

超流 Fermi 气体在非简谐势阱中的集体激发*

鱼自发 吴建鹏 王鹏程 张娇娇 唐荣安 薛具奎†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 甘肃省原子分子物理与功能材料重点实验室, 兰州 730070)

(2011年3月19日收到; 2011年4月2日收到修改稿)

研究了非谐振势中超流 Fermi 气体的集体激发. 基于一维超流流体动力学模型, 采用变分法获得了体系从分子 Bose-Einstein 凝聚端过渡到 Cooper 对凝聚端时系统的两个低能激发模, 即偶极模和呼吸模. 分析发现: 在整个跨越区偶极模和呼吸模都发生了频移现象, 且在 BCS 端频移更加显著. 进一步研究发现在不同驱动振幅激发下超流 Fermi 气体质量中心和宽度变化呈现出了复杂动力学特性, 由于非谐振势的贡献, 超流 Fermi 气体两低能模发生耦合, 使宽度变化产生量子拍频现象, 且拍频频率随着驱动振幅的增加而增大. 这种非线性耦合对外部驱动响应在么正区尤其显著.

关键词: 超流 Fermi 气体, 非谐振势, 集体激发

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Lm, 03.75.Ss

1 引言

Feshbach 共振技术^[1,2]为强相互作用的冷原子 Fermi 气体的研究提供了一个独特的平台, 并使得超流 Fermi 气体^[3,4]的研究成为了一个备受关注的焦点. 近年来, 随着 Feshbach 共振技术在实验室中的日趋成熟, 通过对像磁场强度和原子间相互作用等重要物理参数的控制和调节^[5-8]使得 Fermi 原子 Cooper 对凝聚体 (BCS) 和分子 Bose-Einstein 凝聚 (BEC) 跨越区之间的可控转变^[9]在磁势阱中得以实现. 在理论方面, 对诸如 Bloch 振荡^[10]、超流-绝缘体相变^[11,12]、集体激发^[13-18]、原子对的能隙^[19]等方面的大量研究也取得了一系列重要进展.

对外部振荡场的响应是相互作用的量子多体系统最重要的特征之一, 低频响应的集体振荡模是探测相互作用和检验理论模型的有效工具, 对集体激发的研究也是认识凝聚体动力学性质的一项重要内容. 到目前为止, 囚禁在势阱中的超流 Fermi 气体集体激发的理论研究大多只局限于简谐势阱中. 实际上, 囚禁的磁势阱并不是纯粹的二次方势, 而往往是非谐振的^[20,21], 即存在四次方项的贡献. 为此, 本文考虑了二次方加四次方的非谐振势, 采用标准的变分法获得了超流 Fermi 气体在非谐振势

阱中的两低能集体振荡激发模, 进一步讨论了在小振幅驱动下凝聚体质量中心和宽度的动力学特性对外部驱动响应, 详细分析了当系统从分子 BEC 端过渡到 BCS 端时, 系统集体激发及其动力学特性的变化.

2 物理模型

对于囚禁的磁势阱, 实验大多是柱对称的情形, 当横向的囚禁频率 ω_{\perp} 远大于轴向囚禁频率 ω_x 时, 在与超流 Fermi 气体轴向垂直的平面上, 凝聚体的运动被冻结, 可用其基态分布 $\phi_0(r)$ 来近似, 不失一般性可取 $\phi_0(r) = 1/(\sqrt{\pi}\omega_{\perp}) \exp(-r^2/2\omega_{\perp}^2)$, 则在 x 方向超流 Fermi 气体表现为棒状分布, 此时 Fermi 气体可看成是准一维的. 将数目相等的具有不同自旋态的 ^{87}Rb 超流 Fermi 气体原子装载到沿 x 方向的一维非简谐势阱中, 如果囚禁的原子数足够多, 在零温下, 体系从分子 BEC 超流体过渡到 BCS 超流体的过程可以用流体动力学模型来描述^[11-18,22,23], 即一维无量纲非线性 Schrödinger 方程 (将横向空间积分后):

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) + g |\psi(x, t)|^{2\gamma} \psi(x, t), \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10774120, 10975114)、甘肃省自然科学基金 (批准号: 1010RJZA012) 和西北师范大学科技创新工程基金 (批准号: NWNNU-KJCXGC-03-48).

