

反馈方法在离子阱 Doppler 冷却中的应用研究*

蒋智[†] 陈平形

(国防科学技术大学理学院, 长沙 410072)

(2011 年 5 月 20 日收到; 2011 年 9 月 1 日收到修改稿)

离子阱中离子的快速有效冷却在量子信息处理、光频标等领域都有重要的意义. 基于 Steixner 等提出的量子反馈模型, 将反馈方法应用于离子的 Doppler 冷却. 首先理论分析了该模型下离子运动信息的获取方式以及反馈对离子运动的影响, 并推导出了存在反馈时离子运动所满足的方程, 然后进行了仿真计算. 计算结果表明, 利用量子反馈可以明显的提高离子冷却速率. 还分析了反馈参数对离子冷却效率的影响.

关键词: 离子阱, Doppler 冷却, 量子反馈

PACS: 42.50.-p, 37.10.Rs, 42.62.-b

1 引言

反馈是指对系统的某一特征量进行提取测量, 并根据需要设计算法对其进行处理, 最后再通过物理手段将处理后的信息反过来作用于系统, 从而使系统具有特殊性质的方法. 反馈最初被广泛应用于电子技术中, 起到使系统输出稳定、抑制某些噪声或者放大系统输出的作用. 20 世纪 90 年代反馈方法的应用拓展到了量子领域, 提出了所谓的量子反馈. 量子反馈是用量子理论分析量子系统在反馈机制下的特性, 其过程与通常的反馈是一样的. 量子反馈的典型工作包括 Wiseman 和 Milburn^[1-3] 提出的利用零拍探测的量子反馈理论以及相关的研究成果^[4-8].

2005 年 Steixner 等^[9] 利用量子反馈理论对离子阱进行了研究, 提出了利用反馈电流提供附加势场从而冷却离子的方案. 2010 年 Markus Koch 等^[10] 实现了光学谐振腔中 Rb 原子的冷却.

目前对于离子阱的冷却方案中引入反馈方法是一个热门的讨论话题. 虽然已经有了量子反馈冷却, 但是针对已有的成熟的冷却方案中引入量子反馈方法研究得较少, Doppler 冷却就是其中之一. 为了有效提高冷却效率, 用于 Doppler 冷却的激光

器频率必须与离子的运动速率匹配. 因此, 一个通过获得离子速率信息来调整冷却激光频率的反馈方案对离子的 Doppler 冷却具有重要意义. 本文基于 Steixner 等提出的系统模型和理论, 采用 Doppler 反馈冷却的方案, 理论推导了运动主方程, 仿真计算研究表明, 利用量子反馈可以明显的提高离子的 Doppler 冷却速率.

2 理论分析

离子的反馈冷却方案如图 1 所示. 离子阱置于半腔中, 采用偏轴非共振激光激发离子, 通过荧光探测采集离子动量信息, 通过这些信息反馈调整激光频率. 其基本原理是, 离子被外场激光驱动发生跃迁, 然后离子从激发态 $|e\rangle$ 自发辐射到基态 $|g\rangle$. 当自发辐射方向是向左的某个立体角范围时 (如图 1), 自发辐射由镜子的反射形成驻波镜像模式, 再通过如图 1 所示的方案探测驻波的荧光信号. 由于半腔在空间中形成连续的真空驻波模式, 当离子在 $1/4$ 波长范围内运动时, 不同位置导致荧光信号的强度不同, 同时离子离开平衡位置的最大位移反映了离子的动量信息, 因此通过提取镜像模式的荧光信号可以获得离子运动信息. 详细的理论分析如

* 国家自然科学基金 (批准号:11174370) 资助的课题.

[†] E-mail: 396968776@qq.com

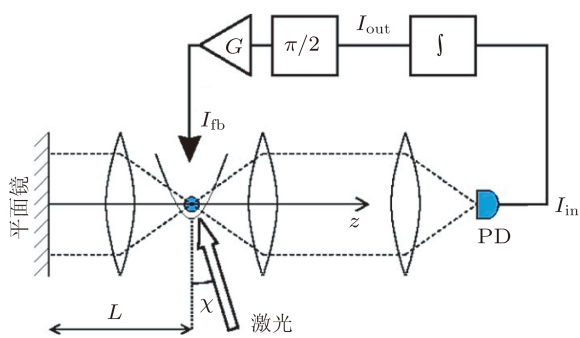


图1 反馈冷却模型示意图

下.

