

线性时滞反馈引起的周期性振动共振分析*

杨建华 刘先斌†

(南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

(2010年7月16日收到; 2011年4月15日收到修改稿)

研究了高频信号和微弱低频信号同时激励下线性时滞反馈对过阻尼双稳系统和 Duffing 振子系统中振动共振现象的影响. 解析分析和数值结果都表明, 系统对低频信号的响应幅值增益随时滞参数的变化同时呈现两种不同的周期性关系, 其周期分别为输入的高频信号和低频信号的周期. 数值结果还表明, 对不存在经典振动共振现象的单稳 Duffing 系统, 通过调节时滞参数也可以引发振动共振现象. 使用时滞反馈不仅可以有效地控制振动共振, 还可以进一步增强系统对微弱低频信号的响应.

关键词: 双稳系统, Duffing 系统, 线性时滞反馈, 振动共振

PACS: 05.45.-a, 02.30.Ks, 05.90.+m

1 引言

近年来, 不同频率周期信号同时激励下非线性系统的响应问题引起了人们的极大兴趣, 这是因为不同频率的信号在诸如脑动力学^[1]、激光物理^[2]、声学^[3]、通讯技术等众多领域有着广泛的应用价值. 通常, 信息由微弱的低频信号携带, 而高频信号对信息的传播起调制作用. Landa 和 McClintock^[4] 受随机共振 (stochastic resonance) 现象^[5] 的启发, 用数值方法研究了受高频信号和微弱低频信号同时激励的非线性双稳系统, 发现系统对低频信号的响应幅值增益和高频信号的幅值之间是一种非线性关系. 随着高频信号幅值的逐渐增大, 系统对低频信号的响应幅值增益会出现最大值, 呈现“共振”现象, 从而使微弱低频信号得到放大. 这种共振类似于随机共振 (系统输出的信噪比和噪声强度之间呈现非线性关系), 称为振动共振 (vibrational resonance). 此后, 一些研究文献分别用解析方法^[6-10] 和实验方法^[11,12] 证明了振动共振现象的存在, 其研究范围也从简单的双稳系统扩大到神经动力系统^[13]、五次方振子系统^[7,8] 及高维的网络系统^[14].

关于振动共振的最新研究进展是利用时滞反

馈实现对振动共振的控制, 以及基于振动共振原理促使微弱低频信号在高维耦合系统中的传播. Yang 和 Liu^[15] 研究发现, 在引入时滞反馈的非线性系统中, 系统对低频信号的响应幅值增益随着时滞参数的变化发生周期性变化, 且变化的周期恰好等于输入高频信号的周期, 然而在每个周期内响应幅值增益所对应的值大小不同, 他们将这种现象称为时滞反馈引起的准周期振动共振. Yao 和 Zhan^[16] 研究了单向耦合的双稳系统, 发现通过调节加在每一个振子单元上的高频信号, 可以使作用在第一个振子单元上的微弱低频信号成功地传输到最后一个振子单元上. 这种借助高频信号促使微弱低频信号在振子序列中传输的技术, 其依据就是振动共振的机理.

文献 [15] 中虽然初步探讨了时滞反馈对振动共振的影响, 但得到的仅是一些数值结果, 且文中时滞参数的取值范围较小. 因此, 在时滞参数取值范围较大时用解析方法研究时滞参数与系统响应幅值增益之间的关系是非常必要的. 本文以含线性时滞反馈的过阻尼双稳系统和 Duffing 振子系统为研究对象, 在时滞参数取值范围较大的情形下, 分别研究时滞反馈对这两类系统中振动共振现象的影响. 首先用解析的方法证明时滞反馈引起的振动

* 国家自然科学基金 (批准号: 11072107) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20093218110003) 资助的课题.

† E-mail: xbliu@nuaa.edu.cn

共振同时具有两种不同的周期性,接着通过数值仿真验证解析结果的正确性,最后给出相关的结论及讨论.

2 时滞反馈对过阻尼双稳系统中振动共振的影响

双频信号激励下,在过阻尼双稳系统的线性位移项上引入时滞反馈,即

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x^3(t) + x(t - \alpha) + f \cos(\omega t) + F \cos(\Omega t), \quad (1)$$

