 但横截面上的相位结构发生了一定的变化, (7)式中最后的指数函数表明, 相位中的第一项是传输项, 第二项则体现了传输后横截面上相位结构的具体改变情况. 我们知道, 在源平面上

光电场的等相位线是从中心出发沿着半径方向的射线,所有的等相位线环绕一周,相位差刚好为是  $2\pi$  的  $m$  倍. 然而传输一段距离  $z_0$  后,观测平面上

的等相位线则由以下极坐标参数方程决定:

$$m\theta + \frac{2z_0}{k^2\sigma^4 + 4z_0^2}r^2 = C, \quad (10)$$

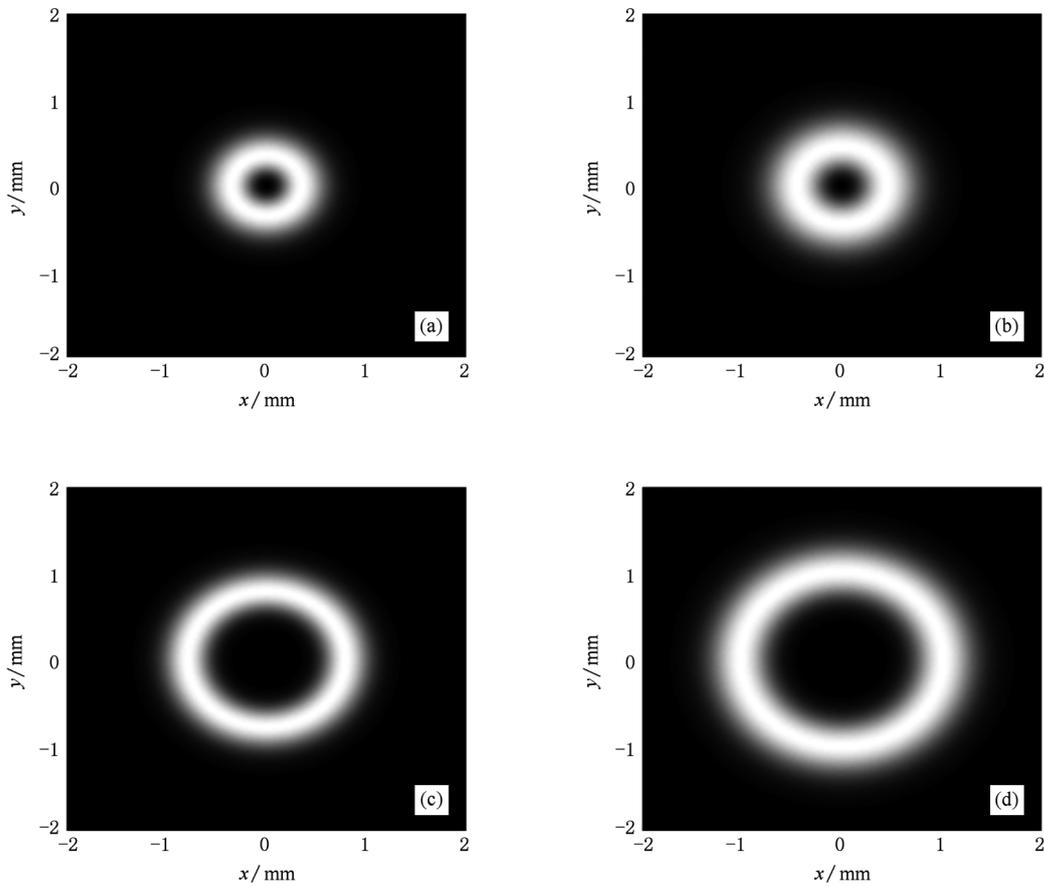


图1 涡旋光束传输前后光强分布 (a)  $m=1, z=0$ ; (b)  $m=1, z=1$  m; (c)  $m=5, z=0$ ; (d)  $m=5, z=1$  m