总的哈密顿量由 3 部分构成:

$$H = H_{\text{sys}} + H_{\text{bath}} + H_{\text{int}}, \quad (1)$$

其中受激光作用的离子的哈密顿量为 ($\hbar = 1$)^[9]:

$$H_{\text{sys}} = \nu_{\text{T}} \mathbf{a}^+ \mathbf{a} - \Delta_{\text{L}} |e\rangle \langle e| - \frac{1}{2} \Omega (e^{ik_{\text{eff}} \tilde{z}} |e\rangle \langle g| + \text{H.c.}), \quad (2)$$

其中 \mathbf{a}^+ , \mathbf{a} 是离子质心运动对应的声子的产生、湮灭算符, ν_{T} 是声子的频率, $|e\rangle$ 和 $|g\rangle$ 是离子的两个内态, $\Delta_{\text{L}} = \omega_{\text{L}} - \omega_{eg}$ 为激光相对于原子内态跃迁频率的失谐量, $k_{\text{eff}} \tilde{z} = \eta(a + a^+) \sin \chi$, η 为 Lamb-Dick 参数, Ω 为 Rabi 频率.

根据系统的半腔结构, 一维辐射场的电场分量可表示为镜像模式 $\mathbf{E}_{\text{m}}^{(+)}$ 和背景模式 $\mathbf{E}_{\text{b}}^{(+)}$ 之和

$$\mathbf{E}^{(+)} = \mathbf{E}_{\text{m}}^{(+)} + \mathbf{E}_{\text{b}}^{(+)}. \quad (3)$$

镜像模式的场算子描述为

$$\mathbf{E}_{\text{m}}^{(+)} = i \int_0^{\infty} d\omega \alpha_{\omega} \mathbf{e} \sin[\mathbf{k}(\omega)(L + \tilde{z})] b_{\text{m}}^+(\omega),$$

其中的 α_{ω} 是与 ω 有关的归一化因子, 在频率变化不大的情况下可近似为常量. \mathbf{e} 为电场矢量, $\mathbf{k}(\omega)$ 为波矢, $b_{\text{m}}^+(\omega)$ 是镜像模式中频率为 ω 的光子的产生算子. 背景模式可以类比写出.

我们可以写出 Bath 哈密顿量为

$$H_{\text{bath}} = H_{\text{m}} + H_{\text{b}}, \quad (4)$$

其中

$$H_{\text{m}} = \int d\omega \omega b_{\text{m}}^+(\omega) b_{\text{m}}(\omega),$$

$$H_{\text{b}} = \int d\omega \omega b_{\text{b}}^+(\omega) b_{\text{b}}(\omega).$$

库与离子相互作用哈密顿量为

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{d} \left(\mathbf{E}_{\text{m}}^{(+)}(\tilde{z}) + \mathbf{E}_{\text{b}}^{(+)}(\tilde{z}) \right) \sigma_{-} + \text{H.c.}, \quad (5)$$

\mathbf{d} 表示偶极矩阵元, $\sigma_{-} = |g\rangle \langle e|$ 是原子内态的 Dirac 算符.

在扩散近似下声子态满足的演化方程为^[9]

$$d\rho_{\text{c}}(t) = [\mathcal{L}_0 dt + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} dW(t) \mathcal{H}_{\text{m}}] \rho_{\text{c}}(t), \quad (6)$$

其中

$$\mathcal{L}_0 \rho_{\text{c}}(t) \equiv -i [\nu_{\text{T}} \mathbf{a}^+ \mathbf{a}, \rho_{\text{c}}(t)] + \mathcal{L}_{\text{b}} \rho_{\text{c}}(t) + \gamma \mathcal{D}[c_{\text{m}}(\tilde{z})] \rho_{\text{c}}(t),$$

$$\mathcal{L}_{\text{b}} \rho_{\text{c}}(t) = A_{-} \mathcal{D}[\mathbf{a}] \rho_{\text{c}}(t) + A_{+} \mathcal{D}[\mathbf{a}^+] \rho_{\text{c}}(t),$$

