

周期性双势垒锯齿势中温差驱动的布朗热机*

程海涛 何济洲† 肖宇玲

(南昌大学物理系, 南昌 330031)

(2011 年 4 月 2 日收到; 2011 年 5 月 4 日收到修改稿)

研究了周期性双势垒锯齿势中, 布朗粒子在外力作用下沿空间坐标方向交替地和高、低温热库接触构成的布朗热机的热力学性能. 考虑布朗粒子动能的变化以及高、低温库之间热漏的存在, 通过数值计算分析势垒高度、势比、外力等参数对布朗热机效率的影响. 研究表明: 当考虑热漏时, 布朗热机始终是不可逆的, 效率小于卡诺效率; 并且当热漏很小时, 势比的增大在一定程度上可提高布朗热机的效率; 其功率与效率之间的关系曲线为闭合线. 当不考虑热漏时, 其功率与效率之间的关系曲线为开型线, 但由于布朗粒子动能的变化引起的不可逆热流, 热机的效率依然小于卡诺效率.

关键词: 布朗热机, 双势垒锯齿势, 热漏, 热力学性能

PACS: 05.40.-a, 05.70.Ln, 87.10.+e

1 引言

布朗马达是一种周期性的空间不对称结构, 其中布朗粒子的传输由一些非平衡过程来驱动, 如外力、化学势差、温差等^[1-6]. 根据这些不同类型的驱动力, 布朗马达主要分成三类: 受力棘轮、化学马达和热驱动马达. Feynman 等^[7]首先提出了所谓“热棘轮”的热驱动布朗马达模型. 随后, Velasco 等^[8]研究了费曼棘轮在最大功率和最大效率机制下的优化性能; Büttiker^[9], van Kampen^[10]和 Landauer^[11]等分别从不同的角度研究了由非均匀温度场驱动的布朗马达的粒子流和热力学性能.

近年来, 随着微纳米技术的发展及器件的小型化, 人们对温差驱动的布朗热机的研究产生了浓厚的兴趣. 例如, Derényi 等^[12]考虑布朗粒子在高低温库之间运动时, 粒子的动能变化会产生不可逆热流, 从而影响布朗热机的效率; Asfaw 等^[13-15]研究了温差驱动布朗马达的效率和性能特性, 在准静态极限下布朗热机的效率达到卡诺效率; 还有一些学者研究了空间周期性单势垒锯齿势场中布朗粒子作为热机和制冷机的热力学性能, 由于布朗粒子动能变化引起的不可逆热流, 使得在准静态极限下

布朗热机的效率和制冷机的制冷系数都达不到卡诺值^[16-25]; Gao 等^[26]进一步引入了高、低温库之间的热漏来表示附加的不可逆热流, 当热漏存在时布朗热机的效率大大降低.

为了减小不可逆热流的影响, 提高布朗热机的效率, 在考虑粒子动能变化引起的热流时, Asfaw^[27]进一步讨论了在黏性介质中细分锯齿势对布朗热机效率和制冷机制冷系数的影响, 得出当锯齿势细分程度较小时有可能提高布朗热机的效率. 受到细分锯齿势的启发, 本文在温度周期边界处增加一个锯齿势垒, 建立一个周期性双势垒锯齿势中的布朗热机模型, 研究布朗粒子在黏性介质中的运动, 运用动力学方程导出了稳态流、功率和效率的表达式. 考虑布朗粒子动能的变化以及高、低温库之间热漏的存在, 并通过数值计算分析势垒高度、势比、外力等参数对布朗热机效率的影响.

2 模型与理论分析

考虑布朗粒子在周期性双势垒锯齿势中运动, 黏性介质沿空间坐标 x 的方向交替地与高、低温热库接触. 粒子受到沿 x 负方向的线性外力 f 的作

* 国家自然科学基金 (批准号: 11065008) 资助的课题.

† E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn

用. 如图 1 所示.