† E-mail: xuejk@nwnu.edu.cn

其中 $\psi(x, t)$ 是描述超流 Fermi 气体的序参数, $M = 2m$, m 是单个原子的质量, $V(x) = 1/2(x^2 + \lambda x^4)$ 是囚禁 Fermi 气体的二次方加四次方势. 方程 (1) 所采用的无量纲化形式为 $\psi \sim l_x^{-1/2} \tilde{\psi}$, $t \sim \omega_x^{-1} \tilde{t}$, $x \sim l_x \tilde{x}$.

$$g = \frac{UN^\gamma}{(2\gamma + 1)\pi\gamma l_\perp^{2\gamma} l_x^\gamma \hbar \omega_x} \quad (2)$$

是原子之间有效非线性相互作用参数. $l_x = [\hbar/(M\omega_x)]^{1/2}$ 是谐振子的轴向特征长度, $l_\perp = [\hbar/(M\omega_\perp)]^{1/2}$ 是谐振子的横向特征长度, N 是原子数. U 是两体相互作用耦合常数, γ 依赖于相互作用: 在分子 BEC 一侧 ($2/3 \leq \gamma \leq 1$), $U = (4\pi\hbar^2 a_m)/M$, 其中 $a_m = 0.6a_s$ (a_s 是 Fermi 原子间 s 波散射长度) 是分子之间的有效散射长度; 在 BCS 一侧 ($0 < \gamma \leq 2/3$), $U = [(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \beta]/2M$, 其中在么正区 $\beta = 0.44$, 在深 BCS 端 $\beta = 1$. 在本文分析中, 对 ^{87}Rb 原子, 囚禁频率 $\omega_\perp = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$, $\omega_x = 2\pi \times 20 \text{ Hz}$, 原子之间的 s 波散射长度 $a = 5.6 \text{ nm}$.

3 变分分析

方程 (1) 的求解可转化成以下 Lagrange 密度

$$I = \frac{i}{2} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + V(x) |\psi|^2 + \frac{1}{1+\gamma} g |\psi|^{2(1+\gamma)} \quad (3)$$

取极小值的变分问题, 其中星号表示复共轭. 假设序参数满足 Gauss 型试探函数

$$\psi(x, t) = A(t) e^{-\frac{(x-x_0(t))^2}{2w^2(t)} + i\alpha(t) + ix^2\beta(t)}, \quad (4)$$

在一给定的时间 t , 该函数定义了中心位置处在 x_0 , 宽度为 w 的 Gauss 型分布, 其中 A, α, β 为变分参数, 都为实数. 对 Lagrange 密度函数关于空间积分, 得到 Lagrange 函数

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} I dx = \sqrt{\pi} w \left\{ \frac{i}{2} (A\dot{A}^* - \dot{A}A^*) + \frac{gA^{2(1+\gamma)}}{2(1+\gamma)^{3/2}} + A^2 \left[\frac{1}{2} \alpha^2 + \dot{\alpha} x_0 + 2\alpha\beta x_0 + \dot{\beta} x_0^2 + 2\beta^2 x_0^2 \frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} \dot{\beta} w^2 + \frac{1}{4w^2} + \beta^2 w^2 + \frac{1}{4} w^2 + \frac{\lambda}{4} (4x_0^4 + 12x_0^2 w^2 + 3w^4) \right] \right\}. \quad (5)$$

运用归一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$ 和 Lagrange 方程 $\partial L / \partial q_j - \partial / \partial t (\partial L / \partial \dot{q}_j) = 0$ [其中 $q_j =$

$\{w, x_0, \alpha, \beta\}$] 得到关于变分参数的四个方程:

$$x_0 + 2\lambda x_0^3 + 2\alpha\beta + 4x_0\beta^2 + 3\lambda x_0 w^2 + \dot{\alpha} + 2x_0 \dot{\beta} = 0, \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2w^3} - \frac{g\gamma}{2(\sqrt{\pi})^\gamma (1+\gamma)^{3/2} w^{1+\gamma}} + \frac{w}{2} + 3\lambda x_0^2 w + 2\beta^2 w + \frac{3}{2} \lambda w^3 + w \dot{\beta} = 0, \quad (7)$$

$$\alpha + 2x_0\beta - \dot{x}_0 = 0, \quad (8)$$

$$2x_0\alpha + 4x_0^2\beta + 2\beta w^2 - 2x_0\dot{x}_0 - w\dot{w} = 0. \quad (9)$$