$$A_{\pm} = \eta^2 \frac{\Omega^2}{4} \Gamma_{\text{b}} \left(\frac{\sin^2 \chi}{(\Delta_{\text{L}} \mp \nu_{\text{T}})^2 + \Gamma^2/4} + \frac{\alpha}{\Delta_{\text{L}}^2 + \Gamma^2/4} \right),$$

$$\mathcal{D}[c] \rho \equiv c \rho c^+ - (c^+ c \rho + \rho c^+ c)/2,$$

$$c_{\text{m}}(\tilde{z}) \approx \left(1 + \eta(a + a^+) - \frac{1}{2} \eta^2 (a + a^+)^2 \right) / \sqrt{2},$$

$$\mathcal{H}_{\text{m}} \rho_{\text{c}}(t) = 2\eta [\tilde{z} \rho_{\text{c}}(t) + \rho_{\text{c}}(t) \tilde{z} - 2\langle \tilde{z} \rangle_{\text{c}}(t) \rho_{\text{c}}(t)].$$

\mathcal{L}_0 超算子描述了离子与激光以及自发辐射作用的演化, α 是偶极跃迁参数, $\langle \tilde{z} \rangle_{\text{c}}(t)$ 是探测响应时间内的离子平均位移, (6) 式中的第二项 $dW(t) = \xi(t) dt$, $\xi(t)$ 为 Gauss 白噪声项.

在收集信息的过程中采用零拍探测法, 我们可以得到光电流为^[9,11]

$$I_{\text{c}}(t) = \gamma \eta \langle \tilde{z} \rangle_{\text{c}}(t) + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \xi(t), \quad (7)$$

其中

$$\gamma = \varepsilon \Gamma \frac{\Omega^2}{4(\Delta_{\text{L}}^2 + \frac{\Gamma^2}{4})}.$$

γ 是镜像模式的光抽运率, ε 是和镜像模式的荧光信号收集率有关的参数, (7) 式中第一项中 $\langle \tilde{z} \rangle_{\text{c}}(t)$ 反映了离子的运动信息, 第二项是随机噪声产生的.

我们需要提取出光电流中有用的信息作为反馈电流, 方法是将光电流与一个本底谐振量 ($\omega_0 \approx \nu_{\text{T}}$) 混合并做一个 ϕ 相移, 通过带通滤波滤去高频振荡项, 最后再与本底谐振量混合放大.

定义变换 $U \equiv \exp(-i\omega_0 \mathbf{a}^+ \mathbf{a} t)$, 得到反馈电流在旋转坐标变换下的表达式^[9]

$$I_{\text{fb,c}}(t) = g \left[\gamma \eta \langle X_{\phi} \rangle_{\text{c}}^I(t) + \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \Xi(t) \right] \cos(\omega_0 t), \quad (8)$$

$$X_{\phi} \equiv \mathbf{a} e^{i\phi} + \mathbf{a}^+ e^{-i\phi},$$

$$\Xi(t) \equiv \int_{-\infty}^t d\tau \cos(\omega_0 \tau + \phi) \tilde{Z}(t - \tau) \xi(\tau),$$

g 为放大参数, $\tilde{Z}(t)$ 是滤波函数的 Fourier 逆变换. 我们看到除了一个随机项 $\Xi(t)$ 之外, 反馈电流正比于 X_{ϕ} 的平均值, 而 X_{ϕ} 与离子的运动状态密切相关, 取决于 ϕ 的取值. 当 $\phi = -\pi/2$ 时, X_{ϕ} 代表了离子的动量.

根据反馈原理, 我们希望能够利用光电流中的离子运动的信息反馈给系统来进行冷却. 本文主要研究的对象是采用 Doppler 冷却方法. 下面简要介绍需要用到的 Doppler 冷却的相关知识.

二能级原子与激光相互作用的自发辐射力描述为 [12]

$$F = k\Gamma\rho_{ee}, \quad (9)$$

其中

$$\rho_{ee} = \frac{\Omega^2}{\Gamma^2 + 4(\Delta_L - \mathbf{k}\mathbf{v})^2}.$$

\mathbf{k} 是激光的波矢, \mathbf{v} 是原子的运动速度. 此处假定波矢和原子速度反向.

