

# 两量子比特与谐振子相耦合系统中的量子纠缠演化特性\*

夏建平<sup>1)</sup> 任学藻<sup>1)†</sup> 丛红璐<sup>2)</sup> 王旭文<sup>1)</sup> 贺树<sup>1)</sup>

1) (西南科技大学理学院, 绵阳 621010)

2) (北京交通大学海滨学院, 黄骅 061100)

(2011年1月4日收到; 2011年3月4日收到修改稿)

在非旋波近似下, 利用相干态正交化展开方法, 对两量子比特与谐振子相耦合系统中的量子纠缠演化特性进行了精确计算. 讨论了在共振时, 两量子比特和谐振子耦合系统基态的性质以及量子比特和谐振子之间的纠缠与量子比特-量子比特间的纠缠的不同. 结果表明: 当不考虑外场时, 量子比特-量子比特间的纠缠随着耦合强度的增大从1迅速地减小到零, 表明了量子比特-量子比特间的纠缠对耦合强度是非常敏感的; 而量子比特和谐振子之间的纠缠随着耦合强度的增大从零迅速地增大, 但不能达到理论上的最大值2; 当初始时刻两量子比特没有纠缠时, 在弱耦合强度下, 真空场不能导致纠缠的产生; 而强的耦合非旋波效应则可以导致纠缠的突然产生现象.

**关键词:** 相干态正交化展开, 非旋波近似, 量子纠缠

**PACS:** 42.50.-P

## 1 引言

量子纠缠被认为是一种量子信息传送和处理的重要资源, 在量子信息和量子计算<sup>[1]</sup>领域中, 纠缠起着很关键的作用<sup>[2,3]</sup>, 它被认为是量子信息等领域的一种重要的资源. 人们从理论和实验方面对两原子的纠缠进行了大量的研究<sup>[4-8]</sup>, 如 Eberly<sup>[9]</sup> 发现由于量子噪音的影响, 纠缠在演化了一段时间后突然减少到零, 这就是所谓的纠缠突然死亡. 而 Zhang 和 Chen<sup>[10,11]</sup>, Metwally<sup>[12]</sup> 也研究了 Tavis-Cummings<sup>[13]</sup> 模型的两原子之间的突然死亡现象. 在过去所进行的大量工作中, 人们都采用了旋波近似, 这在原子与光场耦合强度较小时是适用的. 但是, 随着实验条件和实验方法的提高, 腔场与原子相互作用的耦合强度得到了显著提高<sup>[14,15]</sup>, 在这种情况下非旋波项将不可忽略<sup>[16,17]</sup>.

在量子光学系统中, 两量子比特系统和谐振子是两个最基本的系统. 在过去数年间, 两量子比特和谐振子相耦合的系统已被大量研究, 并发现了许多有趣的现象, 如布居数的坍塌与恢复、量子比特

与谐振子间的纠缠等. 而对此系统在非旋波近似下的量子纠缠研究却还几乎没有. 因此, 在非旋波近似下, 对两量子比特和谐振子相耦合系统的量子纠缠研究是很有必要的, 这不仅有重要的理论意义, 而且对实验也能起到指导作用.

## 2 模型及求解

描述两个量子比特和一个腔模相耦合的系统的 Hamilton 可以表示为

$$H = \omega_0 a^+ a + \lambda (a^+ + a) \sum_{i=1}^2 \sigma_z^i + \frac{\Omega}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_x^i + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \sigma_z^i, \quad (1)$$

式中,  $a^+$ ,  $a$  分别为腔场的产生和湮没算符;  $\Omega$ ,  $\omega_0$  分别为两量子比特的间隔和腔场频率,  $\varepsilon$  为一可调外场,  $\lambda$  为原子与光场之间的耦合常数,  $\sigma_x^i$  和  $\sigma_z^i$  是 Pauli 矩阵. 其中  $\sigma_z^i | \uparrow \rangle_i = | \uparrow \rangle_i$ ,

\* 西南科技大学研究生创新基金 (批准号: 10ycjj22) 资助的课题.