其中,时滞参数 $\alpha \geq 0$,信号幅值 $f \ll 1$,信号频率 $\omega \ll \Omega$,即两信号分别为低频弱信号和高频信号.在无时滞反馈 ($\alpha = 0$) 时,根据经典的振动共振理论^[4],通过调节输入高频信号的幅值,系统响应在频率 ω 处的幅值会出现共振现象,使低频弱信号在系统输出中的作用得到增强.考虑时滞反馈时, Yang 和 Liu 发现^[15],当两信号都固定不变时,通过调节时滞参数可以有效地控制振动共振,从而控制低频弱信号对系统的响应.通常以系统对低频信号的响应幅值增益来度量振动共振的程度,其定义为

$$Q = \frac{\sqrt{Q_s^2 + Q_c^2}}{f}, \quad (2)$$

其中 Q_s 和 Q_c 分别为系统输出在频率 ω 处的正弦和余弦 Fourier 分量,

$$Q_s = \frac{2}{mT} \int_0^{mT} x(t) \sin(\omega t) dt, \\ Q_c = \frac{2}{mT} \int_0^{mT} x(t) \cos(\omega t) dt, \quad (3)$$

$T = 2\pi/\omega$, m 是正整数.定义 (2) 式表达的是微弱低频信号通过系统后被放大的程度,其分子部分就是响应在频率 ω 处的幅值.

2.1 时滞反馈对高频信号激励所引起响应的周期性影响

首先,只考虑高频信号的作用,即 $f = 0$ 的情形,此时方程 (1) 变为

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x^3(t) + x(t - \alpha) + F \cos(\Omega t). \quad (4)$$

系统的响应主要由外激信号的作用引起,由于受非

线性项的影响,假定方程 (4) 的解为

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(n\Omega t) + B_n \cos(n\Omega t)], \quad (5)$$

或者

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\Omega t + \Phi_n), \quad (6)$$

其中

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \\ \Phi_n = \text{atan}\left(\frac{B_n}{A_n}\right). \quad (7)$$

把方程 (5) 代入方程 (4),得到关于 A_n, B_n 的一系列方程组,其中关于 A_1, B_1 的方程组为

$$3A_1^3 + 3A_1B_1^2 - 4A_1 \cos(\Omega\alpha) - 4B_1 \sin(\Omega\alpha) - 4B_1\Omega = 0, \quad (8)$$

$$3B_1^3 + 3A_1^2B_1 - 4B_1 \cos(\Omega\alpha) + 4A_1 \sin(\Omega\alpha) + 4A_1\Omega - 4F = 0. \quad (9)$$

解非线性方程组是一个非常困难的问题,根据方程 (8) 和 (9) 较难得出 A_1 和 A_2 的具体解析式,但不难发现 A_1 和 B_1 的解是 $\Omega, F, \sin(\Omega\alpha), \cos(\Omega\alpha)$ 的函数.进而得出 C_1 也应该是 $\Omega, F, \sin(\Omega\alpha), \cos(\Omega\alpha)$ 的函数,即

$$C_1 = F_1[F, \Omega, \sin(\Omega\alpha), \cos(\Omega\alpha)], \quad (10)$$

其中 $F_1[\cdot]$ 表示函数的一般记法.在方程 (10) 中,容易发现

$$C_1(\alpha + 2\pi/\Omega) \\ = F_1[F, \Omega, \sin \Omega(\alpha + 2\pi/\Omega), \cos \Omega(\alpha + 2\pi/\Omega)] \\ = C_1(\alpha), \quad (11)$$

由此可见系统输出在频率 Ω 处的幅值是周期性变化的,且其周期恰好等于高频信号的周期,即 $2\pi/\Omega$.经过同样的推导可以证明,系统的输出在频率 $n\Omega$ ($n = 2, \dots, \infty$) 处的幅值也随时滞参数周期性变化,其周期为 $2\pi/(n\Omega)$.因此,系统对高频信号的响应是时滞参数 α 的周期函数,其最小正周期为 $2\pi/\Omega$.事实上,在系统 (4) 输出中,其最主要频率成分集中在 Ω 处,在其他频率处,响应的幅值极其微弱.

2.2 时滞反馈对低频信号激励所引起响应的周期性影响

考虑两个信号同时作用于系统,即 $F \neq 0, f \neq 0$ 的情形.为简便运算,设系统响应具有如下形

式的近似解 [7-9]

$$x(t) = y(t) + A \sin(\Omega t + \Theta) \quad (12)$$

其中 $y(t)$ 是与时间尺度 $T_L = 2\pi/\omega$ 相应的低频缓变成分, Θ 表示相位, A 是需要确定的常数. 因为时间尺度 $T_L = 2\pi/\omega$ 远大于 $T_H = 2\pi/\Omega$, 因此在 $0-T_H$ 的时间段内, 可以把 $y(t)$, $y(t-\alpha)$ 和 $f \cos(\omega t)$ 当做常数处理. 将 (12) 式代入 (1) 式, 并对 t 在 $0-T_H$ 的时间段内进行积分, 化简后得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) - y(t-\alpha) + y^3(t) + 3A^2/2y(t) \\ = f \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (13)$$

类似于 2.1. 节对方程 (4) 的分析, 设方程 (13) 的近似解为

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n\omega t) + a_n \cos(n\omega t)], \quad (14)$$