将辐射力 F 在 $v = 0$ 附近做线性近似我们得到

$$F = F_0 + \left. \frac{dF}{dv} \right|_{v=0} v, \quad (10)$$

其中

$$F_0 = k\Gamma \frac{\Omega^2}{\Gamma^2 + 4\Delta_L^2},$$

$$\left. \frac{dF}{dv} \right|_{v=0} = F_0 \frac{8k\Delta_L}{\Gamma^2 + 4\Delta_L^2}.$$

通过上面的分析, 我们看到 (9) 式中 Doppler 冷却中起到阻尼作用的力的大小是和 $(\Delta_L - \mathbf{k}\mathbf{v})$ 有关的, 这一项的绝对值越小, Doppler 冷却的效果越好. 因此我们的思路就是, 通过采集光电流信息获取离子阱中离子的运动信息, 从而使 $(\Delta_L - \mathbf{k}\mathbf{v})$ 项保持一个较小的水平, 达到提高 Doppler 冷却效率的目的.

针对离子阱中的离子宏运动的声子态模型, 只考虑速度方向与波矢方向相反的情况, 即速度符号不变. 令

$$x(t) = A \sin(\nu_T t),$$

$$v(t) = A\nu_T \cos(\nu_T t), t \in [-\pi/2, \pi/2], \quad (11)$$

A 表示离子运动的范围, M 为离子的质量, n 为声子数.

由于力 F_0 在冷却过程中平均效果为零, 我们只考虑 $\left. \frac{dF}{dv} \right|_{v=0} v$ 项. 利用力与势能的关系来求等效的反馈势能

$$H_{fb} = \left. \frac{dF}{dv} \right|_{v=0} \int^v(t) dx(t)$$

$$= F_0 \frac{8k\Delta_L}{\Gamma^2 + 4\Delta_L^2} \nu_T (x\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$- A^2 \arcsin(x/A))/2. \quad (12)$$

由上面的结果利用对 x/A 的 Taylor 展开得到

$$H_{fb} \approx -F_0 \frac{8k\Delta_L}{\Gamma^2 + 4\Delta_L^2} \frac{\nu_T}{3A} x^3. \quad (13)$$

同时考虑 $\Delta_L \approx kv \ll \Gamma$, 我们得到等效的反馈哈密顿量为

$$H_{fb} = CI_{fb,c}(t - \tau)\tilde{z}_I^3(t), \quad (14)$$

$$C = \frac{4\pi k^3 \Omega^2}{3g\gamma\eta\Gamma^3 M^2 A\sqrt{2M\nu_T}}.$$

于是相应的得到反馈主方程为 [9]

$$\dot{\rho} = \tilde{\mathcal{L}}\rho + \frac{G}{4}\gamma\eta\mathcal{K}(X_\phi\rho + \rho X_\phi) + \frac{G^2}{16}\gamma\mathcal{K}^2\rho, \quad (15)$$

其中

$$\tilde{\mathcal{L}}\rho = \mathcal{L}_b\rho + \gamma\mathcal{D}[c_m(\hat{z})]\rho - i[\delta a^\dagger a, \rho],$$

$$\mathcal{K}\rho = -i[\tilde{z}_I^3(t), \rho].$$

$\tilde{z}_I(t)$ 是在相互作用绘景中的表达式, δ 是调制频率和阱频率之差, $G \equiv Cg$. (15) 式中右边第一项是原始激光冷却的 Liouville 在旋转坐标变换下的表示; 第二项是反馈作用的表示, 当我们选择适当的参数, 包括 δ 和 ϕ 等, 可以为冷却离子发挥作用; 最后一项是扩散项. (15) 式就是反馈 Doppler 冷却下离子声子态密度算子的演化方程.

3 仿真计算

下面针对 $\delta = 0$ 和 $\phi = -\pi/2$ 的情况进行仿真计算研究. 仿真模型我们根据实验上采用的 397 nm 激光对离子阱中的 $^{40}\text{Ca}^+$ 离子进行冷却的案例.

如图 2 所示, 声子数随着时间演化逐渐减小, 冷却效率随着声子数减小逐渐减弱. 但在实际的反馈冷却过程中并不能做到实时的反馈, 其中存在系统延迟以及间隔式的反馈以提高效率的问题.