† E-mail: rxz63@sohu.com

$\sigma_z^i |\downarrow\rangle_i = -|\downarrow\rangle_i$ . 令定态波函数为

$$|\rangle = |\varphi_1\rangle |\uparrow\uparrow\rangle + |\varphi_2\rangle |\uparrow\downarrow\rangle + |\varphi_3\rangle |\downarrow\uparrow\rangle + |\varphi_4\rangle |\downarrow\downarrow\rangle. \quad (2)$$

将 (2) 式代入 (1) 式, 同时做如下平移变换可得 [18–24]

$$\begin{aligned} A &= a + \frac{2\lambda}{\omega_0}, \\ B &= a - \frac{2\lambda}{\omega_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

$A, B$  为新的 Bose 算符. 经化简可得以下方程组:

$$\left\{ \omega_0 \left[ A^+ A - \left( \frac{2\lambda}{\omega_0} \right)^2 \right] + \varepsilon \right\} |\varphi_1\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_2\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_3\rangle = E |\varphi_1\rangle, \quad (4)$$

$$\omega_0 a^+ a |\varphi_2\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_1\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_4\rangle = E |\varphi_2\rangle, \quad (5)$$

$$\omega_0 a^+ a |\varphi_3\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_1\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_4\rangle = E |\varphi_3\rangle, \quad (6)$$

$$\left\{ \omega_0 \left[ B^+ B - \left( \frac{2\lambda}{\omega_0} \right)^2 \right] - \varepsilon \right\} |\varphi_4\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_2\rangle + \frac{\Omega}{2} |\varphi_3\rangle = E |\varphi_4\rangle. \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= \sum_n c_n |n\rangle_A, \\ |\varphi_2\rangle &= \sum_n d_n |n\rangle, \\ |\varphi_3\rangle &= \sum_n e_n |n\rangle, \\ |\varphi_4\rangle &= \sum_n f_n |n\rangle_B, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} |n\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^+)^n |0\rangle_A, \\ |0\rangle_A &= e^{-\frac{2\lambda}{\omega_0} a^+ - \frac{4\lambda^2}{2\omega_0^2}} |0\rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} |n\rangle_B &= \frac{1}{\sqrt{n!}} (B^+)^n |0\rangle_B, \\ |0\rangle_B &= e^{\frac{2\lambda}{\omega_0} a^+ - \frac{4\lambda^2}{2\omega_0^2}} |0\rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

可以证明

$$\begin{aligned} A^+ A |n\rangle_A &= n |n\rangle_A, \\ B^+ B |n\rangle_B &= n |n\rangle_B, \\ A |m\rangle_A &= \delta_{mn}, \\ B |m\rangle_B &= \delta_{mn}. \end{aligned}$$

将 (8), (10) 式代入 (4)–(7) 式, 则可化为以下方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \sum_n d_n |n\rangle_A + \frac{\Omega}{2} \sum_n e_n |n\rangle_B + \left\{ \omega_0 \left[ m - \left( \frac{2\lambda}{\omega_0} \right)^2 \right] + \varepsilon \right\} c_m &= E c_m, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \sum_n c_n |n\rangle_A + \frac{\Omega}{2} \sum_n f_n |n\rangle_B + \omega_0 m d_m &= E d_m, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \sum_n c_n |n\rangle_A + \frac{\Omega}{2} \sum_n f_n |n\rangle_B + \omega_0 m e_m &= E e_m, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{2} \sum_n d_n |n\rangle_B + \frac{\Omega}{2} \sum_n e_n |n\rangle_B + \left\{ \omega_0 \left[ m - \left( \frac{2\lambda}{\omega_0} \right)^2 \right] - \varepsilon \right\} f_m &= E f_m. \end{aligned} \quad (14)$$

令

$$\begin{aligned} D_{mn}(x) &= \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \frac{\sqrt{m!n!}}{i!(m-i)!(n-i)!} (-1)^{-i} x^{m+n-2i} e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ \langle m|n\rangle_A &= (-1)^m D_{mn}\left(\frac{2\lambda}{\omega_0}\right), \\ \langle m|n\rangle_B &= (-1)^n D_{mn}\left(\frac{2\lambda}{\omega_0}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (11)–(14) 式, 通过求解  $4N + 4$  个本征方程 ( $m, n = 0, \dots, N$ ), 可以得到系统的本征波函数  $\{c_n^i\}, \{d_n^i\}, \{e_n^i\}$  与  $\{f_n^i\}$  和能谱  $\{E^i\}$ .