由 (8) 和 (9) 式可求得 $\beta = \dot{w}/2w$, $\alpha = \dot{x}_0 - x_0(\dot{w}/w)$, 将其带入 (6) 和 (7) 式可得超流 Fermi 气体质量中心和宽度变化满足的方程:

$$\ddot{x}_0 + x_0 + 2\lambda x_0^3 + 3\lambda x_0 w^2 = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{w} + (1 + 6\lambda x_0^2)w + 3\lambda w^3 = \frac{1}{w^3} + \frac{g}{w^{1+\gamma}} \frac{\gamma}{(\sqrt{\pi})^\gamma (1+\gamma)^{3/2}}. \quad (11)$$

只要知道中心和宽度, 就可以算出其他的变分参数, 然后完全确定类 Gauss 原子云的所有演化特征.

由方程 (10) 和 (11) 知, 若只考虑简谐势阱, 则有

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{w} + w = \frac{1}{w^3} + \frac{g}{w^{1+\gamma}} \frac{\gamma}{(\sqrt{\pi})^\gamma (1+\gamma)^{3/2}}, \quad (13)$$

即 $\lambda = 0$ 时, 无论在 BEC 端还是在 BCS 端, 超流 Fermi 气体的质量中心以频率 ω_x 在 x_0 处做简谐振动, 宽度的变化与中心的运动无关. 若考虑四次方势阱的作用, 则超流 Fermi 气体中心的变化和宽度的变化会发生耦合.

方程 (10) 和 (11) 的平衡点满足方程

$$\bar{x}_0 + 2\lambda \bar{x}_0^3 + 3\bar{x}_0 w_0^2 = 0, \quad (14)$$

$$(1 + 6\lambda \bar{x}_0^2)w_0 + 3\lambda w_0^3 = \frac{1}{w_0^3} + \frac{g}{w_0^{1+\gamma}} \frac{\gamma}{(\sqrt{\pi})^\gamma (1+\gamma)^{3/2}}, \quad (15)$$

由此可知, 稳定的平衡点为

$$\bar{x}_0 = 0, \quad (16)$$

$$w_0 + 3\lambda w_0^3 = \frac{1}{w_0^3} + \frac{g}{w_0^{1+\gamma}} \frac{\gamma}{(\sqrt{\pi})^\gamma (1+\gamma)^{3/2}}. \quad (17)$$

将超流 Fermi 气体质量中心满足的方程 (10) 和宽度变化所满足的方程 (11) 在平衡点 (16) 和 (17) 处展开, 即将 $x_0 = \bar{x}_0 + \tilde{x}$ 和 $w = w_0 + \tilde{w}$ 带入 (10) 式

和 (11) 式, 并关于 \tilde{x} 和 \tilde{w} 线性化得到:

$$\ddot{\tilde{x}} + (3\lambda w_0^2 + 1)\tilde{x} = 0, \quad (18)$$

$$\ddot{\tilde{w}} + \left(1 + 9\lambda w_0^2 + \frac{3}{w_0^4} + \frac{g}{w_0^{2+\gamma}} \times \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma}(\sqrt{\pi})^\gamma}\right)\tilde{w} = 0. \quad (19)$$

因此, 可得到两低能激发频率的解析表达式

$$\omega_{1,2} = \left[1 + (1 \mp \frac{1}{2})6\lambda w_0^2 + (1 \mp 1)\left(\frac{3}{2w_0^4} + \frac{g}{2w_0^{2+\gamma}} \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma}(\sqrt{\pi})^\gamma}\right)\right]^{1/2}, \quad (20)$$

其中 ω_1 和 ω_2 分别对应于描述中心振荡的偶极模 ($m=1$) 和宽度变化的呼吸模 ($m=0$).

