

截断部分相干厄米-高斯光束的广义 M_G^2 因子*李晓庆 季小玲[†]

(四川师范大学物理学院, 成都 610068)

(2010年10月29日收到; 2010年11月23日收到修改稿)

基于广义截断二阶矩法, 推导出了截断部分相干厄米-高斯(H-G)光束的广义 M_G^2 因子的解析表达式. 截断完全相干 H-G 光束、截断高斯谢尔模型(GSM)光束以及截断高斯光束可以做为本文结果的特例给出. 研究表明: 截断部分相干 H-G 光束的广义 M_G^2 因子与截断参数 δ , 模阶数 m 以及相干参数 α 有关. 当 δ 非常小时, M_G^2 因子出现奇偶分群现象, 即 m 为奇数的 M_G^2 因子互相非常接近, m 为偶数的 M_G^2 因子互相非常接近, 但当 δ 增大时这种现象逐渐消失. 对于截断 GSM 光束, 任意具有不同 δ 值的 M_G^2 因子随 α 变化的两曲线之间一定存在交叉现象. 但是, 对于截断部分相干 H-G 光束的 M_G^2 因子, 则不一定会发生这种交叉现象. 此外, m 越大, M_G^2 因子受参数 δ 的影响越大, 可以忽略光阑效应的 δ 也越大.

关键词: 截断部分相干厄米高斯光束, 广义 M_G^2 因子, 广义截断二阶矩法

PACS: 42.55.-f, 42.68.Ay

1. 引言

光束传输因子(即 M^2 因子)是一个表征不同光束的光束质量很有用的参数^[1-3], 国际标准化度量局在多次会议上也建议用其作为光束质量的统一标准. 然而, Siegman^[1]提出的一般的 M^2 因子在计算截断光束时出现积分发散困难. 因此, Martinez - Herrero 等^[4,5]又进一步对 M^2 因子概念进行了推广, 即采用广义截断二阶矩定义的 M_G^2 因子. 文献[6-9]分别研究了截断拉盖尔高斯光束, 截断平顶光束和截断双曲余弦高斯光束的广义 M_G^2 因子, 但文献[6,7]为得到广义截断二阶矩的解析式采用了复高斯近似^[10], 而文献[8,9]是直接采用积分计算. 2002年, 楚等人借鉴 Gori 等人处理无截断部分相干光束 M^2 因子时的方法, 将广义 M_G^2 因子推广到了截断部分相干光束^[11-13]. 最近, 文献[14-16]分别对截断部分相干余弦和双曲余弦高斯光束、洛伦兹高斯光束和空心光束的广义 M_G^2 因子做了研究, 但文献[15,16]在得到广义截断二阶矩的解析式时也采用了复高斯近似. 实验表明, 只要满足积分角谱范围包含光束总能量的 75% 以上, 广义截断二阶

矩法是“正确”的, 并且完全相干光和部分相干光均适用^[17].

在实际应用中, 高阶模激光具有高的转换效率, 许多大功率激光器输出的激光也是多模结构, 且具有部分相干性. 理论上, 可采用厄米多项式和拉盖尔多项式分别描述直角坐标系(CO₂激光)和柱坐标系(HeNe激光)中的高阶模激光, 文献[18, 19]对非截断的 H-G 光束的远场特性和 M^2 因子矩阵进行了研究. 另外, 在实际工作中, 激光束或多或少的会受到激光元件有限尺寸的限制. 因此, 对截断部分相干高阶模光束的光束质量进行研究是十分必要. 迄今为止, 还未见对截断部分相干和完全相干厄米-高斯(H-G)光束的 M_G^2 因子的报道. 本文采用数学技巧, 推导出了截断部分相干 H-G 光束的广义 M_G^2 因子的解析表达式, 截断完全相干 H-G 光束、截断高斯谢尔模型(GSM)光束以及截断高斯光束的可以做为本文结果的特例给出. 此外, 本文通过数值计算得到了一些有意义的新结果, 并对主要结果给予了合理的物理解释.