在区间 $-L_1 \leq x < L_1$ 内, 双势垒锯齿势分布为

$$U_s(x) = \begin{cases} -\frac{U_2}{L_1 - L_2}(x + L_2) & (-L_1 \leq x \leq -L_2), \\ \frac{U_1}{L_2}(x + L_2) & (-L_2 \leq x \leq 0), \\ -\frac{U_1}{L_2}(x - L_2) & (0 \leq x \leq L_2), \\ \frac{U_2}{L_1 - L_2}(x - L_2) & (L_2 \leq x \leq L_1). \end{cases} \quad (1)$$

其中, U_1, U_2 分别为高、低势垒的高度, $L = 2L_1$ 为双势垒锯齿势的周期长度. 温度曲线 $T(x)$ 有如下形式:

$$T(x) = \begin{cases} T_h & (-L_1 \leq x < 0), \\ T_c & (0 \leq x < L_1), \end{cases} \quad (2)$$

其中 T_h, T_c 分别为高、低温热库的温度. 势场 $U_s(x)$ 和温度 $T(x)$ 拥有相同的周期 L , 使得 $U_s(x + L) = U_s(x)$, $T(x + L) = T(x)$. 外力 f 产生的等效势为 fx , 总的等效锯齿势变为 $U(x) = U_s(x) + fx$.

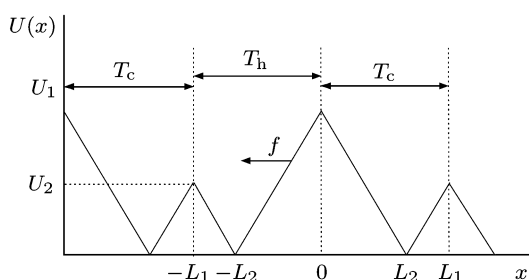


图 1 布朗热机示意图

在周期性非均匀温度和外力的驱动下, 布朗粒子作定向运动并最终形成一个稳态流 J . 稳态流的大小和方向由表征模型的参数决定. 布朗粒子在非均匀介质中的动力学方程由 Smoluchowski 方程表

示为^[28]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma(x)} (U'(x)P + \frac{\partial}{\partial x} (T(x)P)) \right], \quad (3)$$

其中 $P = P(x, t)$ 为 t 时刻发现粒子在 x 处的概率密度, $U'(x) = dU(x)/dx$, $\gamma(x)$ 为 x 处的摩擦系数. 取玻尔兹曼常数 $k_B = 1$, 稳态时的恒定流为

$$J = -\frac{1}{\gamma(x)} \left[U'(x)P_{ss}(x) + \frac{d}{dx} (T(x)P_{ss}(x)) \right], \quad (4)$$

其中 $P_{ss}(x)$ 为 x 处的稳态概率密度. 假定黏性介质中各处的摩擦系数相同, 利用周期性边界条件 $P_{ss}(x + L) = P_{ss}(x)$ 以及本文中所给定的锯齿势场和温度曲线, 可得到稳态流的表达式:

$$J = \frac{-F}{G_1 G_2 + H F}, \quad (5)$$

其中 F, G_1, G_2, H 的具体表达式在附录中给出. 布朗粒子的速度 v 与稳态流的关系为 $v = JL$.

作为热机模型时, 稳态流大于 0 (即布朗粒子向右运动). 在系统中有两种热流: 一种为高、低温库之间的热漏, 大小为 $k(T_h - T_c)$, k 为热漏系数^[26]; 另一种为布朗粒子运动所产生的热流, 包括布朗粒子克服势垒、外力以及黏性阻力时吸收的热量 $(U_1 - U_2) + (\gamma v + f)L_1$ 和温度边界处由于布朗粒子动能变化引起的热流 $(T_h - T_c)/2$ ^[12]. 因此, 在周期时间 $t = L/v$ 内, 从高温库中释放出来的热量为

$$Q_h = (U_1 - U_2) + (\gamma v + f)L_1 + (T_h - T_c)/2 + k(L/v)(T_h - T_c); \quad (6)$$