当 $\lambda=0$ 时, 两频率为

$$\omega_1 = 1, \quad (21)$$

$$\omega_2 = \left[1 + \frac{3}{w_0^4} + \frac{g}{w_0^{2+\gamma}} \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma}(\sqrt{\pi})^\gamma}\right]^{1/2}. \quad (22)$$

由 (20) 和 (21) 式可以看出: 由于四次方势阱的作用, 使得描述超流 Fermi 气体中心变化的偶极模和

宽度变化的呼吸模发生了耦合, 又由于原子之间的相互作用不同 (g 和 γ 的变化), 使得分子 BEC 端和么正区的两低能振荡激发模发生变化.

4 结果分析

图 1 给出了不同 λ 下随原子数 N 变化的两低能集体激发模的频谱曲线. 由图 1 可以看到, 无论在 BEC ($\gamma=1$) 端还是在么正区 ($\gamma=2/3$), 当 $\lambda > 0$ 时 (图 1(a), (c)), 随着 λ 的增加, 相应的两低能模的频率发生蓝移 (取 $\lambda=0, 0.01, 0.1, 0.5$); 当 $\lambda < 0$ 时 (图 1(b), (d)), 相应的两低能模频率发生红移 (取 $\lambda=0, -0.0001, -0.001$), 并且随着 $|\lambda|$ 的增加, 两低能模激发的失谐率越大. 同时, 原子数越大, 两低能模激发的失谐率也越大. 更重要的是, 在么正区两低能集体激发模的频移要比超流分子 BEC 端更加显著. 同时可以发现: 对给定的 λ, N , 两低能激发模频率在么正区明显比分子 BEC 端大, 并且其频移随原子数 N 的增大更显著, 即超流 Fermi 体系从分子 BEC 端渡越到分子 BCS 端时, 两低能模对外部响应完全不同.