或者

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega t + \phi_n), \quad (15)$$

其中

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \text{atan}(b_n/a_n). \quad (16)$$

将方程 (14) 代入方程 (13), 得到关于 a_n, b_n 的一系列方程组, 其中关于 a_1, b_1 的方程组为

$$\begin{aligned} 3a_1^3 + 3a_1b_1^2 - 4a_1 \cos(\omega\alpha) - 4b_1 \sin(\omega\alpha) + 6a_1A^2 \\ - 4b_1\omega + 4f = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 3b_1^3 + 3a_1^2b_1 + 4a_1 \sin(\omega\alpha) - 4b_1 \cos(\omega\alpha) \\ + 6b_1A^2 + 4a_1\omega = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

根据方程 (17) 和 (18) 可知 b_1, b_2 的解是关于 $A, f, \omega, \sin(\omega\alpha), \cos(\omega\alpha)$ 的函数, 所以 c_1 也是关于 $A, f, \omega, \sin(\omega\alpha), \cos(\omega\alpha)$ 的函数, 记为

$$c_1 = f_1[A, f, \omega, \sin(\omega\alpha), \cos(\omega\alpha)]. \quad (19)$$

当 $\alpha_1 = \alpha + 2\pi/\omega$ 时,

$$\begin{aligned} f_1[A, f, \omega, \sin(\omega\alpha_1), \cos(\omega\alpha_1)] \\ = f_1[A, f, \omega, \sin(\omega\alpha), \cos(\omega\alpha)]. \end{aligned} \quad (20)$$

这就证明了 c_1 具有周期性, 即系统响应在频率 ω 处的幅值与时滞参数 α 之间具有周期性, 其周期为 $2\pi/\omega$.

2.3 数值仿真结果与分析

根据方程 (2) 的定义式, 直接对方程 (1) 进行数值仿真, 分析时滞反馈对振动共振产生的影响

并验证系统对低频信号响应的幅值增益具有两种不同的周期性. 本节采用文献 [17] 中的改进型 4 阶 Runge Kutta 算法, 离散公式为

$$\begin{aligned} k_1 &= -x(n)^3 + x(n - i\Delta\alpha/\Delta t) \\ &\quad + f \cos(\omega n\Delta t) + F \cos(\Omega n\Delta t), \\ k_2 &= -[x(n) + 0.5k_1]^3 + [x(n - i\Delta\alpha/\Delta t) \\ &\quad + 0.5k_1] + f \cos(\omega n\Delta t) + F \cos(\Omega n\Delta t), \\ k_3 &= -[x(n) + 0.5k_2]^3 + [x(n - i\Delta\alpha/\Delta t) \\ &\quad + 0.5k_2] + f \cos(\omega n\Delta t) + F \cos(\Omega n\Delta t), \\ k_4 &= -[x(n) + k_3]^3 + [x(n - i\Delta\alpha/\Delta t) + k_3] \\ &\quad + f \cos(\omega n\Delta t) + F \cos(\Omega n\Delta t), \end{aligned}$$

$$x(n+1) = x(n) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t \quad (21)$$

$$\left(\begin{aligned} n &= 1, 2, \dots, N, \quad N = \frac{t}{\Delta t}, \\ i &= 1, 2, \dots, M, \quad M = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} \end{aligned} \right),$$

其中 $\Delta\alpha, \Delta t$ 分别表示时滞步长和时间步长. (21) 式所标示的改进型 4 阶 Runge-Kutta 算法与标准 4 阶 Runge-Kutta 算法的计算精度差异不大, 但更便于实验数据的处理, 且文献 [18,19] 表明使用本节的算法与使用最简单的 Euler 算法进行数值模拟所得到的结论是一致的. 在本文的数值仿真计算中, 选取 $m = 30$.

参考定义式 (2), 定义系统对输入的高频信号的响应幅值增益为

$$R = \sqrt{R_s^2 + R_c^2}/F, \quad (22)$$

其中 R_s 和 R_c 分别为系统输出在高频信号频率 Ω 处的正弦和余弦 Fourier 分量,

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{2}{mT} \int_0^{mT} x(t) \sin(\Omega t) dt, \\ R_c &= \frac{2}{mT} \int_0^{mT} x(t) \cos(\Omega t) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

图 1 给出了较短的时滞区间 ($\alpha < 2\pi/\omega$) 内, 系统对两输入信号的响应幅值增益 Q 和 R 与时滞参数 α 之间的关系曲线. 图 1(a) 表明, 系统对两输入信号的响应幅值增益随着时滞参数的变化具有相同的周期性, 其周期为 $2\pi/\Omega$. 关于 R 与时滞参数 α 之间的周期性关系, 图 1(a) 的数值结果与 2.1. 节中得出的结论是一致的, 验证了解析分析的正确性. Q 随时滞参数的变化具有 $2\pi/\Omega$ 的周期性, 可以结合传统的振动共振理论进行解释, 即系统对低频信号的响应幅值增益与输入高频信号的幅值呈现非线性