同样的, 我们可知低温库吸收的热量为

$$Q_c = (U_1 - U_2) - (\gamma v + f)L_1 + (T_h - T_c)/2 + k(L/v)(T_h - T_c). \quad (7)$$

热机的功和效率分别为

$$W = 2(\gamma v + f)L_1, \quad (8)$$

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{2(\gamma v + f)L_1}{(U_1 - U_2) + (\gamma v + f)L_1 + (T_h - T_c)/2 + k(L/v)(T_h - T_c)}, \quad (9)$$

于是热机的功率为

$$P = W/t = 2(\gamma v + f)L_1 v/L = (\gamma v + f)v. \quad (10)$$

3 热机的效率特性

为了便于分析, 我们对模型中的参量进行无量

纲处理. 令 $u = U_1/T_h$, $\tau = T_c/T_h$, $\lambda = fL_1/T_h$, $l = L_2/L_1$, $\alpha = U_2/U_1$, 以及 $J_0 = T_h/\gamma L_1^2 = 1$. 利用 (9) 式我们得到了布朗热机的效率曲线图, 如图 2—5 所示.

图 2 为效率 η 与热漏系数 k 的关系曲线, 其中参数 $u, \alpha, \lambda, \tau, l$ 都已给定. 效率 η 为热漏系

数 k 单调递减函数; k 越小效率越大, 当 $k = 0$ 时, 效率达到最大值; 而 k 一定时, 温差越大, 效率越大.

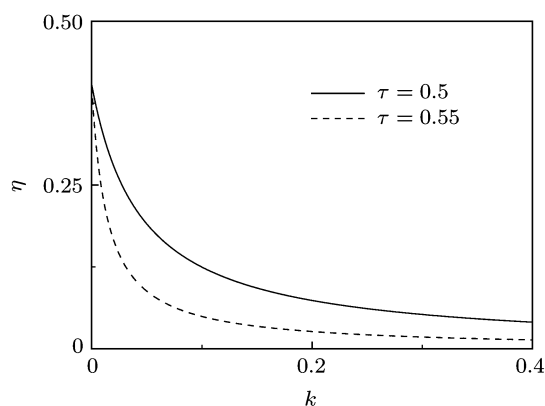


图2 效率 η 与热漏系数 k 的关系曲线 $u = 3, \alpha = 0.4, \lambda = 0.5, l = 0.6$

图3为不同热漏系数下效率 η 与势垒 u 的关系曲线, 其中参数 $\alpha, \lambda, \tau, l, k$ 都已给定. 存在最小势垒取值 $u = u_{\min}$, 当 $u \geq u_{\min}$ 时, 系统为热机模型. $k = 0$ 时, 效率 η 随势垒 u 单调减小, 在 $u = u_{\min}$ 处 η 达到最大值. $k > 0$ 时, 效率 η 与势垒 u 呈抛物线型曲线关系, 存在最优值 u_{opt} , 热机效率达到最大值; 随着热漏系数 k 的增大, 最大效率减小, u_{opt} 增大; 在 $u = u_{\min}$ 处 $\eta = 0$, $u_{\min}$ 与 k 的取值无关. 当 u 很大时, 布朗粒子无法克服势垒向右运动, 热机不工作.