2. 广义 M_G^2 因子

直角坐标系中一束部分相干 H-G 高斯光束在 z

* 国家自然科学基金(批准号:60778048), 科学院大气成分与光学重点实验室开放课题基金(批准号:JJ-10-08)和四川师范大学科研基金(批准号:10DXL01)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jixl100@163.com

=0 平面的交叉谱密度可以表示为

$$W(x'_1, x'_2, z=0) = H_m\left(\frac{\sqrt{2}x'_1}{w_0}\right)H_m\left(\frac{\sqrt{2}x'_2}{w_0}\right) \times \exp\left\{-\frac{x'^2_1 + x'^2_2}{w_0^2} - \frac{(x'_1 - x'_2)^2}{2\sigma_0^2}\right\}, \quad (1)$$

其中 w_0 为束腰宽度, σ_0 为相干长度, H_m 为 m 阶厄米多项式. 假设由(1)式表征的部分相干 H-G 光束通过半宽度为 a 的硬边光阑. 为简单起见, 令空间一阶矩 $\langle x \rangle$ 和空间频域一阶矩 $\langle p \rangle$ 都为零 (这可以通过坐标轴移动实现). 截断部分相干光束的广义二阶矩定义为^[11-13]

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{I_0} \int_{-a}^a x^2 W(x, x) dx, \quad (2)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{k^2 I_0} \int_{-a}^a \frac{\partial^2 W(x'_1, x'_2)}{\partial x'_1 \partial x'_2} \Big|_{x'_1=x'_2=x} dx + \frac{4}{k^2 I_0 a} [W(a, a) + W(-a, -a)], \quad (3)$$

$$\langle xp \rangle = \frac{1}{2ikI_0} \int_{-a}^a \left[x'_1 \frac{\partial^2 W(x'_1, x'_2)}{\partial x'_2} \Big|_{x'_1=x'_2=x} - x'_2 \frac{\partial^2 W(x'_1, x'_2)}{\partial x'_1} \Big|_{x'_1=x'_2=x} \right] dx, \quad (4)$$

其中, $I_0 = \int_{-a}^a W(x, x, z=0) dx$ 为入射进光孔的总能量, k 为波数.

因为(2)–(4)式为有限积分, 为了得到解析式, 可将厄米多项式和指数函数展开成幂级数形式

$$H_m(x) = m! \sum_{n=0}^{[m/2]} (-1)^n \frac{1}{n!(m-2n)!} (2x)^{m-2n}, \quad (5)$$

$$M_G^2 = \frac{4}{F_m^2} \sqrt{\left[\sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_m}{m+r-i-j+3/2} \right] \left[\frac{\delta^2 F_m}{4\alpha^2} + \delta^2 R + \frac{2}{(m!)^2} H_m^2(\sqrt{2}\delta) \exp(-2\delta^2) \right]}. \quad (14)$$

上式是本文得到主要解析结果. 由上式可知, 截断部分相干 H-G 光束的广义 M_G^2 因子只与模阶数 m , 截断参数 δ 以及相干参数 α 有关. (14)式表明 M_G^2 是随着 α 的增

其中

$$M_G^2 |_{\text{GSM}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{2}\delta)} \sqrt{\frac{F'}{\delta} \left[\frac{\delta}{\alpha^2} \sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{2}\delta) + \delta F' + 8\sqrt{2} \exp(-2\delta^2) \right]}, \quad (15)$$

$$F' = \sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{2}\delta) - 2\sqrt{2}\delta \exp(-2\delta^2). \quad (16)$$

$$\exp(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}. \quad (6)$$

将(1)式代入(2)–(4)式并利用(5), (6)式, 经过复杂的计算得到了截断部分相干 H-G 光束的空间和空间频率域的广义二阶矩以及交叉矩

$$\langle x^2 \rangle = \alpha^2 \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_m}{m+r-i-j+3/2} / F_m, \quad (7)$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\delta^2}{k^2 \alpha^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4R}{F_m} \right] + \frac{8}{k^2 \alpha^2 (m!)^2 F_m} \times H_m^2(\sqrt{2}\delta) \exp(-2\delta^2), \quad (8)$$

$$\langle xp \rangle = 0, \quad (9)$$

其中

$$C_m = \frac{(-1)^{i+j+r} 2^{3m+r-3i-3j} \delta^{2(m+r-i-j)}}{i!j!r!(m-2i)!(m-2j)!}, \quad (10)$$

$$F_m = \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_m}{m+r-i-j+1/2}, \quad (11)$$

$$R = \delta^2 \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C_m}{m+r-i-j+3/2} + 2F_{m-1} - \sum_{i=0}^{[(m-1)/2]} \sum_{j=0}^{[m/2]} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(m-2i)C_m}{m+r-i-j+1/2}. \quad (12)$$

将(11)式 F_m 中的 m 用 $(m-1)$ 代替即为 F_{m-1} ; 且截断参数 $\delta = a/w_0$, 相干参数 $\alpha = \sigma_0/w_0$. 与无截断类似, 可用任意位置处截断光束的二阶矩定义截断光束的广义 M_G^2 因子^[5]

$$M_G^2 = 2k \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle - \langle xp \rangle}. \quad (13)$$

将(7)–(12)式代入(13)式, 得到部分相干 H-G 光束通过光阑后的广义 M_G^2 因子

大而减小的. 从(14)式可以得到几个有意义的特例.