性关系. 解析分析和数值结果都表明, 调节时滞参数等同于调节输入高频信号幅值引起的效应, 因此系统输出在频率 Ω 处的幅值随时滞参数以 $2\pi/\Omega$ 为周期进行变化就等同于在无时滞反馈的系统中输入高频信号的幅值以 $2\pi/\Omega$ 为周期进行变化, 所以引起了系统输出在频率 ω 处的响应幅值增益也以 $2\pi/\Omega$ 为周期进行变化. 图 1(b) 的数值结果验证了这一解释. 在 $\alpha = a$ 处, 系统响应在频率 ω 处的幅值达到最大, 继续增大 α 的效果等同于在传统的振动共振理论中继续增大输入高频信号的幅值, 故而 Q 会减小. 当 R 达到最大值时, 等同于输入的高频信号幅值达到最大值, 所以 Q 曲线在 $\alpha = b$ 处出现一个波谷. 继续增大 α 等同于减小输入高频信号的幅值, 所以 Q 会继续增大直到出现另一个峰值.

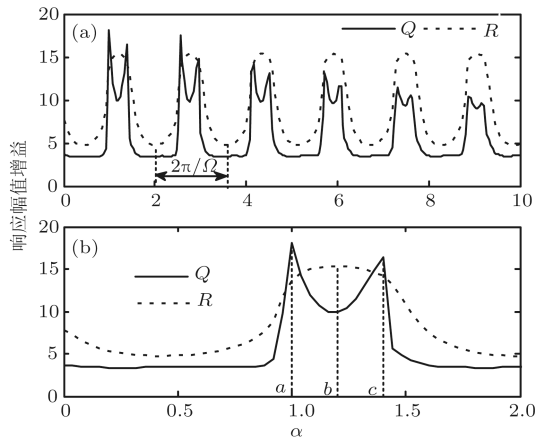


图 1 过阻尼双稳系统对两输入信号的响应幅值增益随时滞参数变化均呈现周期为 $2\pi/\Omega$ 的周期特性 $f = 0.02, F = 1.0, \omega = 0.01, \Omega = 4.0$

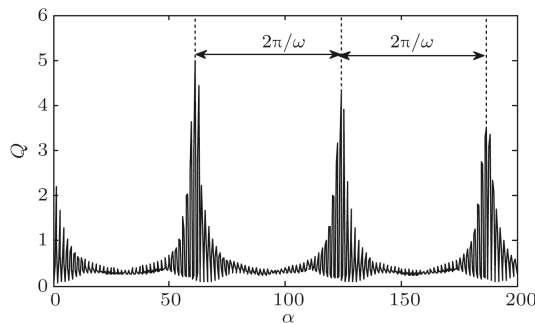


图 2 过阻尼双稳系统对低频信号的响应幅值增益随时滞参数变化呈现周期为 $2\pi/\omega$ 的周期特性 $f = 0.1, F = 1, \omega = 0.1, \Omega = 4.0$

在一个时滞周期 $2\pi/\Omega$ 内, Q 会出现两个峰值是因为时滞参数的变化使得系统输出中有两个高频信号的幅值会引起振动共振现象, 峰值的大小发生变化是因为系统对低频信号的响应不仅与高频信号引起的响应幅值有关, 而且其本身还直接受到时滞

反馈的影响.

图 2 给出了在较长的时滞区间 ($\alpha > 2\pi/\omega$) 内, 系统对低频信号的响应幅值增益 Q 与时滞参数 α 之间的关系曲线. 随着时滞参数的变化, Q 呈现周期性变化, 其周期为 $2\pi/\omega$, 验证了 2.2 节中解析分析的正确性. 在文献 [15] 中, 由于时滞参数的取值范围较小, 未发现这种周期性.

3 时滞反馈对 Duffing 振子系统中振动共振的影响

双频信号激励下, 分别在具有双势阱 (双稳态) 和单势阱 (单稳态) 的 Duffing 振子系统的线性位移项上引入时滞反馈, 得到方程

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \delta \frac{d}{dt}x(t) - \omega_0^2 x(t - \alpha) + \beta x(t)^3 = f \sin(\omega t) + F \sin(\Omega t), \quad (24)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \delta \frac{d}{dt}x(t) + \omega_0^2 x(t - \alpha) + \beta x(t)^3 = f \sin(\omega t) + F \sin(\Omega t), \quad (25)$$

其中时滞参数 $\alpha \geq 0$, δ 是阻尼系数, 且 δ, ω_0, β 都为正实数, 两周期信号具有和第 2 节的周期信号相同的特性. 本节使用定义 (2) 式对系统 (22) 和系统 (23) 直接进行数值仿真, 研究时滞参数对振动共振现象的影响. 在数值仿真的过程中, 相关参数选取为 $\omega_0 = 1, \delta = 3\omega_0/\sqrt{2}, \beta = 10, f = 0.1, \omega = 0.1$.