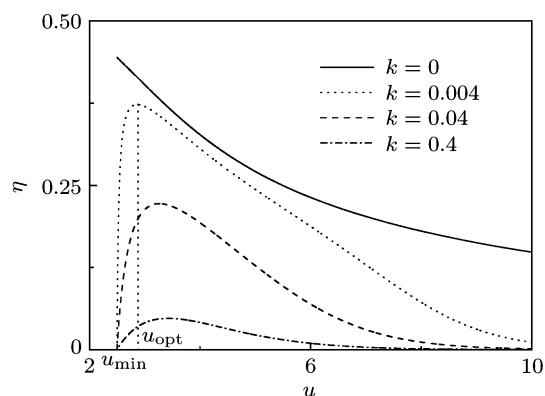


图3 效率 η 与势垒 u 的关系曲线 $\alpha = 0.4, \lambda = 0.5, l = 0.6, \tau = 0.5$

图4为不同热漏系数下效率 η 与外力 λ 的关系曲线, 其中参数 u, α, τ, l, k 都已给定. 存在最大外力取值 $\lambda = \lambda_{\max}$, 当 $\lambda \leq \lambda_{\max}$ 时, 系统为热机模型. $k = 0$ 时, 效率 η 随外力 λ 单调增大, 在 $\lambda = \lambda_{\max}$ 处 η 达到最大值. $k > 0$ 时, 效率 η 随外力 λ 先增大后减小, 存在最优值 λ_{opt} , 热机效率

达到最大值; 随着热漏系数 k 的增大, 最大效率减小, λ_{opt} 减小; 在 $\lambda = \lambda_{\max}$ 处 $\eta = 0$, $\lambda_{\max}$ 与 k 的取值无关. 当 $\lambda = 0$ 时 (即无外力作用), 布朗热机也可以工作, 此时输出功用来使布朗粒子克服黏性阻力向右运动.

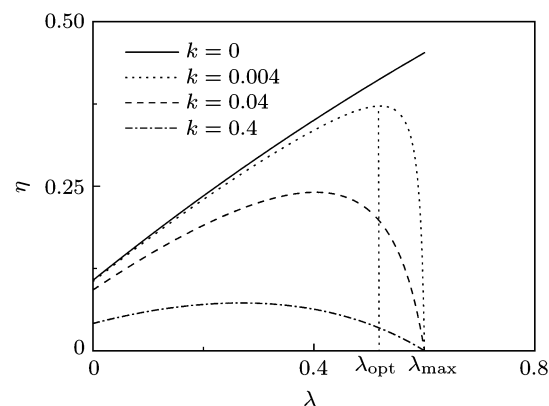


图4 效率 η 与外力 λ 的关系曲线 $u = 3, \alpha = 0.4, l = 0.6, \tau = 0.5$

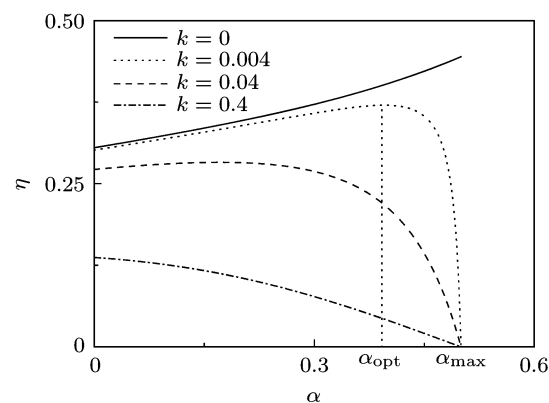


图5 效率 η 与势比 α 的关系曲线 $u = 3, \lambda = 0.5, l = 0.6, \tau = 0.5$

图5为不同热漏系数下效率 η 与势比 α 的关系曲线, 其中参数 u, λ, τ, l, k 都已给定. 存在最大势比取值 $\alpha = \alpha_{\max}$, 当 $\alpha \leq \alpha_{\max}$ 时, 系统为热机模型. $k = 0$ 时, 效率 η 随势比 α 单调增大, 在 $\alpha = \alpha_{\max}$ 处 η 达到最大值. $k > 0$ 且 k 很小时, α 的增大使热机的效率先增大后减小, 并在 α_{opt} 处热机效率达到最大值; 随着热漏系数 k 的增大, 最大效率减小; 当 k 较大时, 随着 α 的增大, 热机效率单调减小; 在 $\alpha = \alpha_{\max}$ 处 $\eta = 0$, $\alpha_{\max}$ 与 k 的取值无关.