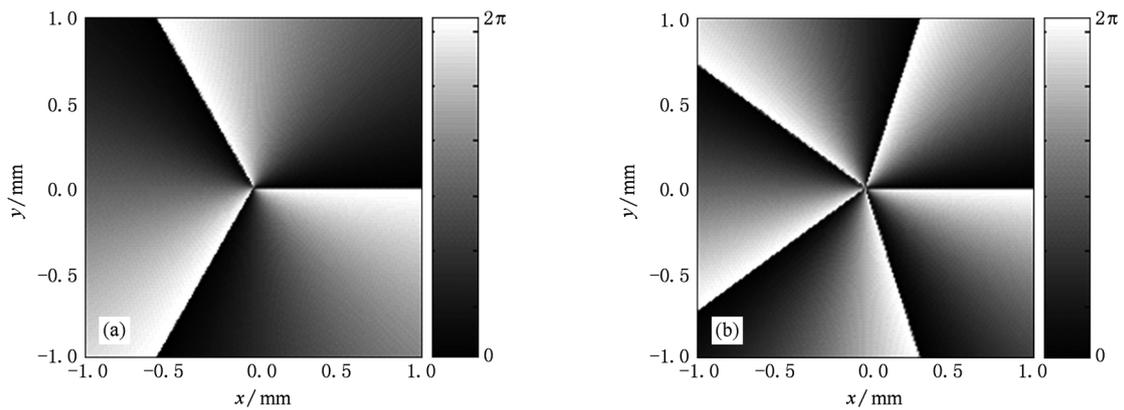


图2 源平面上场点的相位分布 (a)  $m=3$ ; (b)  $m=5$

其中参数  $C$  为常数. 为了具体的表明传输后观测平面上涡旋光束的等相位线结构,我们进行了数值模拟. 在计算中波长取  $632.8$  nm, 源平面光斑尺寸  $\sigma$

取值为  $0.5$  mm 传输距离为  $1$  m, 图2给出了源平面上场点的相位分布,图3给出了拓扑电荷数分别为  $3$  和  $5$  的情况下观测平面上场点的相位分布.

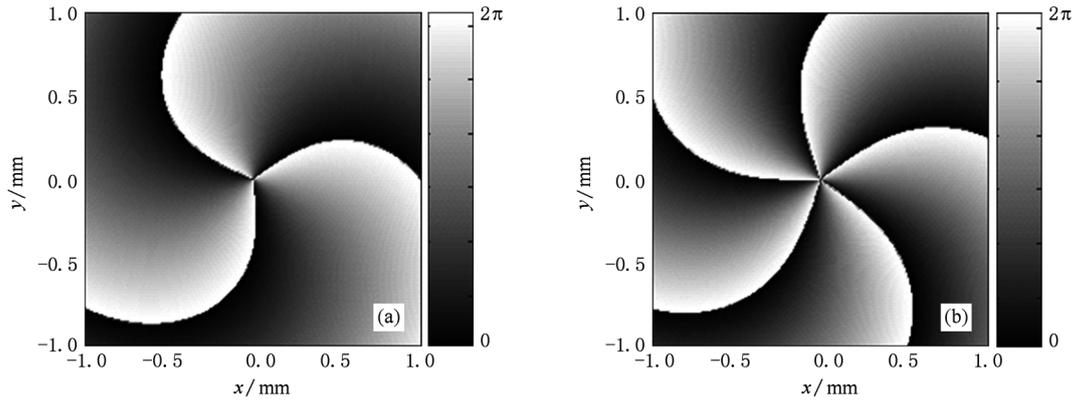


图3 传输 1 m 后观测平面上场点的相位分布 (a)  $m=3$ ; (b)  $m=5$

不论拓扑电荷数的取值如何,源平面上场点的等相位线都是从坐标原点出发的射线,等相位线在横截面上的周期数与拓扑电荷数相同.传输一段距离后,等相位线转变为弧线,保持中心对称的特点,形状像花瓣,花瓣数仍然与拓扑电荷数相同.图3 两

种情况的拓扑电荷数为正数,等相位线的弯曲方向都朝向顺时针环绕的方向.考虑到涡旋光束的拓扑电荷数为负数的情况,我们在相同的前提下,计算了传输 1 m 处,拓扑电荷数分别为  $-3$ ,  $-5$  的涡旋光束的相位分布,如图 4 所示.