当不考虑时滞反馈, 即 $\alpha = 0$ 时, 图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了系统 (22) 和系统 (23) 对低频信号的响应幅值增益 Q 与高频信号幅值 F 之间的函数关系. 图 3(a) 表明双稳 Duffing 系统中存在经典的振动共振现象, 且 Ω 的值越大, 达到共振时所需 F 的值也越大. 对于 $\Omega = 3$, 当 $F < 1.3$ 时, Q 随 F 的增大而缓慢地增大; 当 $1.3 < F < 1.75$ 时, Q 随 F 的增大迅速增大; 当 $F = 1.75$ 时系统共振达到最佳程度; 当 $F > 1.75$ 时随 F 的增大 Q 单调减小. 图 3(b) 表明, 在选取本节的仿真参数时, 通过调节 F 不能引发振动共振现象, Q 随 F 的增大单调减小. 分别对应于图 3(a) 未发生共振和发生共振的情形, 图 4 给出了系统 (22) 响应的时间序列. 当未发生共振时, 系统的输出只局限在初始条件所确定的势阱中, 未出现势阱之间的穿越, 低频信号不能被放大. 当共振发生时, 系统的输出实现了两势阱之间的穿越, 低频信号被有效地放大.

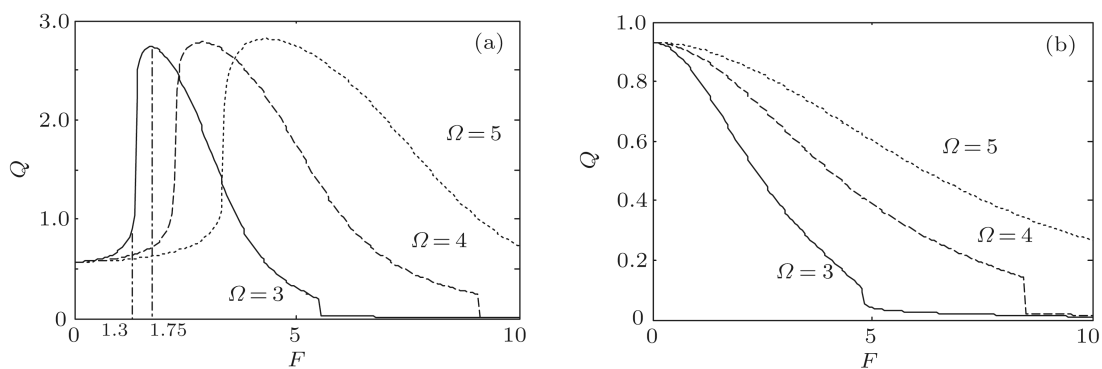


图3 不考虑时滞反馈 ($\alpha = 0$) 时, (a) 双稳 Duffing 系统中的经典振动共振现象; (b) 单稳 Duffing 系统中未出现振动共振现象

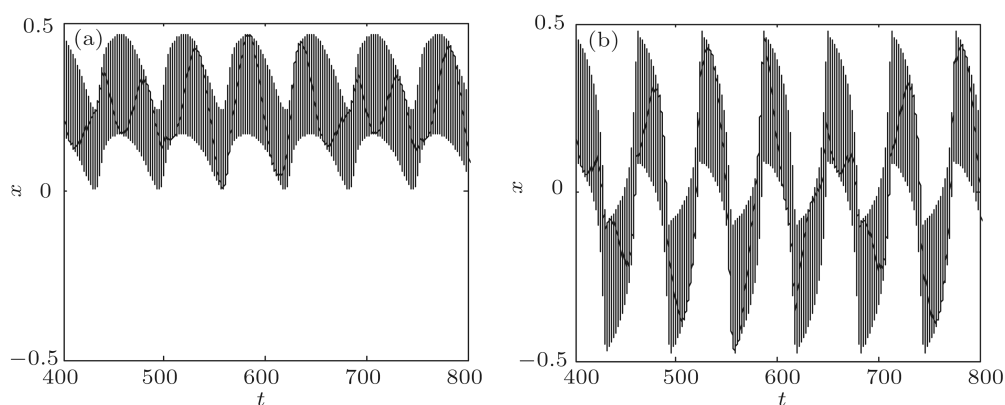


图4 不考虑时滞反馈 ($\alpha = 0$) 时, (a) 双稳 Duffing 系统中的经典振动共振现象; (b) 单稳 Duffing 系统中未出现振动共振现象