图6为功率 P 与效率 η 的关系曲线. 从图中可以看出, 当热漏存在时, 热机的功率效率特性为一闭合的关系曲线, 与经典的不可逆热机相似 [29,30]. 当热漏为零时, 热机的最低效率不为零, 功率效率

特性为一开型的关系曲线, 并且在稳态流为零时达到最大效率, 但由于布朗粒子动能的变化, 热机的最大效率依然小于卡诺效率.

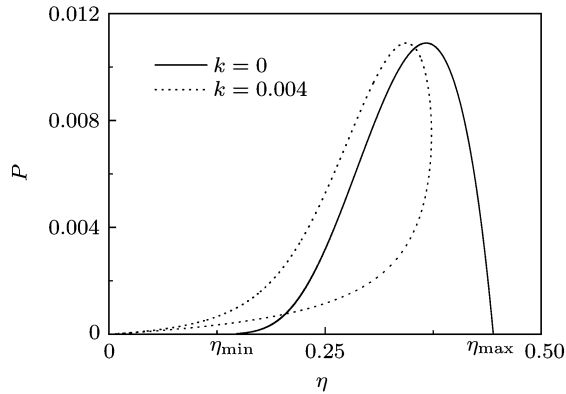


图6 功率 P 与效率 η 的关系曲线 $\alpha = 0.4, \lambda = 0.5, l = 0.6, \tau = 0.5$

4 结论

研究了双势垒锯齿势下, 黏性介质中运动的布朗粒子. 导出了系统稳态时功率 P 和效率 η 的表达式. 考虑布朗粒子动能的变化以及高、低温库之间热漏的存在, 通过数值计算分析势垒高度、势比、外力等参数对布朗热机效率的影响. 研究表明, 当考虑热漏时, 布朗热机始终是不可逆的, 效率小于卡诺效率; 并且当热漏很小时, 温度周期边界处锯齿势垒的引入以及势比的增大可在一定程度上减小不可逆热流的影响, 进而提高布朗热机的效率; 热机的功率效率特性为一闭合的关系曲线. 当不考

虑热漏时, 热机的功率效率特性为一开放的关系曲线, 但由于布朗粒子动能的变化, 热机的效率依然小于卡诺效率.

附录

考虑布朗粒子在周期性势场中运动, 其中势场曲线, 温度场曲线由文中 (1) 和 (2) 式给出, 总的等效的锯齿势 $U(x) = U_s(x) + fx$. 布朗粒子的动力学方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(P(x, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma(x)} (U'(x)P + \frac{\partial}{\partial x}(T(x)P)) \right].$$

稳态时的恒定流为

$$J = -\frac{1}{\gamma(x)} \left[U'(x)P_{ss}(x) + \frac{d}{dx}(T(x)P_{ss}(x)) \right].$$

利用周期性边界条件和归一化条件可求得稳态流为

$$J = \frac{-F}{G_1 G_2 + HF},$$

其中:

$$\begin{aligned} F &= e^{\phi(L_1)} - 1, \\ G_1 &= \int_{-L_1}^{L_1} \frac{e^{-\phi(x)}}{T(x)} dx, \\ G_2 &= \int_{-L_1}^{L_1} e^{\phi(x)} \gamma(x) dx, \\ H &= \int_{-L_1}^{L_1} \frac{e^{-\phi(x)}}{T(x)} dx \int_{-L_1}^x e^{\phi(x')} \gamma(x') dx', \\ \phi(x) &= \int_{-L_1}^x U'(x) dx' / T(x'). \end{aligned}$$