1) 当 $m=0$ 时, (14)式简化为截断 GSM 光束的 M_G^2 因子

上式中 $\text{erf}(\cdot)$ 为误差函数, (15) 式与文献 [12] 中 (49) 式一致.

2) 当 $\delta \rightarrow \infty$ 时, (14) 式简化为无截断部分相干 H-G 光束的 M^2 因子.

$$M^2 = \sqrt{(1 + 2m) \left(1 + 2m + \frac{1}{\alpha^2}\right)}. \quad (17)$$

此外, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, (14) 式简化为截断完全相干 H-G 光束的 M_C^2 因子; 当 $m = 0, \alpha \rightarrow \infty$ 时, (14) 式简化为截断高斯光束的 M_C^2 因子. 限于篇幅, 在此均省略.

3. 数值计算及分析

图 1(a) 和 (b) 分别为不同模阶数 m 和不同相干参数 α 的部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子随截断参数 δ 的变化. 图 1 中虚线表示无截断光束的情况. 图 1(a) 表明, 随着 δ 的增大, M_C^2 因子逐渐接近无光阑的 M^2 因子的值; 并且 m 越大, 可以忽略光阑效应的 δ 越大. 其次, 随着 δ 的增大, M_C^2 是增大还是减小与模参数 m 有关: 当 $m = 0$ (截断 GSM 光束) 时, 随着 δ 的增大, M_C^2 因子减小; 当 $m = 3, 4, 7$ (截断部

分相干 H-G 光束) 时, 随着 δ 的增大, M_C^2 因子先减小, 再振荡着增大. 由图 1(a) 还可知当 δ 非常小 ($\delta \leq 0.02$) 时, 模阶数 m 为奇数的曲线互相非常接近, 偶数的曲线互相非常接近, 也就是出现奇偶分群现象, 且奇数群的 M_C^2 因子大于偶数群的. 这是因为: 在 $z = 0$ 平面, 模阶数 m 为奇数的部分相干 H-G 光束的光强分布在光轴附近是凹的, 而 m 为偶数时则为凸的. 但是, 当 δ 增大时这种奇偶分群现象逐渐消失. 这是因为当 δ 较大时光阑内包含了较大范围的光, 从而淡化了因 m 的奇偶性造成的在光轴附近光强分布凹凸不同的特点.

图 1(b) 表明当 δ 较小 ($\delta < 1$) 时, $\alpha = 0.5, 1, \infty$ 三条曲线互相非常接近, 几乎不能分辨; 而当 δ 较大时, 不同 α 的截断光束的 M_C^2 因子分开. 这说明当 δ 较小且光束有较好的相干性时, 光束的相干度变化不会明显影响截断光束的 M_C^2 因子. 另一方面, 当 $\alpha = 0.1$ 时, 随着 δ 的增大, 相对于其他三条曲线, M_C^2 因子明显更快增大; 这表明对于相干性较差的光束, δ 的大小变化对截断光束的 M_C^2 因子有着非常明显的影响.