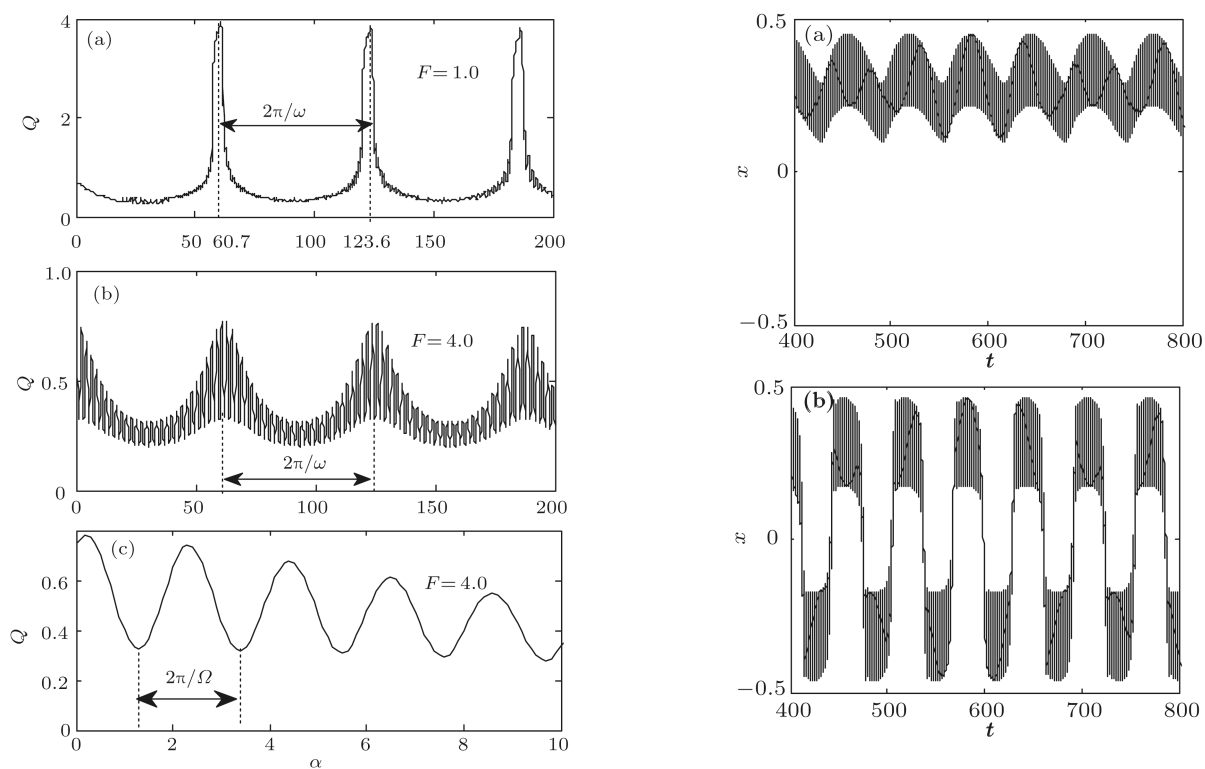


图5 双稳 Duffing 系统中时滞参数变化引起系统对低频信号响应幅值增益的周期性变化 $\Omega = 3$

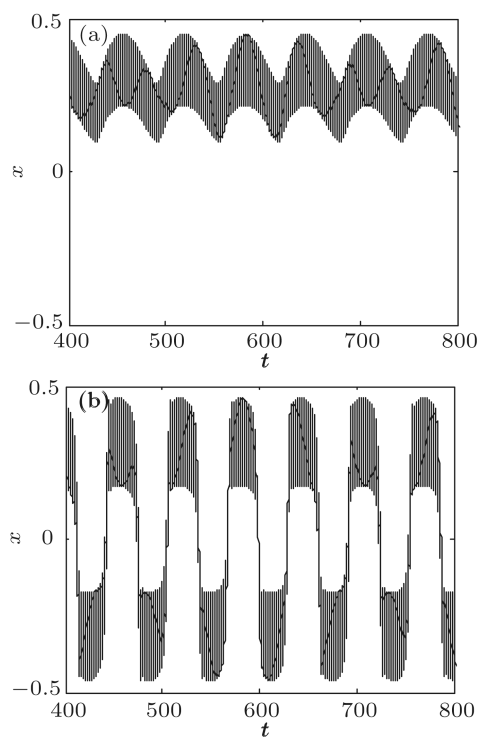


图6 双稳 Duffing 系统中, $F = 1.0$, $\Omega = 3$ 时, (a) 不考虑时滞反馈且振动共振未发生时的时间序列, $\alpha = 0$; (b) 时滞反馈引发振动共振时的时间序列, $\alpha = 60.7$