我们通过进一步计算求得:

$$\begin{aligned} F &= e^{[(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h - (U_1 - U_2 - fL_1)/T_c]} - 1, \\ G_1 &= \frac{(L_1 - L_2)}{(-U_2 + f(L_1 - L_2))} [1 - e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h}] + \frac{L_2}{(U_1 + fL_2)} e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h} [1 - e^{-(U_1 + fL_2)/T_h}] \\ &\quad + \frac{L_2}{(-U_1 + fL_2)} e^{-(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h} [1 - e^{-(U_1 + fL_2)/T_c}] \\ &\quad + \frac{(L_1 - L_2)}{(U_2 + f(L_1 - L_2))} e^{[(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h + (-U_1 + fL_2)/T_c]} [1 - e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_c}], \\ G_2 &= \frac{\gamma T_h (L_1 - L_2)}{(-U_2 + f(L_1 - L_2))} [e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h} - 1] + \frac{\gamma T_h L_2}{(U_1 + fL_2)} e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h} [e^{(U_1 + fL_2)/T_h} - 1] \\ &\quad + \frac{\gamma T_c L_2}{(-U_1 + fL_2)} e^{(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h} [e^{-(U_1 + fL_2)/T_c} - 1] \\ &\quad + \frac{\gamma T_c (L_1 - L_2)}{(U_2 + f(L_1 - L_2))} e^{[(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h + (-U_1 + fL_2)/T_c]} [e^{(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_c} - 1], \\ H &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7, \\ t_1 &= \frac{\gamma(L_1 - L_2)}{(-U_2 + f(L_1 - L_2))} \left[(L_1 - L_2) + \frac{T_h(L_1 - L_2)}{(-U_2 + f(L_1 - L_2))} [e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h} - 1] \right], \\ t_2 &= \frac{A\gamma}{T_h} e^{-(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h} \left[\frac{-T_h L_2}{(U_1 + fL_2)} [e^{-(U_1 + fL_2)/T_h} - 1] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= \frac{\gamma L_2}{(U_1 + fL_2)} \left[L_2 + \frac{T_h L_2}{(U_1 + fL_2)} [e^{-(U_1 + fL_2)/T_h} - 1] \right], \\
 t_4 &= \frac{(A + B)\gamma}{T_c} e^{-(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h} \left[\frac{-T_c L_2}{(-U_1 + fL_2)} [e^{-(U_1 + fL_2)/T_c} - 1] \right], \\
 t_5 &= \frac{\gamma L_2}{(-U_1 + fL_2)} \left[L_2 + \frac{T_c L_2}{(-U_1 + fL_2)} [e^{-(U_1 + fL_2)/T_c} - 1] \right], \\
 t_6 &= \frac{(A + B + C)\gamma}{T_c} e^{-[(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h + (-U_1 + fL_2)/T_c]} \left[\frac{-T_c(L_1 - L_2)}{(U_2 + f(L_1 - L_2))} [e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_c} - 1] \right], \\
 t_7 &= \frac{\gamma(L_1 - L_2)}{(U_2 + f(L_1 - L_2))} \left[(L_1 - L_2) + \frac{T_c(L_1 - L_2)}{(U_2 + f(L_1 - L_2))} [e^{-(U_2 + f(L_1 - L_2))/T_c} - 1] \right], \\
 A &= \frac{T_h(L_1 - L_2)}{(-U_2 + f(L_1 - L_2))} [e^{(-U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h} - 1], \\
 B &= \frac{T_h L_2}{(U_1 + fL_2)} e^{(-U_2 + f(L_1 - L_2))/T_h} [e^{(U_1 + fL_2)/T_h} - 1], \\
 C &= \frac{T_c L_2}{(-U_1 + fL_2)} e^{(U_1 - U_2 + fL_1)/T_h} [e^{(-U_1 + fL_2)/T_c} - 1].
 \end{aligned}$$