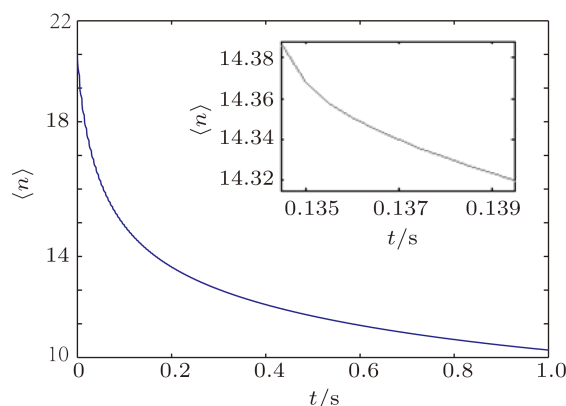


图 2 平均声子数随时间的演化 $G = 1, \varepsilon = 0.01$

计算过程中我们参考具体的实验系统, 设定每 5 ms 做一次反馈调整, 其中考虑到了系统延迟, 以及实际实验中采用激光脉冲对离子进行冷却的方法. 可以从图中看到, 由于反馈存在间隔时间以及系统的延迟, 在 5 ms 的范围内, 冷却的速率会随着 Doppler 频移量偏离激光的失谐量而逐渐减小. 当再一次的反馈到来时, 冷却的速率又会得到提高.

图 3 为冷却过程中离子阱中囚禁离子的声子数变化. 分别取无反馈时 $G = 0$ 和有反馈时 $G = 1$. 我们看到引入反馈方法有助于较好的提高冷却速率. 为了进一步研究放大参数 G 和荧光采集率 ε 对反馈冷却的影响, 我们代入不同的值进行仿真计算.

图 4 中纵轴表示从最初声子数 $n = 20$ 到冷却为 $n = 11$ 所需要的时间. 随着荧光采集率的提高, 冷却离子所需的时间也在缩短. 但是取 $\varepsilon = 0.003$ 的时候, G 增大到一定程度后时间有所增加. 因此我们需要谨慎的调整反馈的放大系数.

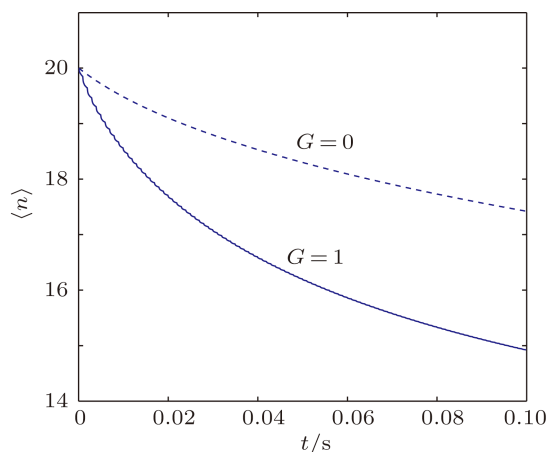


图 3 有反馈与无反馈的对比

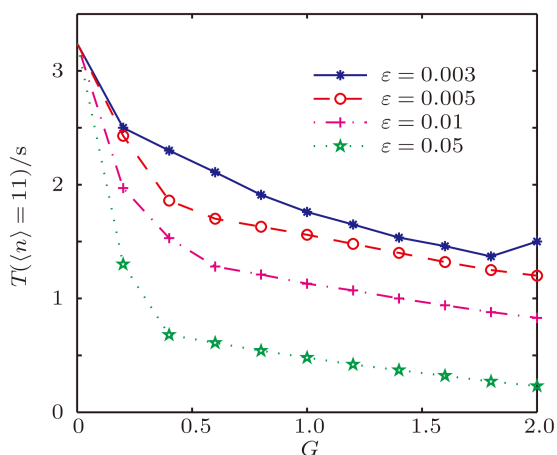


图 4 G 和 ε 对冷却速率的影响

G 和 E 对最终的冷却效果也具有影响. 从图 5 我们可以看到选取适当的 ε 和 G 可以得到较低的

离子温度. 但是由于本质上仍然利用了 Doppler 冷却的原理, 因此最后离子的温度无法突破 Doppler 冷却极限温度.