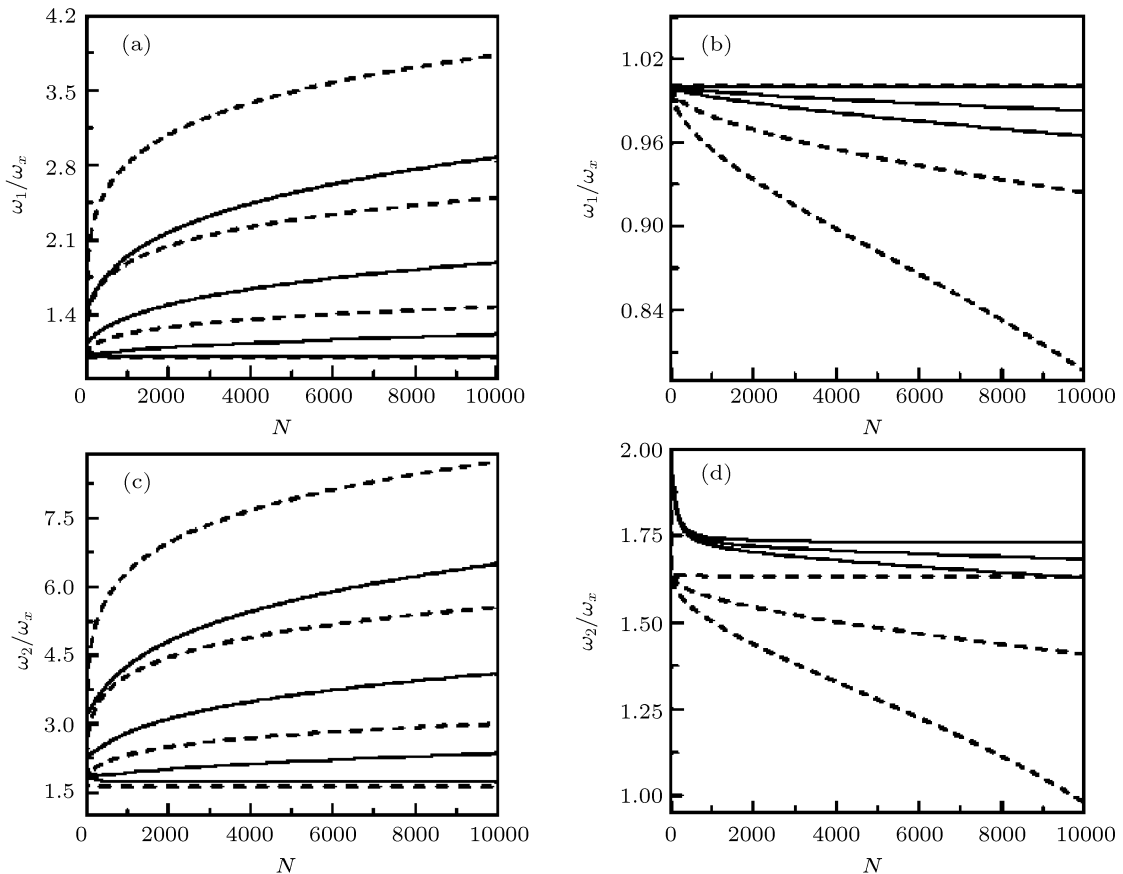


图 1 不同 λ 下随原子数 N 变化的两低能集体激发模的频谱曲线. 实线对应 $\gamma=1$, 虚线对应 $\gamma=2/3$. 对于所有曲线, 在 (a) 和 (c) 图中, 从下到上依次为: $\lambda=0, 0.01, 0.1, 0.5$; (b) 和 (d) 图中, 从上到下依次为: $\lambda=0, -0.0005, -0.001$

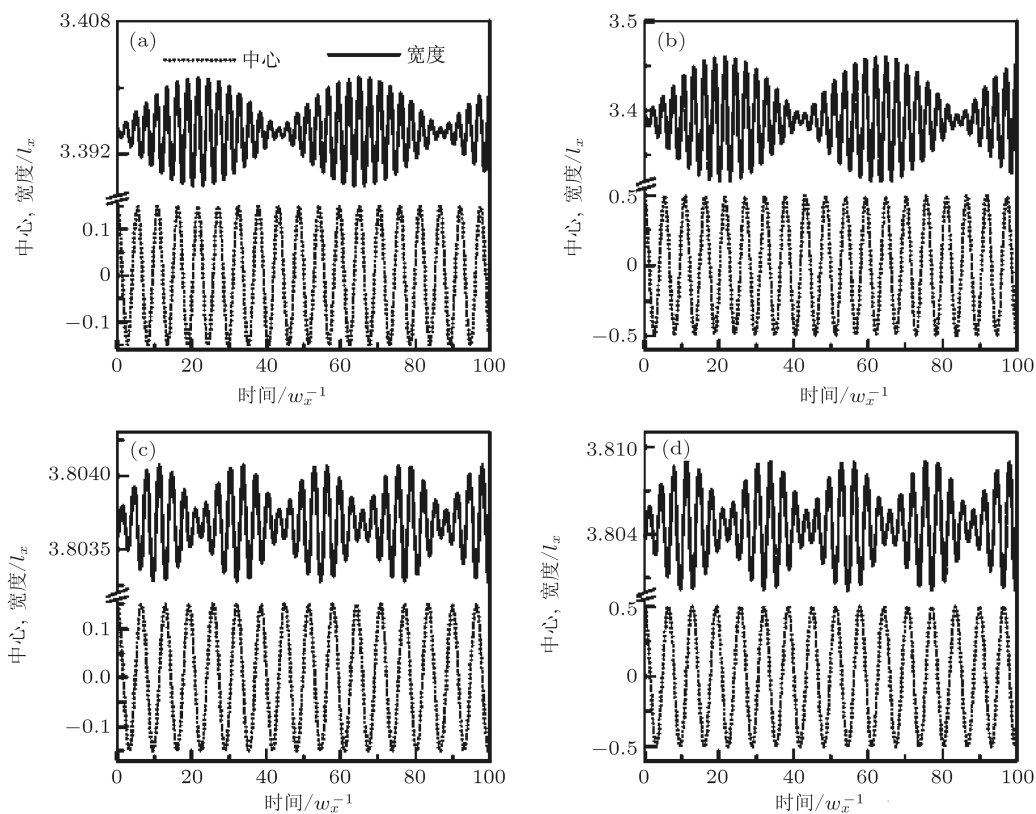


图 2 不同驱动振幅 Δx 激发下分子 BEC($\gamma = 1$) 超流体中心和宽度的响应 (a) $\Delta x = 0.15, \lambda = 0.01$; (b) $\Delta x = 0.5, \lambda = 0.01$; (c) $\Delta x = 0.15, \lambda = -0.001$; (d) $\Delta x = 0.5, \lambda = -0.001$