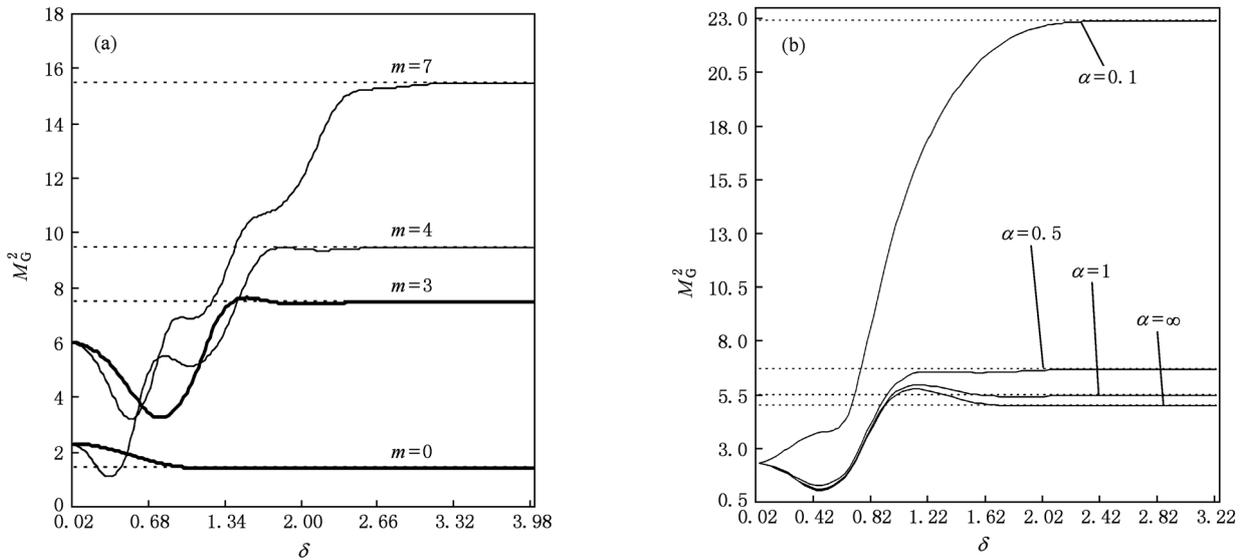


图 1 部分相干 H-G 光束 M_C^2 因子随截断参数 δ 的变化 (a) $\alpha = 1$; (b) $m = 2$

图 2(a) 和 (b) 分别为模阶数 $m = 0$ (即 GSM 光束) 和 $m = 2$ 时截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子随相干参数 α 的变化. 图 2(a) 和 (b) 表明随着 α 的增大, M_C^2 减小, 即相干性越好的截断光束的光束传输因子越低, 并由此可知截断完全相干光较截断部分相干光光束传输因子低. 图 2(a) 还表明对于 GSM 光束, 任意不同 δ 值的 M_C^2 因子随 α 变化的两条曲线之间

一定存在交叉现象, 也就是: 当 α 较小时, M_C^2 随 δ 增大而增大, 即对于相干性较差的情况, 截断参数 δ 越大, 截断 GSM 光束传输因子越高; 而当 α 较大时, M_C^2 随 δ 增大而减小, 即对于相干性较好的情况, 截断参数 δ 越大, 截断 GSM 光束传输因子越低. 这也表明 M_C^2 因子随 δ 的增大还是减小还与相干参数 α 有关. 但是, 对于截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子, 则不

一定会发生这种反转现象,如图 2(b),无论 α 大小, $\delta = 1$ 时 M_C^2 因子总比 $\delta = 0.8$ 时的大,两条曲线不会交叉. 对于截断 GSM 光束,影响 M_C^2 因子的物理因素有两个,即截断参数 δ 和相干参数 α . 我们知道: δ 增大,光阑衍射效应减弱, δ 对截断 GSM 光束 M_C^2 因子影响减弱. 此时,另一参数 α 对截断 GSM 光束 M_C^2 因子的影响就相对增大. 因此, δ 越大的 M_C^2 因子随 α 减小得越快,而 δ 越小的 M_C^2 因子随 α 减小得越慢,这就造成了不同 δ 的 M_C^2 因子随 α 的变化曲线在某

处必然出现交叉现象(见图 2(a)). 与截断 GSM 光束不同,影响截断部分相干 H-G 光束 M_C^2 因子的物理因素有三个,即截断参数 δ 、相干参数 α 和模阶数 m . 模阶数 m 越大,光场分布范围越大. 由于高阶模光场分布范围大,使得截断参数 δ 对 M_C^2 因子的影响增大. 因此,相干参数 α 对截断部分相干 H-G 光束 M_C^2 因子的影响比截断 GSM 光束 M_C^2 因子的小,这就导致不同 δ 的截断 H-G 光束 M_C^2 因子随 α 的变化曲线不一定出现交叉现象(见图 2(b)).