-
- [1] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
 [2] Astumian R D, Hänggi P 2002 *Phys. Today* **55** 33
 [3] Van den Broeck C, Kawai R, Meurs P 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 090601
 [4] Parrondo J M R, Blanco J M, Cao F J, Brito R 1998 *Europhys. Lett.* **43** 248
 [5] Parrondo J M R, de Cisneros B J 2002 *Appl. Phys. A* **75** 179
 [6] Bouzat S, Wio H S 2004 *Eur. Phys. J. B* **41** 97
 [7] Feynman R P, Leighton R B, Sands M 1966 *The Feynman Lectures on Physics I* (Reading MA: Addison-Wesley) 46.1–46.9
 [8] Velasco S, Roco J M M, Medina A, Calvo Hernández A 2001 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **34** 1000
 [9] Büttiker M 1987 *J. Phys. B* **68** 161
 [10] van Kampen N G 1988 *IBM J. Res. Dev.* **32** 107
 [11] Landauer R 1988 *J. Stat. Phys.* **53** 233
 [12] Derényi I, Astumian R D 1999 *Phys. Rev. E* **59** R6219
 [13] Asfaw M, Bekele M 2004 *Eur. Phys. J. B* **38** 457
 [14] Asfaw M, Bekele M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 056109
 [15] Asfaw M, Bekele M 2007 *Physica A* **384** 346
 [16] Hondou T, Sekimoto K 2000 *Phys. Rev. E* **62** 6021
 [17] Ai B Q, Xie H Z, Wen D H, Liu X M, Liu L G 2005 *Eur. Phys. J. B* **48** 101
 [18] Ai B Q, Wang L Q, Liu L G 2006 *Phys. Lett. A* **352** 286
 [19] Zhang Y, Lin B H, Chen J C 2006 *Eur. Phys. J. B* **53** 481
 [20] Lin B H, Chen J C 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 075006
 [21] Zhang Y P, He J Z, He X, Xiao Y L 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 857
 [22] Zhang Y P, He J Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 090502
 [23] Zhang Y P, He J Z, Ouyang H, Qian X X 2010 *Phys. Scr.* **82** 055005
 [24] Ding Z M, Chen L G, Sun F R 2010 *Braz. J. Phys.* **40** 141
 [25] Ding Z M, Chen L G, Sun F R 2010 *Sci. China: Phys. Mech. Astron.* **40** 16 (in Chinese) [丁泽民, 陈林根, 孙丰瑞 2010 中国科学: 物理学 力学 天文学 **40** 16]
 [26] Gao T F, Zhang Y, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3279
 [27] Asfaw M 2008 *Eur. Phys. J. B* **65** 109
 [28] Sancho J M, Miguel M S, Durr D 1982 *J. Stat. Phys.* **28** 291
 [29] Yan Z J, Chen J C 1990 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **23** 136
 [30] Chen J C 1997 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **30** 582

Brownian heat engine driven by temperature difference in a periodic double-barrier sawtooth potential*

Cheng Hai-Tao He Ji-Zhou[†] Xiao Yu-Ling

(*Department of Physics, Nanchang University, Nanchang 330031, China*)

(Received 2 April 2011; revised manuscript received 4 May 2011)

Abstract

This paper has studied the thermodynamic performance of a Brownian heat engine, which is driven by temperature difference. Brownian particles move in the periodic double-barrier sawtooth potential with an external load force and contact with an alternating hot and cold reservoir. The kinetic energy change of the Brownian particles and the heat leak between hot and cold reservoir are considered simultaneously. The influence of the main parameters, including the height of barrier, the ratio of the low barrier to high barrier and the external load force, on the efficiency of Brownian heat engine is discussed in detail. When the heat leak between the two reservoirs is taken into account, the Brownian heat engine is irreversible, the efficiency is less than the Carnot efficiency. When the heat leak is small, the ratio of the low barrier to high barrier can increase the efficiency. The curve of the power output versus the efficiency is a loop-shaped one. When the heat leak is negligible, the curve of the power output versus the efficiency is an open-shaped one. The efficiency is still less than the Carnot efficiency, because the heat flow via kinetic energy change of the particles is irreversible.

Keywords: Brownian heat engine, double-barrier sawtooth potential, heat leak, thermodynamic performance

PACS: 05.40.-a, 05.70.Ln, 87.10.+e

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11065008).

[†] E-mail: hjzhou@ncu.edu.cn