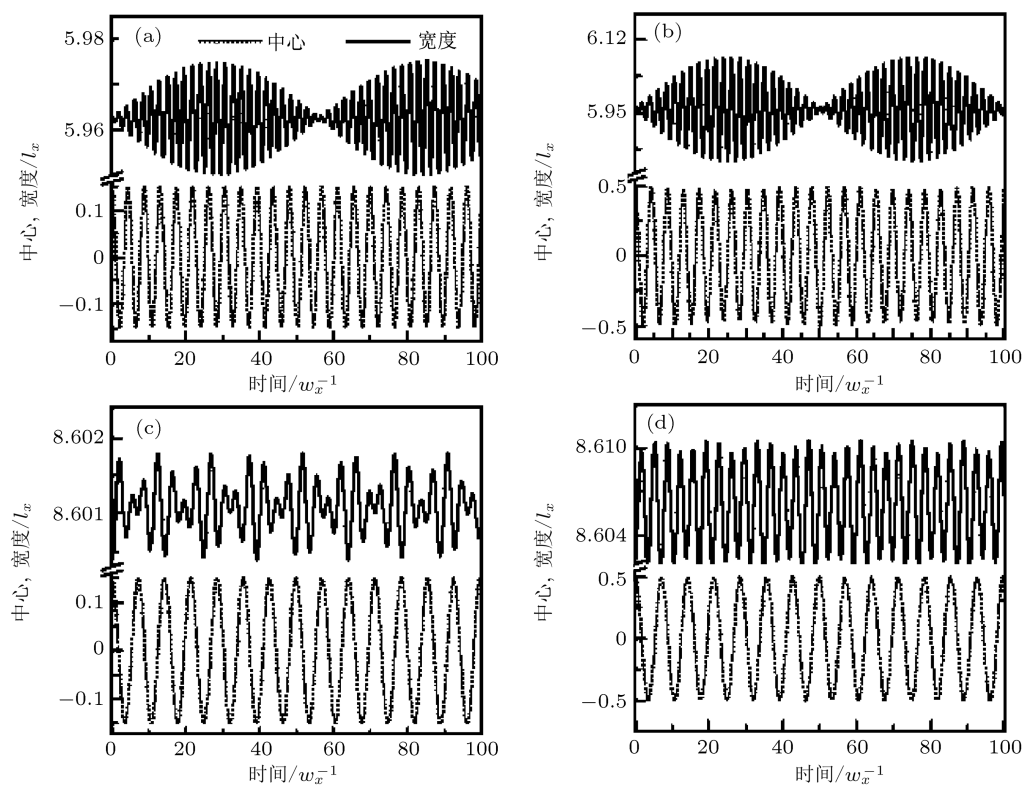


图 3 不同驱动振幅 Δx 激发下么正区 ($\gamma = 2/3$) Fermi 体系中心和宽度的响应 (a) $\Delta x = 0.15, \lambda = 0.01$; (b) $\Delta x = 0.5, \lambda = 0.01$; (c) $\Delta x = 0.15, \lambda = -0.001$; (d) $\Delta x = 0.5, \lambda = -0.001$

下面进一步从描述超流 Fermi 系统中心和宽度变化的方程 (10) 和 (11) 出发, 采用振幅驱动激发 (对平衡点的小偏离) 来研究超流 Fermi 气体对低能激发的响应.

实验上, 这种激发可以通过移动阱的中心位置以及改变阱的几何形状来实现. 图 2 和图 3 给出了在原子数 $N = 5000$ 时不同驱动振幅 Δx 激发下超流 Fermi 系统中心和宽度的响应结果, Δx 表示超流 Fermi 体系质量中心相对于平衡点的改变量. 可以看到: 在这种激发下, 该体系中心做简谐振荡, 宽度出现量子拍频现象^[24], 说明由于考虑了囚禁势阱中四次方项的作用, 对应于超流 Fermi 体系, 中心振荡和宽度振荡的两低能激发模发生了耦合. 当 λ

一定时, 随着驱动振幅 Δx 的增加, 宽度变化的拍频频率逐渐增大, 这一现象在么正区更为显著 (如图 3 所示). 特别地, 当 $\lambda < 0$ 时, 随驱动振幅 Δx 的增大, 么正区宽度变化的拍频出现了混沌现象 (如图 3(d) 所示).