### 3 两量子比特与谐振子相耦合系统基态的纠缠性质研究

图 1 描述了两量子比特与谐振子的耦合系统共振时基态的纠缠性质, 其中实线描述的是两量子比特之间的纠缠性质, 用共生纠缠度来度量; 虚线描述了两量子比特和谐振子之间的纠缠性质, 用冯诺依曼熵来度量. 当  $\varepsilon = 0$  (图 1(a) 所示), 可以看到, 两量子比特之间的纠缠随着耦合强度的增加从最大值 1 迅速减小到零, 此时量子比特与量子比特之间是处于可分离的状态, 表明了两量子比特之间的纠缠在超强耦合区是极其脆弱的. 而相反的是, 两量子比特与光场间的纠缠却随着耦合强度的增加从零迅速地增大, 最后趋于固定值 1; 另外, 由于我们考虑的是两量子比特的系统, 熵的最大值应该可以达到  $\ln 4 = 2$ , 但通过数值计算发现, 熵的最大值

不能到 2. 比较图 1 中的 (a)—(d) 发现, 当外场不为零时, 两量子比特之间的纠缠随着耦合强度的增加先下降, 然后又上升, 最后达到最大值 1, 并且随着外场的增加, 两量子比特之间纠缠的平均值明显增大. 这表明随着外场的加强, 两量子比特之间的纠缠得到了加强. 而量子比特和谐振子间的纠缠随耦合强度的演化规律与两量子比特间随耦合强度的

演化规律正好相反. 因此, 尽管两种度量方法不同, 但我们还是可以认为, 量子比特 - 量子比特间纠缠的减弱是由于量子比特 - 量子比特间的纠缠转化为量子比特 - oscillator 之间的纠缠或者量子比特 - 量子比特间纠缠的增强源于量子比特 - oscillator 之间纠缠的减弱.