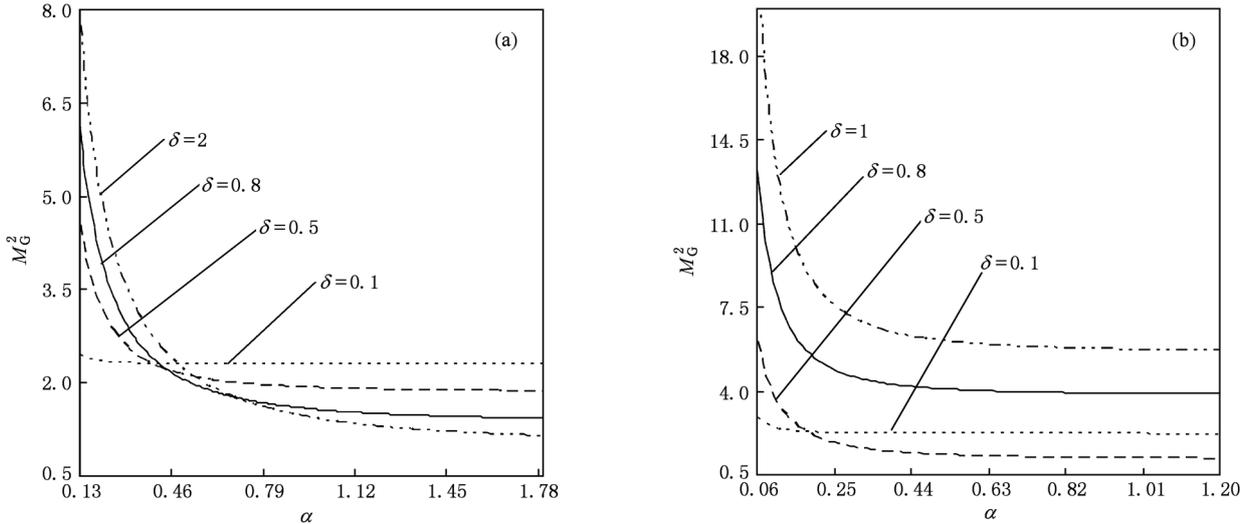


图 2 截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子随截断参数 δ 的变化 (a) $m=0$; (b) $m=2$

图 3 为部分相干 H-G 光束 M_C^2 因子随模阶数 m 的变化. 图 3 表明,随着 m 的增大, M_C^2 因子出现小幅度的振荡(这也与部分相干 H-G 光束的光强因为

m 的奇偶性不同而在光轴附近出现凹凸不一致有关),但是整体趋势是增大的. 同时,随着 m 的增大,不同 δ 的 M_C^2 因子之间差距也不断增大. 这表明,模阶数 m 越大,截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子越大,并且更容易受到 δ 的影响. 因为 m 越大,光阑衍射效应越强烈,使得 δ 对截断光束的光束传输因子影响越大. 这也是为什么 m 越大,可以忽略光阑效应的 δ 越大的物理原因.

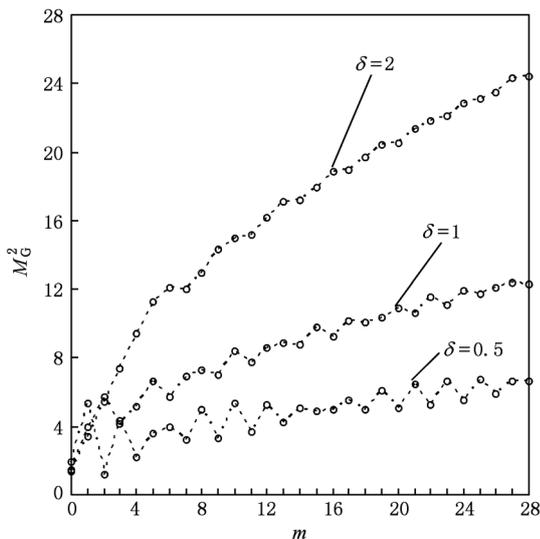


图 3 $\alpha = 1$ 时部分相干 H-G 光束 M_C^2 随模阶数 m 的变化

4. 结 论

本文利用广义截断二阶矩法,推导出了截断部分相干 H-G 光束的广义 M_C^2 因子的解析表达式. 截断完全相干 H-G 光束、截断 GSM 光束以及截断高斯光束可以作为本文结果的特例给出. 研究表明:截断部分相干 H-G 光束的广义 M_C^2 因子与截断参数 δ 、模阶数 m 以及相干参数 α 有关. 随着 δ 的增大, M_C^2 因子逐渐接近无截断时的 M^2 因子的值,并且 m 越大,可以忽略光阑效应的 δ 越大. 当 δ 非常小时,

截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子出现奇偶分群现象,即模阶数 m 为奇数的曲线互相非常接近,偶数的曲线互相非常接近,但当 δ 增大时这种现象消失. 对于截断 GSM 光束,任意具有不同 δ 值的 M_C^2 因子随 α 变化的两曲线之间一定存在交叉现象,但是,对于截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子,则不一定

会发生这种交叉现象. m 越大的截断部分相干 H-G 光束的 M_C^2 因子受 δ 参数的影响越大. 此外,当 δ 较小且光束相干性较好时,光束的相干度变化不会明显改变截断光束的 M_C^2 因子. 本文所得结果对实际受硬边截断的部分相干高阶模激光光束质量的评价具有意义.