由 (10), (11), (16) 和 (17) 式知, 对宽度进行小的改变时, 若中心不动 ($\Delta x = 0$), 则宽度解耦, 振荡频率由 (11) 式在 $x_0 = 0$ 时给出. 图 4 给出了不同驱动振幅 Δw 下超流 Fermi 体系宽度的变化. 可以看到: 当超流 Fermi 气体从分子 BEC 端渡越到 BCS 端时, 若 $\lambda > 0$, 则呼吸模频率增大 (如图 4(a), (c) 所示); 若 $\lambda < 0$, 则呼吸模频率减小 (如图 4(b), (d) 所示).

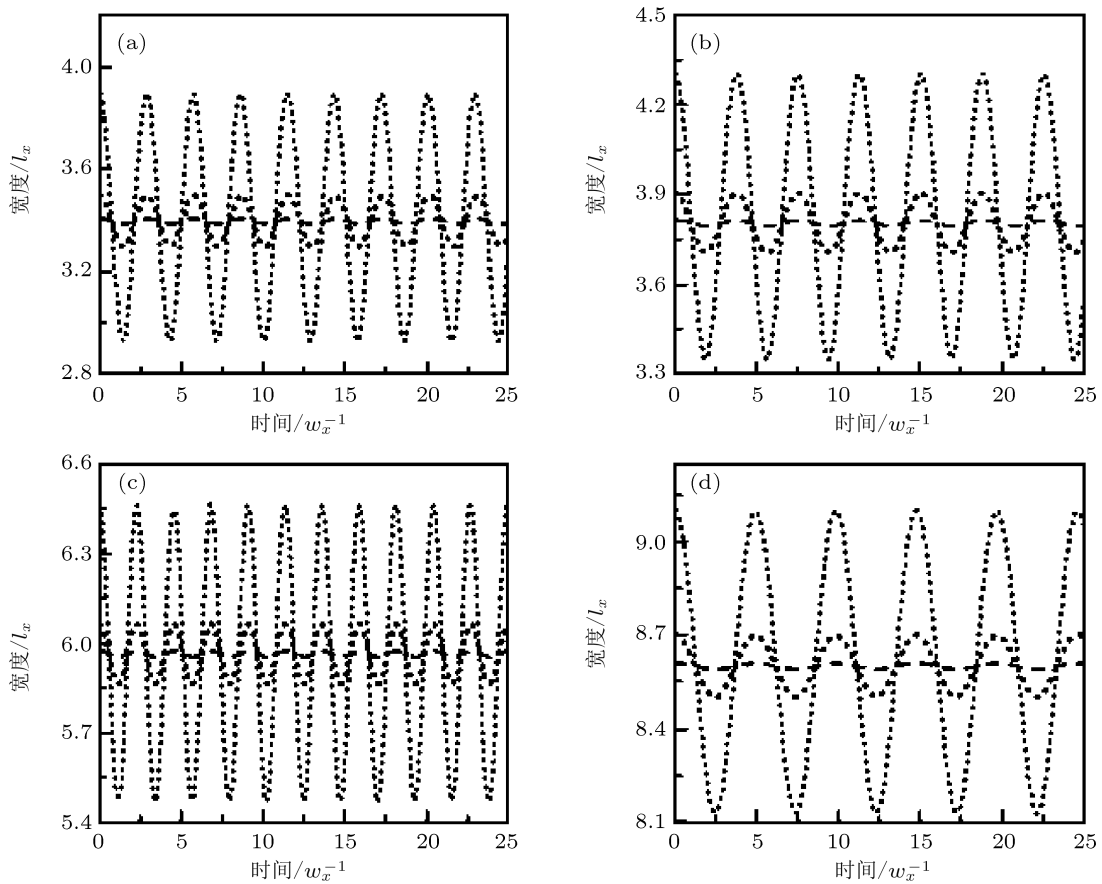


图 4 不同驱动振幅 Δw 激发下超流 Fermi 气体宽度的响应 (a) $\gamma = 0.1, \lambda = 0.01$; (b) $\gamma = 1, \lambda = -0.001$; (c) $\gamma = 2/3, \lambda = 0.01$; (d) $\gamma = 2/3, \lambda = -0.001$

5 结论

通过变分法考虑了非谐振势对超流 Fermi 气体集体激发的影响, 获得了二次方加四次方势阱中两个低能振荡模的频移解析式, 发现无论在 BEC 端还是在么正区, 中心变化的偶极模和宽度变化的呼吸模都发生了频移现象, 并且在么正区更加显著.