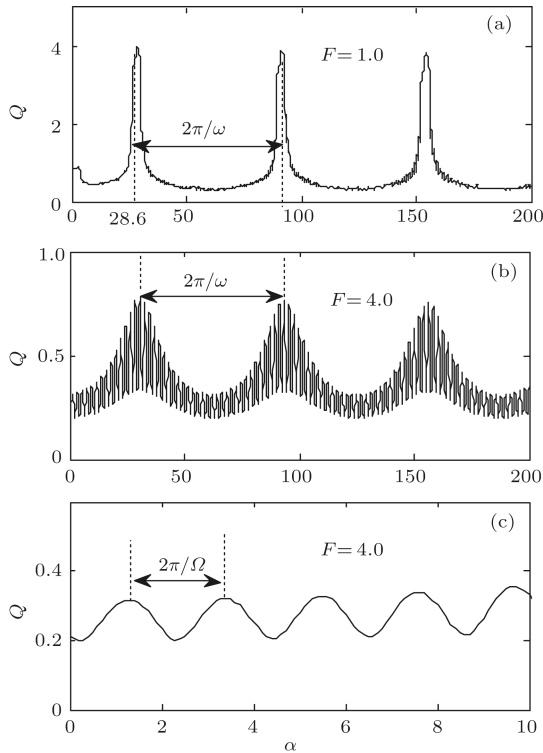


图7 单稳 Duffing 系统中时滞参数变化引起系统对低频信号响应幅值增益的周期性变化 $\Omega = 3$

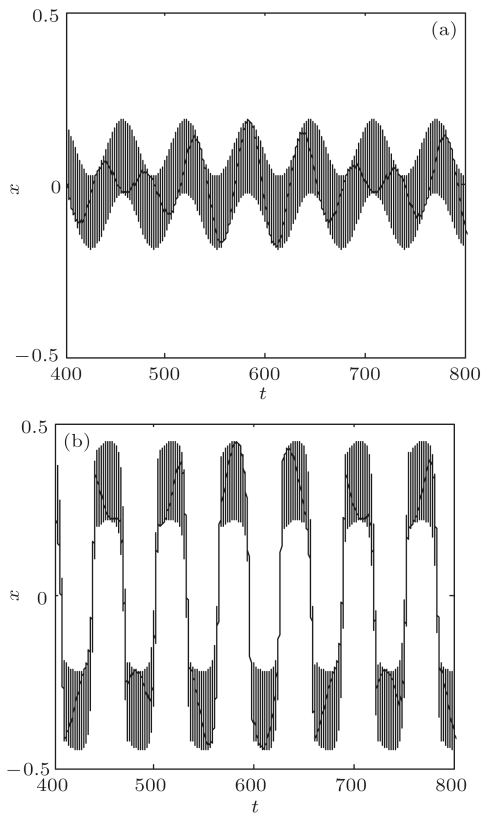


图8 单稳 Duffing 系统中, $F = 1.0, \Omega = 3$ 时, (a) 不考虑时滞反馈且振动共振未发生时的时间序列, $\alpha = 0$; (b) 时滞反馈引发振动共振时的时间序列, $\alpha = 28.6$

当输入的双频信号固定不变时, 图 5 给出了时

滞参数 α 对低频信号响应幅值增益 Q 的影响. 图 5 表明随着时滞参数的增大, 系统对低频信号的响应幅值增益同时呈现两种不同的周期性, 它们分别为两输入信号的周期. 对比图 5(a) 和图 3(a) 还可以发现, 使用调节时滞反馈的方法能够使系统达到更强的共振程度. 图 6 给出了时滞参数对系统 (22) 输出的时间序列的影响. 在图 6(b) 中, 当时滞反馈引发共振时, 系统的输出与随机系统中发生随机共振时输出的时间序列极为相似, 这也从一个侧面说明了振动共振与随机共振之间的相似性.

图 3(b) 已经表明, 在单稳 Duffing 系统 (23) 中不存在经典的振动共振现象. 在图 7 中, 保持其余参数不变, 通过调节时滞参数, 在系统 (23) 中实现了周期性的振动共振, 这进一步反映了利用时滞反馈控制振动共振的重要性, 它可以在原本不存在振动共振的系统中诱发振动共振现象, 进而放大微弱低频信号. 图 8 给出了时滞参数对系统 (23) 输出时间序列的影响, 发现即使在单稳系统中, 振动共振发生时系统输出在形式上也可以实现类似于双稳系统中规律性的“穿越”.

有关 Duffing 系统中时滞参数变化引起的周期性振动共振的解析证明, 其方法与第 2 节的证明方法相同, 本节不再赘述.