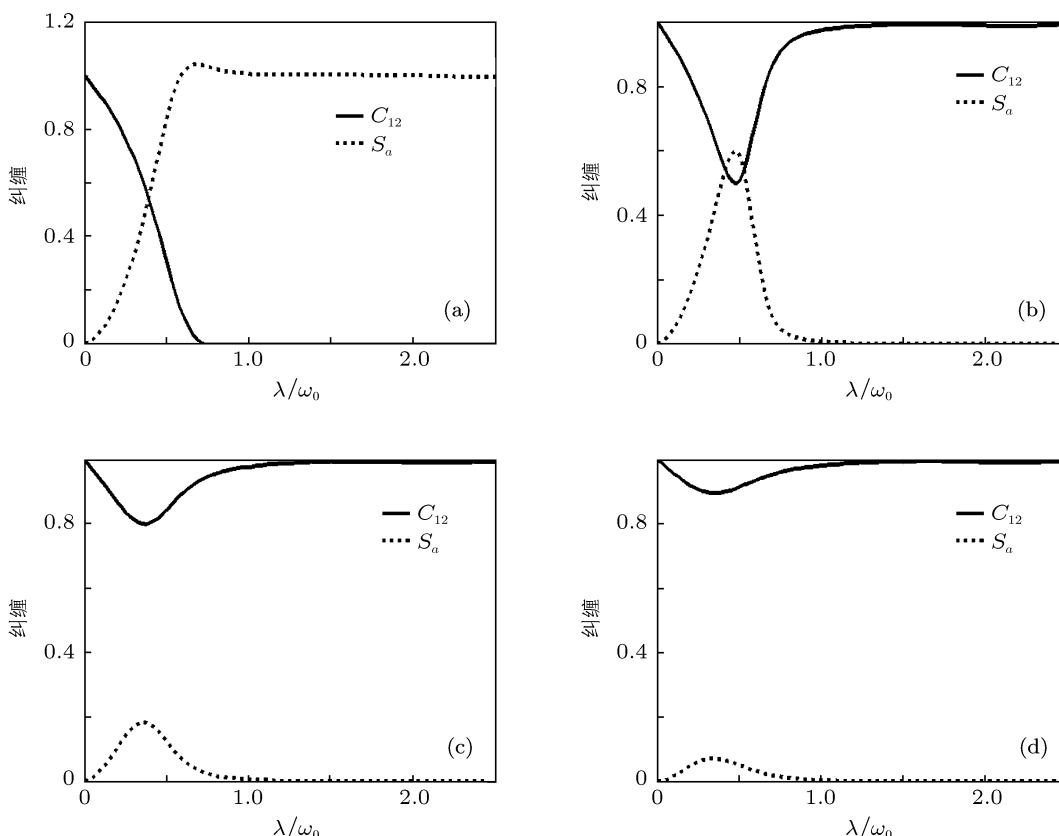


图 1 量子比特与谐振子相耦合的系统基态的纠缠性质 (a)  $\epsilon/\omega_0 = 0$ ; (b)  $\epsilon/\omega_0 = 0.1$ ; (c)  $\epsilon/\omega_0 = 0.5$ ; (d)  $\epsilon/\omega_0 = 1$

#### 4 两量子比特间的纠缠随时间的演化

图 2 描述了共振时两量子比特间的纠缠在不同耦合强度下随时间的演化, 且参数  $\epsilon = 0$ . 其中两量子比特初始时刻制备在最大纠缠的 Bell 态  $1/\sqrt{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$ , 谐振子处于真空态. 当  $\lambda/\omega_0 = 0.01$  (如图 2(a) 所示), 这时耦合强度为弱耦合区, 通过数值计算表明, 两量子比特间纠缠呈现出很好的周期性演化. 当  $\lambda/\omega_0 = 0.1$  (如图 2(b) 所示) 时, 由于耦合强度处于强耦合区, 此时非旋波效应比较明显, 因此, 演化曲线出现了一些凸起, 演化有一定的周期, 与图 2(a) 比较可以发现, 两量子比特间纠缠的平均值略大. 继续增大耦合强

度 (如图 2(c) 和 (d) 所示), 通过与前两种情况相比较发现, 纠缠的平均值出现减小, 并且出现了纠缠的突然死亡现象, 纠缠的演化变得没有任何周期性, 且耦合强度越大, 两量子比特处于可分离态的时间就越长.

图 3 描述了共振时两量子比特间的纠缠性质, 其中参数  $\epsilon = 0$ , 两量子比特处于  $1/2(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) + 1/2(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$ , 谐振子依然处于真空态. 很显然, 这是一个可分离态, 因此两量子比特的初始纠缠为零. 当  $\lambda/\omega_0 = 0.01$  时 (如图 3(a) 所示), 随着时间的演化, 两量子比特间始终不能产生纠缠, 这说明在给出的初始条件下, 真空涨落不能引起两量子比特间的纠缠. 当  $\lambda/\omega_0 = 0.1$  时 (如图 3(b) 所