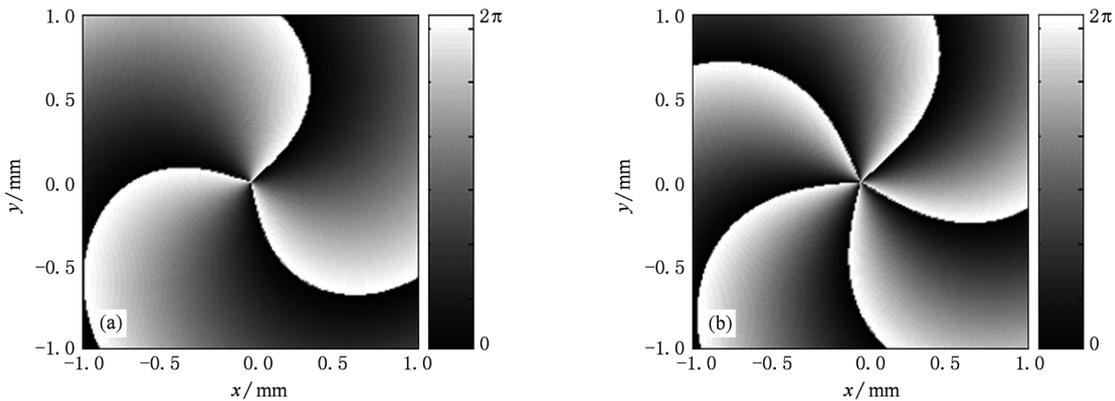


图4 传输 1 m 后观测平面上场点的相位分布 (a)  $m=-3$ ; (b)  $m=-5$

图 4 与图 3 成镜像对称的关系,在拓扑电荷数为负时,观测平面上等相位线的弯曲方向朝向逆时针环绕的方向.

### 5. 结 论

由以上的理论分析以及数值计算可知,拉盖尔高斯涡旋光束传输后,光斑的尺寸不适合采用高斯光斑尺寸来进行定义,可以考虑采用光

强最亮所在圆的半径来表征光斑尺寸,在该定义下,涡旋光束传输后的展宽量与拓扑电荷数的平方根成正比.此外,传输后涡旋光束的相位分布也发生了变化,横截面上的等相位线由原来的射线变为弧线,在拓扑电荷数为正的时候,弧线朝顺时针方向弯曲,在拓扑电荷数为负的时候,弧线朝逆时针方向弯曲,弯曲方向携带拓扑电荷数符号的信息.这些结论对深入利用涡旋光束具有指导作用.

- [1] Babiker M, Bennett C R, Andrews D L, Davila Romero L C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 143601
- [2] Rao L Z, Pu J X 2007 *J. Opt. Soc. Am. A* **24** 2242
- [3] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R J C, Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [4] Chen K, Zhang H Y, Lü B D 2010 *Chin. Phys. B* **59** 246
- [5] Gahagan K T, Swartzlander Jr G A 1998 *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 524
- [6] Lu X H, Huang H Q, Zhao C L, Wang J F, Chen H 2008 *Laser & Optoelectronics Progress* **45** 50 (in Chinese) [陆璇辉、黄慧琴、赵承良、王将峰、陈和 2008 激光与光电子学进展 **45** 50]
- [7] Li Y Y, Chen Z Y, Liu H, Pu J X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1743 (in Chinese) [李阳月、陈子阳、刘辉、蒲继雄 2010 物理学报 **59** 1734]
- [8] Zhang W, Kuzyk Mark G 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 101103
- [9] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press) p289

## Propagation of Laguerre-Gaussian vortex beam\*

Ding Pan-Feng<sup>†</sup> Pu Ji-Xiong

(College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Quanzhou 362021, China)

(Received 30 October 2010; revised manuscript received 17 November 2010)

### Abstract

For Laguerre Gaussian vortex beam, the analytical expression of the electric field is derived in the observation plane after propagation. Theoretical analysis shows that the definition of Gaussian beam is unsuitable to describing the size of the laguerre Gaussian vortex beam while propagation. It is more convenient that the radius of the point where intensity is maximum is used to define the vortex beam after propagation. Besides the beam broadening effect induced by diffraction, phase distribution exhibits special change in the observation plane. Isophase line changes from radial to arc. If the topological charge of the vortex beam is positive, the isophase line will bend clockwise after propagation; if the topological charge of the vortex beam is negative, the isophase line will bend anticlockwise.

**Keywords:** vortex beam, propagation, size of beam, phase distribution

**PACS:** 42.25.Fx, 42.25.Bs, 41.85.-p

\* Project supported by the National Science Foundation of Fujian Province (Grant No. A0810012) and the National Nutritious Science Foundation of China (Grant No. JB-ZR1126).

<sup>†</sup> E-mail: dingpanfeng@163.com