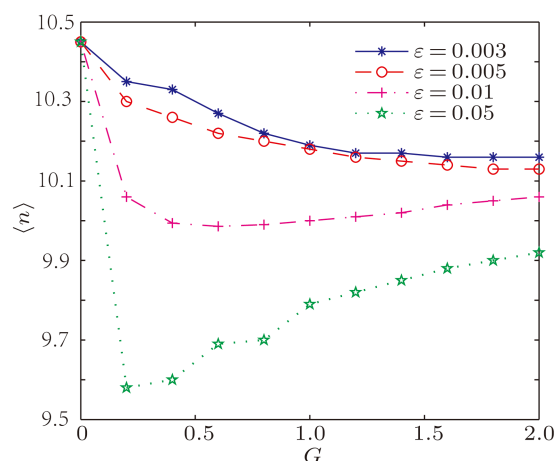


图 5 G 和 E 对最终冷却效果的影响

4 结论

将量子反馈应用于离子阱 Doppler 冷却, 首先推导了反馈对应的哈密顿量, 并得到了反馈主方程. 然后数值计算了离子的平均声子数随时间的变化. 计算结果表明, 反馈方法的引入有助于较好的提高 Doppler 冷却的速率. 还分析了反馈方法中重要参数对模型的影响, 发现增大荧光采集率, 并选择适当的放大系数有助于加快冷却速率以及降低离子温度. 其物理原因是, Doppler 冷却的关键所在是冷却激光的频率和离子跃迁频率以及离子运动 Doppler 频移之间的匹配关系. 如果能够精确匹配, 则离子将以最快的速率冷却. 但要匹配首先要获得离子的速度信息. 本文的反馈过程就是先提取这一信息, 再调整激光频率, 达到匹配的目的. 值得指出的是, 理论上由 (15) 式我们可以得到各个瞬时的离子质心运动的声子数, 但由于探测器存在响应时间, 实际测得的声子数是一段时期的平均声子数. 另外, 反馈也是需要时间的, 考虑到探测器的响应特别是反馈电路、器件的灵敏性, 本文取反馈间隔时间为 5 ms, 这一时间远远小于离子的相干时间 (相干时间是秒量级), 又能有充分的时间完成反馈操作.

调节冷却激光频率的反馈冷却方案在实验上具有一定的可行性. 但基于 Doppler 冷却的反馈方法仍不能突破 Doppler 冷却极限, 只能更好的逼近 Doppler 极限.

- [1] Wiseman H M, Milburn G J 1993 *Phys. Rev. Lett* **70** 548
[2] Dum R, Zoller P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 4879
[3] Wiseman H M, Milburn G J 1993 *Phys. Rev. A* **47** 1652
[4] Wiseman H M, Milburn G J 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1350
[5] Dorner U, Zoller P 2002 *arXiv:0203147v1[quant-ph]*
[6] Wilson M A, Bushev P, Eschner J, Schmidt-Kaler F, Becher C, Blatt R 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 213602
[7] Heinzen D J, Feld M S 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 2623
[8] Hinds E A, Sandoghdar V 1991 *Phys. Rev. A* **43** 398
[9] Steixner V, Rabl P, Zoller P 2005 *Phys. Rev. A* **72** 043826
[10] Koch M, Sames C, Kubanek A, Apel M, Balbach M, Ourjountsev A, Pinkse W H P, Rempe G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 173003
[11] Gardiner C W, Zoller P 2004 *Quantum Noise* (Berlin: Springer) p140
[12] Roos C F 2000 *Ph. D. Dissertation* (Innsbruck: Innsbruck University) p18

Doppler cooling of a trapped ion with feedback*

Jiang Zhi[†] Chen Ping-Xing

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China)

(Received 20 May 2011; revised manuscript received 1 September 2011)

Abstract

Basing on the theory of quantum feedback by Steixner and his coworkers, we develop the master equation of Doppler cooling with feedback in an ion trap. The result of simulation shows the property of speedup the cooling, besides the influences of those arguments and whether we could realize it in experiment.

Keywords: ion trap, Doppler cooling, quantum feedback

PACS: 42.50.-p, 37.10.Rs, 42.62.-b

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.11174370).

[†] E-mail: 396968776@qq.com