- [1] Siegman A E 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [2] Johnston T F 1990 *Jr. Laser Focus World* **26** 173
- [3] Sasnett M W 1989 *Propagation of multimode laser beams—the M^2 factor* (New York) p132
- [4] Martinez-Herrero R, Mejias P M 1993 *Opt. Lett.* **18** 1669
- [5] Martinez-Herrero R, Mejias P M, Arias M 1995 *Opt. Lett.* **20** 124
- [6] Mei Z R, Zhao D M 2004 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **6** 1005
- [7] Mei Z R, Zhao D M 2005 *Appl. Opt.* **44** 1381
- [8] Zeng Q G, Wen Q, Zhang B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1357 (in Chinese) [曾庆刚、文 侨、张 彬 2004 物理学报 **53** 1357]
- [9] Lü B D, Luo S R 2000 *Opt. Common.* **178** 275
- [10] Wen J J, Breazeal M A 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 1752
- [11] Chu X L, Zhang B, Wang G Q 2002 *Acta Opt. Sin.* **22** 1051 (in Chinese) [楚晓亮、张 彬 2002 光学学报 **22** 1051]
- [12] Zhang B, Chu X L, Wen Q 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1370
- [13] Chu X L, Zhang B, Wen Q 2003 *Appl. Opt.* **42** 4280
- [14] Zhou G Q 2010 *Opt. Laser Technol.* **42** 489
- [15] Zhou G Q 2010 *J. Opt.* **12** 015701
- [16] Lu Z D, Jiang H L, Du X Y, Zhao D M 2008 *J. Mod. Opt.* **55** 2381
- [17] Zhang Y, Guo X, Li K, Wen Q, Zhang B, Cai B W 2006 *Acta Opt. Sin.* **26** 1057 (in Chinese) [张 艳、郭 欣、李 琨、文 侨、张 彬、蔡邦维 2006 光学学报 **26** 1057]
- [18] Zhou G Q, Chen L, Chu X X 2007 *Chin. Phys.* **16** 2709
- [19] Li W, Feng G Y, Huang Y, Li G, Yang H M, Xie X D, Chen J G, Zhou S H 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2461 [李 玮、冯国英、黄 宇、李 刚、杨火木、谢旭东、陈建国、周寿桓 2009 物理学报 **58** 2461]

Generalized M_G^2 factor of truncated partially coherent Hermite-Gaussian beam*

Li Xiao-Qing Ji Xiao-Ling[†]

(Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

(Received 29 October 2010; revised manuscript received 23 November 2010)

Abstract

Based on the method of generalized truncated second-order moment, the analytical formula of the generalized beam propagation factor (M_G^2 factor) of truncated partially coherent Hermite-Gaussian (H-G) beams is derived. The analytical results obtained from truncated fully coherent H-G beam, truncated Gaussian Shell Model (GSM) beam and truncated Gaussian beam are given as particular examples in this paper. It is shown that the M_G^2 factor of truncated partially coherent H-G beam depends on truncated parameter δ , beam order m , and beam coherence parameter α . When the value of δ is very small, the odd-even groups happen to the M_G^2 factor, i. e., the values of M_G^2 factor with different values of the odd m are nearly the same, and so are they for the even m case. However, this phenomenon disappears as δ increases. For the truncated GSM beams with different values of δ , there exist the cross points between the curves of the M_G^2 factor versus α . However, this phenomenon may disappear for truncated partially coherent H-G beams. In addition, the larger the m is, the more the M_G^2 factor is affected by the δ , and the effect of aperture on M_G^2 factor may be neglected when the δ is larger.

Keywords: truncated partially coherent Hermite-Gaussian beam, generalized M_G^2 factor, generalized truncated second-order moments

PACS: 42.55.-f, 42.68.Ay

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60778048), the Open Research Foundation of Key Laboratory of Atmospheric Composition and Optical Radiation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. JJ-10-08) and the Research Foundation of Sichuan Normal University (Grant No. 10DXL01).

[†] Corresponding author. E-mail: jixl100@163.com