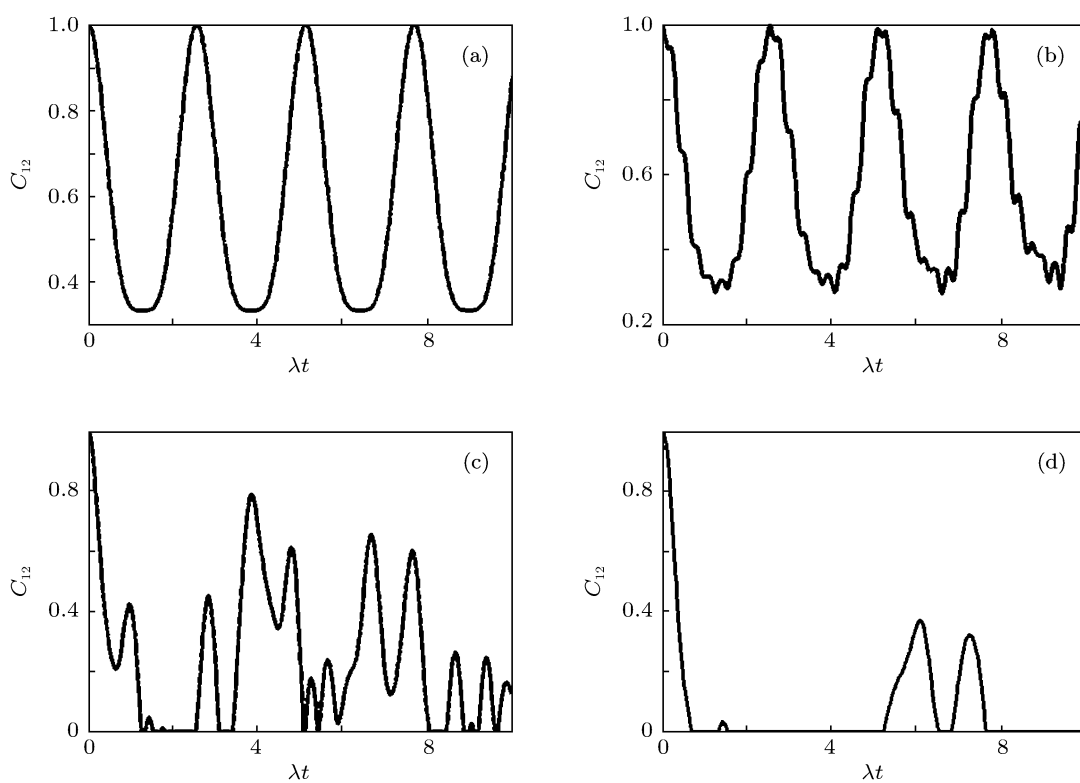


图2 在不同的耦合强度下两量子比特间的纠缠随时间的演化 (a)  $\lambda/\omega_0 = 0.01$ ; (b)  $\lambda/\omega_0 = 0.1$ ; (c)  $\lambda/\omega_0 = 0.06$ ; (d)  $\lambda/\omega_0 = 1$