4 总结与讨论

分别研究了高频信号和微弱低频信号同时激励下含时滞反馈的过阻尼双稳系统和 Duffing 系统中的振动共振现象. 当时滞反馈加在线性位移项上时, 理论分析和数值结果都表明系统对低频信号响应的幅值增益随时滞参数的变化同时呈现两种不同的周期性, 它们分别等于输入的高频信号和低频信号的周期. 对于不存在经典振动共振的单稳 Duffing 系统, 通过调节时滞反馈参数, 也可以诱发振动共振现象. 利用调节时滞反馈的方法不仅可以有效地控制非线性系统中的振动共振现象, 而且还可以进一步增强系统对微弱低频信号的响应. 本文的结果在科学和工程领域中对信号的控制及微弱低频信号的检测和放大问题提供了一种思路.

目前, 有关时滞反馈在受多频信号激励的非线性系统中所引起的动力学效应的研究还处于初级阶段, 本文所讨论的只是最简单的情形. 首先, 时滞反馈的形式是线性的, 对于含非线性时滞反馈的情

况则要复杂得多,而且时滞反馈限制在位移项上,在速度项上含时滞反馈的情形又当如何还有待于进一步的讨论.其次,本文的系统是最简单的情形,讨论主要是针对过阻尼情形进行的.对于欠阻尼情形,系统响应则可能会出现混沌,发散,同步等多种动力学现象.最后,时滞反馈对广泛存在的其他各

类系统,比如空间周期系统,高维耦合系统,甚至复杂网络系统中振动共振的影响也有待于进一步的讨论.基于振动共振机理,还可以研究如何利用时滞反馈来提高信号在振子序列中传播的效率,甚至有可能协助解决有关系统对多频信号响应的诸多难题.

-
- [1] Knoblauch A, Palm G 2005 *BioSystems* **79** 83
- [2] Su D, Chiu M, Chen C 1996 *J. Soc. Precis. Eng.* **18** 161
- [3] Maksimov A 1997 *Ultrasonics* **35** 79
- [4] Landa P S, McClintock P V E 2000 *J. Phys. A* **33** L433
- [5] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [6] Gitterman M 2001 *J. Phys. A* **34** L355
- [7] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuan M A F 2009 *Chaos* **19** 043128
- [8] Jeyakumari S, Chinnathambi V, Rajasekar S, Sanjuán M A F 2009 *Phys. Rev. E* **80** 046608
- [9] Lin M, Huang Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6173 (in Chinese) [林敏, 黄咏梅 2007 物理学报 **56** 6173]
- [10] Lin M, Meng Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3627 (in Chinese) [林敏, 孟莹 2010 物理学报 **59** 3627]
- [11] Baltanás J P, López L, Blechman I I, Landa P, Zaikin A, Kurths J, Sanjuán M A F 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066119
- [12] Ullner E, Zaikin A, García-Ojalvo J, Bascónes R, Kurths J 2003 *Phys. Lett. A* **312** 348
- [13] Deng B, Wang J, Wei X 2009 *Chaos* **19** 013117
- [14] Deng B, Wang J, Wei X, Tsang K M, Chan W L 2010 *Chaos* **20** 013113
- [15] Yang J H, Liu X B 2010 *J. Phys. A* **43** 122001
- [16] Yao C, Zhan M 2010 *Phys. Rev. E* **81** 061129
- [17] Yang D X, Hu N Q 2003 *J. Natl. Univ. Def. Technol.* **25** 91 (in Chinese) [杨定新, 胡鸢庆 2003 国防科技大学学报 **25** 91]
- [18] Yang J H, Liu X B 2010 *Chaos* **20** 033124
- [19] Yang J H, Liu X B 2010 *Phys. Scr.* **82** 025006

Analysis of periodic vibrational resonance induced by linear time delay feedback*

Yang Jian-Hua Liu Xian-Bin[†]

(*Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*)

(Received 16 July 2010; revised manuscript received 15 April 2011)

Abstract

Under the excitations of the high-frequency and weak low-frequency signals, the effects of linear time delay feedback on the vibrational resonance in overdamped bistable system and Duffing systems are investigated respectively. Both the analytical and the numerical results show that the response amplitude of the system to the low-frequency signal varies periodically with the delay parameter simultaneously (with two different periods, i.e., the periods of the two exciting signals). Numerical results also indicate that the delay feedback can induce vibrational resonance in the monostable Duffing system in which there exists no traditional vibrational resonance. By adjusting the delay parameter, not only the vibrational resonance can be effectively controlled, but also the response of the system to the weak low-frequency signal can be further improved.

Keywords: bistable system, Duffing system, linear time delay feedback, vibrational resonance

PACS: 05.45.-a, 02.30.Ks, 05.90.+m

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11072107), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20093218110003).

[†] E-mail: xbliu@nuaa.edu.cn