进而从描述超流 Fermi 系统质量中心和宽度变化的方程出发, 采用振幅驱动激发研究了超流 Fermi 气体对低能激发的响应. 发现当体系从分子 BEC 端渡越到 BCS 端时, 系统的两个低能激发模及对外部驱动响应都发生了显著改变. 研究结果对进一步认识超流 Fermi 气体的动力学特性具有一定的指导意义.

- [1] Hara K M, Hemmer S L, Gehm M E 2002 *Science* **298** 5601
 [2] Loftus T, Regsl C A, Ticknor C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 173201
 [3] Greiner M 2003 *Nature* **426** 537
 [4] Regal C A, Greiner M, Jin D S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 040403
 [5] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6358 (in Chinese) [赵兴东, 些征微, 张卫平 2007 物理学报 **56** 6358]
 [6] Ma Y, Fu L B, Yang Z A, Liu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5623 (in Chinese) [马云, 傅立斌, 杨志安, 刘杰 2006 物理学报 **55** 5623]
 [7] Zhou L, Kong L B, Zhan M S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1601
 [8] Wang G F, Liu B, Fu L B, Zhao H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3733 (in Chinese) [王冠芳, 刘彬, 傅立斌, 赵鸿 2007 物理学报 **56** 3733]
 [9] Chin J K 2006 *Nature* **443** 961
 [10] Rodriguez M, Tòrma P 2004 *Phys. Rev. A* **69**(R) 041602
 [11] Zhai H, Ho T L 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 10042
 [12] Moon E G, Nikolić P, Sachdev S 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 230403
 [13] Pitaevskii L P, Stringari S, Orso G 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053602
 [14] Kim Y E, Zubarev A L 2004 *Phys. Rev. A* **70** 033612
 [15] Manini N, Salasnich L 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033625
 [16] Wen W, Zhou Y, Huang G X 2008 *Phys. Rev. A* **77** 033623
 [17] Wen W, Shen S Q, Huang G X 2010 *Phys. Rev. B* **81** 014528
 [18] Dong H, Ma Y L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 715
 [19] Chin C, Bartenstein M, Altmeyer A 2004 *Science* **305** 5687
 [20] Li G Q, Fu L B, Xue J K, Chen X Z, Liu J 2006 *Phys. Rev. A* **74** 055601
 [21] Jin D S, Ensher J R, Matthews M R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 420423
 [22] Zhang A X, Xue J K 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043617
 [23] Xue J K, Zhang A X 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 180401
 [24] Wu Y, Yang X 2007 *Phys. Rev. A* **76** 013832

Collective excitations of superfluid Fermi gas in an anharmonic potential*

Yu Zi-Fa Wu Jian-Peng Wang Peng-Cheng Zhang Jiao-Jiao Tang Rong-An
 Xue Ju-Kui[†]

(Key Laboratory of Atomic and Molecular Physics and Functional Materials of Gansu Province, College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 19 March 2011; revised manuscript received 2 April 2011)

Abstract

The collective excitations of a one-dimensional superfluid Fermi gas in an anharmonic trap are investigated. By using the variational approach, the frequency shifts about the dipole mode of the center-of-mass variations and the breathing mode of width variations are derived. It is found that the frequency shift in a unitary region is more significant. Under the excitations of different driving amplitudes, the two low-energy modes are coupled due to the contribution of the quartic item, and the quantum beating phenomenon comes into being. The frequency of beating increases with the driving amplitude. The dynamics of the width exhibits complex characteristics, especially, in the unitary region.

Keywords: superfluid Fermi gas, anharmonic potential, collective excitations

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Lm, 03.75.Ss

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10774120, 10975114), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant No. 1010RJZA012), and the Greation of Science and Technology of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNNU-KJCXGC-03-48).

[†] E-mail: xuejk@nwnu.edu.cn