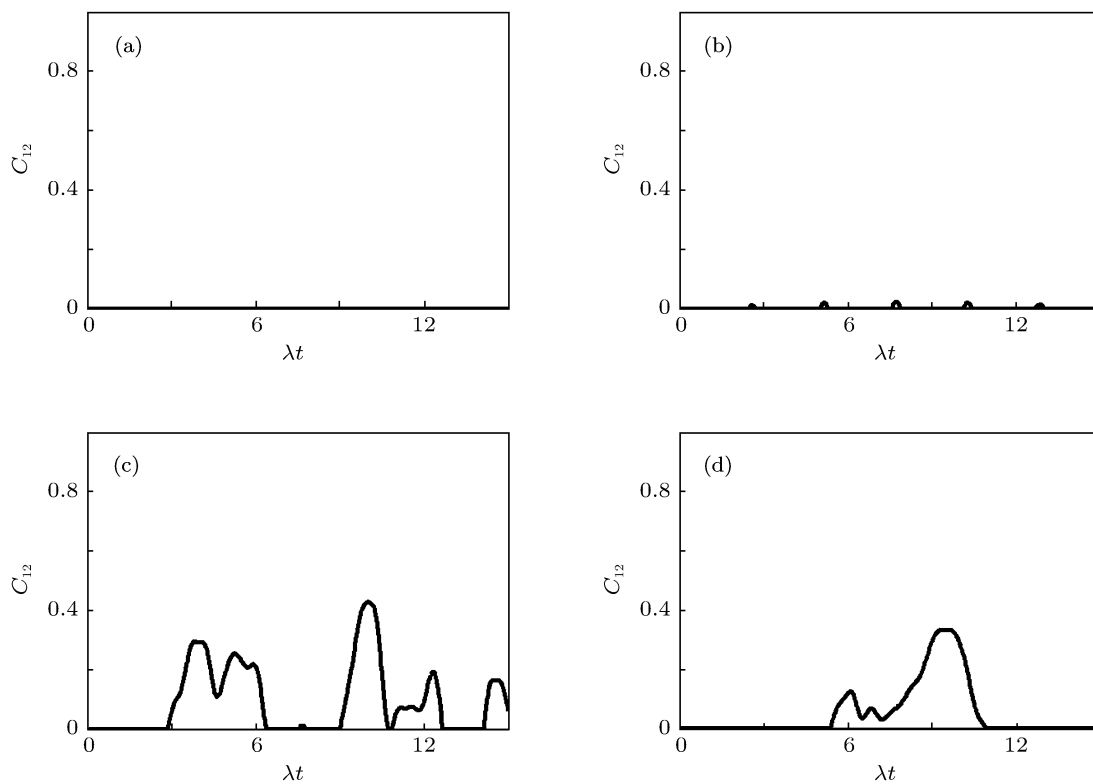


图3 在不同的耦合强度下两量子比特间的纠缠随时间的演化 (a)  $\lambda/\omega_0 = 0.01$ ; (b)  $\lambda/\omega_0 = 0.1$ ; (c)  $\lambda/\omega_0 = 0.06$ ; (d)  $\lambda/\omega_0 = 1$ ;  $\lambda/\omega_0 = 0.6$ ;  $\lambda/\omega_0 = 1$

示), 可以清楚地看到, 在开始一段时间, 两量子比特一直处于可分离态, 到某个时刻起, 它们突然被纠缠起来了, 这就是所谓的突然产生现象. 由于耦合强度不是太强, 系统产生的虚光子数目较少, 因此, 不能使两量子比特产生强的纠缠, 但是突然产生和死亡的演化规律有很好的周期性. 继续增大耦合强度 (如图 3(c) 和 (d)), 两量子比特间依然有纠缠的产生, 此时, 两量子比特间的纠缠较强. 通过比较这四幅子图可以知道, 随着耦合强度的增加, 两量子比特间纠缠的平均值是先增大后减小, 而并非耦合强度越大, 纠缠就越大. 而根据文献 [8] 可知在旋波下任意时刻原子之间都是不能产生纠缠的, 这是非旋波近似和旋波近似的最大区别.

## 5 结论

1) 本文讨论了在共振时, 两量子比特和谐振子耦合系统基态的性质, 也考虑了外场对系统纠缠性质的影响. 当不考虑外场时, 量子比特 - 量子比特间的纠缠随着耦合强度的增大从 1 迅速地减小到零, 表明了量子比特 - 量子比特间的纠缠对耦合强

度是非常敏感的. 我们还考虑了量子比特和谐振子之间的纠缠, 与量子比特 - 量子比特间的纠缠不同, 量子比特和谐振子之间的纠缠随着耦合强度的增大从零迅速地增大, 但不能达到理论上的最大值 2; 当考虑外场时, 量子比特 - 量子比特间的纠缠随着耦合强度的增大先减小后又增大到最大值 1; 而量子比特 - 谐振子间的纠缠随着耦合强度的增大先增大后又减小到最小值 0. 但不管有没有外场的存在, 这两种纠缠随耦合强度的演化趋势正好相反. 因此, 即便两种纠缠的度量方法不同, 我们还是可以认为, 量子比特 - 量子比特间的纠缠和量子比特 - 谐振子间的纠缠可以相互转化.

2) 我们讨论了在不同耦合强度下两量子比特随时间的演化规律, 通过研究发现, 在给出的初始纠缠态下: 当初始时两量子比特有纠缠时, 两量子比特间纠缠呈现出很好的周期性演化, 当耦合强度较大时, 非旋波效应明显, 且出现了纠缠的突然死亡现象; 当初始时刻没有纠缠时, 在弱耦合强度下, 真空场不能导致纠缠的产生; 而强的耦合非旋波效应可以导致纠缠的突然产生现象.

- 
- [1] Chen Q, Feng M, Du J F 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010308  
 [2] Cubitt T S, Verstraete F, Cirac J I 2005 *Phys. Rev. A* **71** 052308  
 [3] Carvalho A R R, Mintert F, Palzer S, Buchleitner A 2007 *Eur. Phys. J. D* **41** 425  
 [4] Jing J, Lü Z G, Ficek Z 2009 *Phys. Rev. A* **79** 044305  
 [5] Yöncü M, Yu T, Eberly J H 2006 *J. Phys. B: At. Mol. Opt.* **39** 621  
 [6] Sainz I, Björk G 2007 *Phys. Rev. A* **76** 042313  
 [7] Chan S, Reid M D, Ficek Z 2009 *J. Phys. B* **42** 065507  
 [8] Cui H T, Li K, Yi X X 2006 *Phys. Lett. A* **365** 44  
 [9] Yu T, Eberly J H 2004 *Phys. Rev. L* **93** 140404  
 [10] Zhang G F, Chen Z Y 2007 *Opt. Commun.* **275** 274  
 [11] Zhang G F 2007 *Chin. Phys.* **16** 1885  
 [12] Metwally N 2008 *Int. J. Thero. Phys.* **47** 623  
 [13] Tavis M, Cummings F W 1968 *Phys. Rev. A* **170** 379  
 [14] Irish E K, Gea-Banacloche J, Marin I 2006 *Phys. Rev. B* **72** 195410  
 [15] Gunter G, Anappara A A, Hees J 2009 *Nature* **458** 07838  
 [16] Jia F, Xie S Y, Yang Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5835 (in Chinese) [贾飞, 谢双媛, 羊亚平 2006 物理学报 **55** 5835]  
 [17] Gambetta J, Blais A, Schuster D I 2006 *Phys. Rev. A* **74** 042318  
 [18] Chen Q H, Zhang Y Y, Liu T 2008 *Phys. Rev. A* **78** 051801  
 [19] Liu T, Zhang Y Y, Chen Q H, Wang K L 2009 *Phys. Rev. A* **80** 023810  
 [20] Wang K L, Liu T, Feng M 2006 *Eur. Phys. J. B* **54** 283  
 [21] Ren X Z, Jiang D L, Cong H L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 090309  
 [22] Ren X Z, Jiang D L, Cong H L, Liao X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 5406 (in Chinese) [任学藻, 姜道来, 丛红璐, 廖旭 2009 物理学报 **58** 5406]  
 [23] Xia J P, Ren X Z, Cong H L, Jiang D L, Liao X 2010 *Acta Photon. Sin.* **39** 1621 (in Chinese) [夏建平, 任学藻, 丛红璐, 姜道来, 廖旭 2010 光子学报 **39** 1621]  
 [24] Huang S W, Liu T, Wang K L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2033 (in Chinese) [黄书文, 刘涛, 汪克林 2010 物理学报 **59** 2033]

# Quantum evolution of entanglement property in two-qubit and oscillator coupling system\*

Xia Jian-Ping<sup>1)</sup> Ren Xue-Zao<sup>1)†</sup> Cong Hong-Lu<sup>2)</sup> Wang Xu-Wen<sup>1)</sup> He Shu<sup>1)</sup>

1) (College of Science, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

2) (Physics Group, Beijing Jiaotong University Hai Bin College, Huanghua 061100, China)

(Received 4 January 2011; revised manuscript received 4 March 2011)

## Abstract

Under the non-rotating wave approximation, the quantum evolution of entanglement property of a two-qubit and oscillator coupling system is accurately investigated by the method of coherent-state orthogonalization expansion. The property of the ground state for qubit-oscillator system and the difference between qubit-oscillator entanglement and qubit-qubit entanglement when resonant vibration occurs are discussed. The calculation results show that when the external field is not taken into consideration, the qubit-qubit entanglement reduces from 1 to 0 rapidly with the increase of coupling strength, indicating the strong sensitivity of the entanglement to the coupling strength. On the contrary, with the increase of the coupling the qubit-oscillator entanglement rises from 0, but does not reach the maximum value 2. At the beginning, when the two qubits do not entangle, the vacuum field does not lead to the entanglement in weak coupling. However, the strong coupling can induce the sudden appearance of the entanglement.

**Keywords:** coherent-state orthogonalization expansion, non-rotating wave approximation, quantum entanglement

**PACS:** 42.50.-P

---

\* Project supported by the Postgraduate Venture Funds of Southwest University of Science and Technology, China (Grant No. 10ycjj22).

† E-mail: rxz63@sohu.com